MATh.en.JEANS
Belgique

Actes du Congrès MATh.en.JEANS 2017 à Liège

Actes du Congrès MATh.en.JEANS 2017 à Liège

Actes du Congrès MATh.en.JEANS 2017 à Liège

Comité éditorial

Émilie Charlier
Marie Ernst
Céline Esser
Yvan Haine
Anne Lacroix
Julien Leroy (éditeur en chef)
Julien Raskin
Yvik Swan

Liste des contributeurs

Davan Chiem Dao
Eloi Collette
Gilles Defresne
Thomas Demortier
Julien Heine
Laura Lambert
Thelma Lambert
Alexandre Lebailly
Simon Lemal
Zoé Leroy
Léa Lo Manto
Thibault Lowette
Claire Neuttiens
Adrian Orban
François Philippart de Foy
Arthur Picard
Lucas Prieels
Aurore Schneiders
Laura Tialans
Sam Vanhamme

ISBN 978-2-9601143-7-9
EAN 9782960114379

Amis lecteurs, amies lectrices,

Les mathématiques sont souvent dépeintes comme austères, incompréhensibles, implacables et source de discrimination. Elles ont acquis, dans la psyché populaire, un statut d'épouvantail ayant traumatisé, tel le clown de Stephen King, des générations d'enfants purs et innocents qui n'avaient pas mérité ça. Une proportion inquiétante d'adultes sortent de l'école convaincus qu'une absence de compétences en mathématiques est un indicateur positif, peut-être de par l'opposition stérile qui est faite entre mathématiques et littérature, avec l'intuition que « matheux » impliquant « non littéraire », « non matheux » impliquerait « littéraire ». Cette opposition est bien entendu totalement fausse, de même que cette réputation des mathématiques est entièrement fondée sur des bases mensongères. Fake News !

Dans un monde idéal, personne n'abhorrerait « les mathématiques », de la même façon que personne n'abhorre « la musique ». En musique, on distingue les professionnels (Bach, Herbert von Karajan, Amy Winehouse, Bob Marley, Taylor Swift,...), les amateurs (dans tous les styles, du baroque au death metal, du reggae à la musique concrète) ; et les mélomanes (et nous mettons dans cette catégorie tant les amateurs de Mozart, que les passionnés de Hildegard von Bingen ou de Bigflo & Oli). Personne ne déteste « la musique ». Il devrait en être de même vis-à-vis des mathématiques.

Les mathématiques sont riches et diverses et cela n'a aucun sens de les rejeter (ou même de les accepter) en un seul bloc. Bien entendu, certains sont très sensibles aux charmes de cette discipline et y développent, très rapidement, des dispositions remarquables. Ceux-là, les virtuoses, sont rares et précieux, ils permettent à l'humanité de faire des découvertes remarquables (pensez à Évariste Galois, Terry Tao ou Maryam Mirzakhani). Il n'est pourtant pas indispensable d'être un génie pour être un matheux, et de nombreuses autres personnes auront la chance de se découvrir, pendant leur parcours scolaire, des affinités avec la pensée mathématique et seront amenés à créer leur métier autour de ces compétences. Finalement, pour les autres, il conviendrait non pas de garder un souvenir traumatique de leur confrontation à cette discipline mais plutôt d'en chérir le souvenir doux et précieux d'une époque formidable que nous ne devrions jamais vraiment quitter : celle du temps de l'apprentissage. Et une des choses que nous devrions tous souhaiter à nos enfants est justement qu'ils puissent se découvrir un intérêt pour les mathématiques et les sciences.

L'initiative MeJ.be [1] est destinée à lutter contre l'image négative des mathématiques en donnant l'opportunité à tout élève du secondaire qui le souhaite de participer avec ses amis à un atelier de recherche en mathématiques en dehors des heures scolaires. Sous l'impulsion d'un ou plusieurs enseignants motivés, des chercheurs professionnels viennent à la rencontre des jeunes afin de leur présenter des problèmes simples à poser, mais dont la résolution nécessitera créativité, collaboration et imagination. Les élèves travaillent ensuite toute l'année, avec leurs camarades et sous la guidance de leurs enseignants et des chercheurs, à la résolution du problème. Il n'y a pas de notion d'excellence, il n'y a pas de projet réussi ou raté, il n'y a pas de bonne ou de mauvaise approche ; seules comptent la créativité et la curiosité. Née en France il y a plus de 20 ans, cette initiative rassemble maintenant chaque année plusieurs **milliers** d'élèves qui s'investissent, toute l'année durant, dans la résolution de problèmes mathématiques non standards. À la fin du parcours, ils ont l'occasion de présenter le fruit de leurs recherches durant un grand congrès au cours duquel ils ont également l'opportunité d'échanger avec d'autres jeunes ayant connu le même parcours, ainsi qu'avec des mathématiciens professionnels de différents horizons. Loin des clichés habituels, on découvre à cette occasion une chose qu'il est souvent difficile d'enseigner durant le temps scolaire : les mathématiques sont une discipline joyeuse, créative et collaborative.

Ce livre recueille 6 articles écrits par 20 élèves ayant participé à MeJ.be durant l'année scolaire 2016–2017, ainsi qu'un descriptif du congrès organisé à Liège au mois d'avril 2017 et durant lequel ces mêmes participants sont venus présenter leurs résultats, en compagnie de près de 400 autres jeunes venus de Belgique, de France et du Luxembourg. Dans ces quelques pages, vous découvrirez, chers lecteurs, chères lectrices, des problèmes simples à poser, mais qui ouvrent des portes vers des trésors de réflexion, et vous aurez l'occasion de suivre le raisonnement de jeunes adolescents qui les ont abordés avec très peu d'outils à leur disposition. À la fin de ce livre, vous serez également amenés à faire un autre constat à contre-pied de celui qui est souvent fait de nos jours : nos jeunes sont

1. MeJ est un « méta acronyme » : il s'agit de l'acronyme de MATh.en.JEANS qui est lui-même un acronyme dont nous laissons au lecteur le soin de découvrir le sens ; MeJ.be est la marque de la branche belge de MeJ.

formidables et, pour peu que nous parvenions à nourrir leurs compétences et à les amener à s'épanouir, l'avenir de notre espèce est radieux, grâce à eux.

Un grand et chaleureux merci à tous les jeunes auteurs, à leurs enseignant.e.s et chercheur.e.s, ainsi qu'aux relectrices et relecteurs.

Le Comité d'édition.

Table des matières

Cinémath

Thomas DEMORTIER, Julien HEINE, Alexandre LEBAILLY, Simon LEMAL, Thibault LOWETTE, François PHILIPPART DE FOY et Aurore SCHNEIDERS

Élèves de 5e secondaire au
Collège Saint-Benoît Saint-Servais de Liège

Avec l'aide de leurs enseignants
Xavier HEEREN et Romain SOURDEAU

et des chercheurs
Stéphanie AERTS, Céline ESSER, Zyed HAMDI et Julien RASKIN (ULiège)

Résumé :

Cet article traite des carrés gréco-latins. Le problème se formule comme suit : n écoles envoient chacune n élèves, issus de n types de classes, à une séance de cinéma. Chaque école envoie exactement un élève de chacun des n types de classes. Est-il possible de placer ces $n \times n$ élèves dans la salle, constituée de n rangées de n sièges, de manière telle que deux élèves issus de la même école ou d'un même type de classe ne soient pas sur une même rangée ou une même colonne de sièges ?

Dans l'article, les élèves montrent que ce problème admet une solution lorsque n est impair, ainsi que s'il est multiple de 4. Ils montrent également que le problème n'admet pas de solution pour $n = 2$, et conjecturent qu'il en est de même pour $n = 6$. De manière générale, la question reste ouverte pour les n pairs non divisibles par 4.

1 Présentation du problème

1.1 Énoncé

Un groupe de n écoles souhaite se rassembler pour visionner un film. Chaque école contient n types de classe différents et propose à un seul étudiant de chaque type de classes de participer à l'évènement. La salle de cinéma contient n rangées de n sièges. Est-il possible de placer les $n \times n$ étudiants dans la salle de cinéma de sorte que chaque étudiant y soit et que, sur chaque rangée et chaque colonne de sièges, on ne retrouve ni deux écoles identiques, ni deux types de classe identiques ?

1.2 Formalisation

Comment désigner un élève, un siège ?

Nous avons décidé d'associer à chaque élève un couple d'entier : le premier détermine son école et le deuxième le type de classes dans laquelle il est (par convention, on commence à compter à 0). On doit ensuite placer ces élèves dans une salle de cinéma de manière à respecter les critères de l'énoncé. Cependant, chaque siège (chaque case du tableau) peut également être désigné par un couple de deux nombres, sa rangée et son numéro. Il est à noter que les nombres formant ces couples, aussi bien ceux désignant un siège que ceux désignant un élève, sont compris entre 0 et $n-1$.

On remarque alors que le problème revient à associer à chaque couple (a, b) de l'ensemble [2] $(\mathbb{Z}_n)^2$, désignant un siège, un couple du même ensemble désignant un élève (c, d), ou à trouver un fonction

$$f_n : (\mathbb{Z}_n)^2 \to (\mathbb{Z}_n)^2, (a, b) \mapsto (c, d) \tag{1}$$

répondant à certaines condition que nous allons expliquer ci-dessous. Cette fonction va en faite associer à chaque siège de la rangée a et dont le numéro est b un élève de l'école c dans le type de classe d.

2. $(\mathbb{Z}_n)^2$ peut être interpreté comme « l'ensemble des couples d'entier modulo n ». (confer sous section 5.1)

Première condition

La première condition n'est pas formulée explicitement dans l'énoncé. On sait cependant que « Un seul étudiant de chaque classe participe à l'évenement ». Cela signifie que chaque couple (c, d) se retrouve exactement une fois, ou que la fonction f_n est bijective[3]. Chaque siège ne se voit attribuer qu'un élève, et vice-versa. Ainsi, pour chaque élève (c, d), il existe un siège (a, b), et sur deux siège différents, on trouve deux élèves différents. Pour prouver que la fonction est bijective, on prouvera

$$\forall (c,d) \in (\mathbb{Z}_n)^2,\ \exists (a,b)\ (\mathbb{Z}_n)^2 \mid f_n(a,b) = (c,d) \tag{2}$$

et

$$\forall (a,b), (a',b') \in (\mathbb{Z}_n)^2,\ f_n(a,b) = f_n(a',b') \Rightarrow (a,b) = (a',b') \tag{3}$$

qui est équivalent sa contraposée $(a, b) \neq (a', b') \Rightarrow f_n(a, b) \neq f_n(a', b')$.

Remarque. Lorsque l'on travaille avec des fonctions à ensembles domaine et image de taille finie et identique, une fonction injective est surjective et vice versa. On ne doit donc pas prouver que la fonction est injective et surjective mais seulement un des deux.
En effet, si elle est surjective, on peut en déduire que pour que chaque image soit atteinte (ce qui est la définition de la surjectivité), chaque antécédent doit avoir une image différente des autres.
Si elle est injective, chaque antécédant a une image différente des autres, donc il y a autant d'images atteintes que d'antécédents. Comme on sait que le nombre d'images est égal à celui d'antécédents, on en conclut que toutes les images sont atteintes.

Deuxième condition

La deuxième veut que chaque colonne et chaque ligne, chaque école et chaque type de classes soit représenté une fois. Si l'on définit

$$g, h : (\mathbb{Z}_n)^2 \to \mathbb{Z}_n \mid f_n(a,b) = (g(a,b), h(a,b)) \tag{4}$$

alors, en gardant a ou b fixé, les fonctions $g_a(b), g_b(a), h_a(b), h_b(a)$ sont toutes bijectives (la fonction $g_a(b)$ vaut $g(a, b)$, mais a est gardé constant).

3. Cette notion est définie dans l'annexe, sous-section 5.2

Le fait de fixer a ou b permet de rester sur une même ligne ou colonne, et la bijectivité des fonctions assurent que sur cette rangée, chaque premier élément (donné par g, le numéro de l'école) soit présent exactement une fois, et de même pour le deuxième élément (donné par h, le type de la classe).

2 Cas particuliers

Lorsque n est impair, le problème est facilement solvable. Il est en effet peu compliqué de trouver une configuration qui conviennent. Il en existe en fait énormément.

2.1 Exemple

Par exemple, on peut générer un premier tableau en associant à la case (a, b) sa « distance » (en terme de déplacements horizontaux et verticaux uniquement), modulo n. En associant ce tableau à son symétrique orthogonal d'axe vertical (i.e. pour la case de coordonnées (a, b), on forme un couple en prenant la valeur de la case correspondante du premier tableau comme première valeur du couple et celle du deuxième tableau comme deuxième valeur), on obtient un tableau, contenant des couples, cette fois, qui est solution du problème.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

4	3	2	1	0
0	4	3	2	1
1	0	4	3	2
2	1	0	4	3
3	2	1	0	4

Table 1 – *À gauche :* le premier tableau. *À droite :* son symétrique.

(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)
(1, 0)	(2, 4)	(3, 3)	(4, 2)	(0, 1)
(2, 1)	(3, 0)	(4, 4)	(0, 3)	(1, 2)
(3, 2)	(4, 1)	(0, 0)	(1, 4)	(2, 3)
(4, 3)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)	(3, 4)

Table 2 – L'association des deux tableaux.

Pourquoi est-elle solution ?

Chaque case du premier tableau est définie par sa distance à la case en haut à gauche, le tout modulo n, ce qui peut aussi bien s'exprimer $a+b$ (pour la case (a,b)). Pour le deuxième tableau, il faut penser à ce que signifie une « symétrie d'axe vertical ». En fait, cela revient à associer à la case (a,b) du deuxième tableau la case $(a,n-1-b)$ du premier. Ainsi, le deuxième tableau est défini par $a+(n-1-b) \mod n = a-b-1 \mod n$.

Leur association est définie par

$$f_n(a,b) = (a+b \mod n, a-b-1 \mod n).$$

Néanmoins, on préférera démontrer que

$$f_n(a,b) = (a+b \mod n, a-b \mod n)$$

respecte les conditions. En effet, si cette dernière fonction respecte les conditions, sa composée avec $l(a,b) = (a, b-1 \mod n)$, i.e. la fonction $f_n(a,b) = (a+b \mod n, a-b-1 \mod n)$, les respecte aussi (car $l(a,b) = (a, b-1 \mod n)$ est bijective et la composé de deux fonctions bijectives l'est aussi).

Il reste à prouver, de manière formelle, que

$$f_n(a,b) = (a+b \mod n, a-b \mod n) \tag{5}$$

respecte la première et la deuxième condition.

(0, 0)	(1, 4)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 1)
(1, 1)	(2, 0)	(3, 4)	(4, 3)	(0, 2)
(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)	(0, 4)	(1, 3)
(3, 3)	(4, 2)	(0, 1)	(1, 0)	(2, 4)
(4, 4)	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(3, 0)

Table 3 – Le tableau généré par la nouvelle fonction.

Intuitivement, cette fonction semble convenir puisque ce tableau respecte les conditions définies dans la section 1.2.

2.2 Première condition

Proposition 2.1. *La fonction*

$$f_n : (\mathbb{Z}_n)^2 \to (\mathbb{Z}_n)^2, (a, b) \mapsto (a + b \mod n, a - b \mod n)$$

est injective.

Démonstration. Supposons $f_n(a, b) = f_n(a', b') \Leftrightarrow (a+b \mod n, a-b \mod n) = (a' + b' \mod n, a' - b' \mod n)$.
C'est équivalent à

$$\begin{cases} a + b & \equiv a' + b' \pmod n \\ a - b & \equiv a' - b' \pmod n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a & \equiv 2a' \pmod n \\ 2b & \equiv 2b' \pmod n \end{cases}.$$

Puisque n est impair, 2 est inversible modulo n et on a

$$\begin{cases} a & \equiv a' \pmod n \\ b & \equiv b' \pmod n \end{cases}.$$

Comme $a, a' \in \mathbb{Z}_n,\ a \equiv a' \pmod n$ se simplifie en $a = a'$, et pareillement pour $b = b'$.
On a donc bien prouvé que $f_n(a, b) = f_n(a', b') \Rightarrow (a, b) = (a', b')$ et donc que f_n est injective. □

Corollaire 2.1.1. *Puisque* $|\mathrm{dom}\ f_n| = |\mathrm{im}\ f_n|,\ f_n$ *est bijective.*

On pourrait également prouver qu'elle est surjective.

Proposition 2.2. *La fonction*

$$f_n : (\mathbb{Z}_n)^2 \to (\mathbb{Z}_n)^2, (a, b) \mapsto (a + b \mod n, a - b \mod n)$$

est surjective.

Démonstration. Soit $(c,d) \in (\mathbb{Z}_n)^2$. Si c et d sont de même parité, alors $\frac{c+d}{2}$ est entier et

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{c+d}{2}, \frac{c-d}{2}\right) &= \left(\frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2} \mod n, \frac{c+d}{2} - \frac{c-d}{2} \mod n\right) \\ &= (c,d). \end{aligned}$$

Si ils sont de parités différentes, $\frac{c+n+d}{2}$ est entier et

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{c+n+d}{2}, \frac{c+n-d}{2}\right) &= \left(\frac{c+n+d}{2} + \frac{c+n-d}{2} \mod n,\right. \\ &\quad \left.\frac{c+n+d}{2} - \frac{c+n-d}{2} \mod n\right) \\ &= (c+n \mod n, d \mod n) = (c,d). \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $\forall(c,d) \in (\mathbb{Z}_n)^2,\ \exists(a,b) \in (\mathbb{Z}_n)^2 \mid f_n(a,b) = (c,d)$ et donc que f_n est surjective. □

2.3 Deuxième condition

Proposition 2.3. *Les fonctions g_a, g_b, h_a, h_b (définie dans la sous section 1.2) sont injectives.*

Démonstration. Prouvons que h_a est injective. Cette fonction est définie par $h_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, b \mapsto a - b \mod n$.
Supposons que $h_a(b) = h_a(b')$, i.e. $a - b \mod n = a - b' \mod n \Leftrightarrow a - b \equiv a - b' \pmod{n} \Leftrightarrow b' \equiv b \pmod{n}$. Comme $b, b' \in \mathbb{Z}_n,\ b \equiv b' \pmod{n}$ se simplifie en $b = b'$.
On a donc bien prouvé que $h_a(b) = h_a(b') \Rightarrow b = b'$ et donc que h_a est injective.
La démonstration de l'injectivité de g_a, g_b, h_b est semblable. □

Corollaire 2.3.1. *Puisque* $|\text{dom } g_a| = |\text{im } g_a|, g_a$ *est bijective. Idem pour* g_b, h_a, h_b.

À nouveau, une preuve de la surjectivité.

Proposition 2.4. *Les fonctions g_a, g_b, h_a, h_b (définie dans la sous section 1.2) sont surjectives.*

Démonstration. Prouvons que h_b est surjective. Cette fonction est définie par $h_b : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, a \mapsto a - b \mod n$.
Soit $d \in \mathbb{Z}_n$. $h_b(d + b \mod n) = h(d + b \mod n, b) = d + b - b \mod n = d$.
On a donc bien prouvé que $\forall d \in \mathbb{Z}_n,\ \exists a \in \mathbb{Z}_n \mid h_b(a) = d$ et donc que h_b est surjective.
La démonstration de la surjectivité de g_a, g_b, h_a est semblable. □

3 Composée

Il est également possible, à partir d'une solution du problème à $m \times m$ élèves et d'une à $n \times n$, d'en trouver une à $mn \times mn$ élèves.

La méthode utilisée pour composer deux fonctions ressemble à la division euclidienne. En effet, si l'on a les fonctions f_m et f_n qui sont solutions du problème, la solution du problème $mn \times mn$ obtenue par composée est définie par

$$f_m \boxtimes f_n(a, b) = f'_{mn}(a, b) = m \cdot f_n(\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b}{m} \right\rfloor) + f_m(a \mod m, b \mod m). \tag{6}$$

Prouvons que cette fonction respecte les critères.

3.1 Exemple

Nous allons ici montrer à quoi ressemble un tableau généré par la fonction $f'_{15} = f_5 \boxtimes f_3$. Comme nous l'avons vu dans la définition, nous avons besoin des tableaux générés par les fonctions f_5 et f_3.

(0, 0)	(1, 4)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 1)
(1, 1)	(2, 0)	(3, 4)	(4, 3)	(0, 2)
(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)	(0, 4)	(1, 3)
(3, 3)	(4, 2)	(0, 1)	(1, 0)	(2, 4)
(4, 4)	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(3, 0)

(0, 0)	(1, 2)	(2, 1)
(1, 1)	(2, 0)	(0, 2)
(2, 2)	(0, 1)	(1, 0)

Table 4 – Les représentations des fonctions f_5 et f_3.

Essayons de calculer $f'_{15}(5, 9)$. On a $5 = 1 \cdot 5 + 0$ et $9 = 1 \cdot 5 + 4$.
Donc, $f'_{15} = 5 \cdot f_3(1, 1) + f_5(0, 4) = 5 \cdot (2, 0) + (4, 1) = (14, 1)$.

À titre d'exemple, on peut calculer quelques autres valeurs :
$f'_{15}(6,6) = 5 \cdot f_3(1,1) + f_5(1,1) = 5 \cdot (2,0) + (2,0) = (12,0)$
$f'_{15}(10,14) = 5 \cdot f_3(2,2) + f_5(0,4) = 5 \cdot (1,0) + (4,1) = (9,1)$
$f'_{15}(11,11) = 5 \cdot f_3(2,2) + f_5(1,1) = 5 \cdot (1,0) + (2,0) = (7,0)$.

(0,0)	(1, 4)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 1)	(5, 10)	(6, 14)	(7, 13)	(8, 12)
(1, 1)	(2, 0)	(3, 4)	(4, 3)	(0, 2)	(6, 11)	(7, 10)	(8, 14)	(9, 13)
(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)	(0, 4)	(1, 3)	(7, 12)	(8, 11)	(9, 10)	(5, 14)
(3, 3)	(4, 2)	(0, 1)	(1, 0)	(2, 4)	(8, 13)	(9, 12)	(5, 11)	(6, 10)
(4, 4)	(0, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(3, 0)	(9, 14)	(5, 13)	(6, 12)	(7, 11)
(5, 5)	(6, 9)	(7, 8)	(8, 7)	(9, 6)	(10, 0)	(11, 4)	(12, 3)	(13, 2)
(6, 6)	(7, 5)	(8, 9)	(9, 8)	(5, 7)	(11, 1)	(12, 0)	(13, 4)	(14, 3)
(7, 7)	(8, 6)	(9, 5)	(5, 9)	(6, 8)	(12, 2)	(13, 1)	(14, 0)	(10, 4)
(8, 8)	(9, 7)	(5, 6)	(6, 5)	(7, 9)	(13, 3)	(14, 2)	(10, 1)	(11, 0)
(9, 9)	(5, 8)	(6, 7)	(7, 6)	(8, 5)	(14, 4)	(10, 3)	(11, 2)	(12, 1)
(10, 10)	(11, 14)	(12, 13)	(13, 12)	(14, 11)	(0, 5)	(1, 9)	(2, 8)	(3, 7)
(11, 11)	(12, 10)	(13, 14)	(14, 13)	(10, 12)	(1, 6)	(2, 5)	(3, 9)	(4, 8)
(12, 12)	(13, 11)	(14, 10)	(10, 14)	(11, 13)	(2, 7)	(3, 6)	(4, 5)	(0, 9)
(13, 13)	(14, 12)	(10, 11)	(11, 10)	(12, 14)	(3, 8)	(4, 7)	(0, 6)	(1, 5)
(14, 14)	(10, 13)	(11, 12)	(12, 11)	(13, 10)	(4, 9)	(0, 8)	(1, 7)	(2, 6)

Table 5 – Une partie du tableau 15×15 généré par la fonction $f_5 \boxtimes f_3$.

Il est intéressant de remarquer que si deux couples ont le même reste après division euclidienne, il en est de même pour leurs images par f'_{15}. De même, si deux couples ont un même quotient après division euclidienne, leurs images aussi.

3.2 Première condition

Théorème 3.1. *Si f_m et f_n sont injectives, $f'_{mn} = f_m \boxtimes f_n$ l'est aussi.*

Démonstration. Supposons $f'_{mn}(a,b) = f'_{mn}(a',b')$. Si deux nombres sont égaux, les quotients et restes de leurs divisions euclidiennes par un nombre donné sont égaux. Or, $m \cdot f_n(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b}{m} \rfloor) + f_m(a \bmod m, b \bmod m)$ est le résultat de la division euclidienne de $f'_{mn}(a,b)$ par m, puisque $f_m(a \bmod m, b \bmod m)$ donne un couple dont les deux valeurs sont inférieures à m. De même, $m \cdot f_n(\lfloor \frac{a'}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b'}{m} \rfloor) + f_m(a' \bmod m, b' \bmod m)$ est le résultat de la division euclidienne de $f'_{mn}(a',b')$ par m. Ainsi, comme deux nombres égaux ont des quotients et restes égaux après division par un nombre donné,

$$\begin{cases} f_n(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b}{m} \rfloor) & = f_n(\lfloor \frac{a'}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b'}{m} \rfloor) \\ f_m(a \mod m, b \mod m) & = f_m(a' \mod m, b' \mod m) \end{cases}.$$

Comme les fonctions f_m et f_n sont injectives, cela implique directement

$$\begin{cases} (\lfloor \frac{a}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b}{m} \rfloor) & = (\lfloor \frac{a'}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b'}{m} \rfloor) \\ (a \mod m, b \mod m) & = (a' \mod m, b' \mod m) \end{cases}.$$

Finalement, on peut dire que deux nombres qui, lorsque divisés par un entier donné, ont les même quotients et restes sont forcement égaux, donc $(a, b) = (a', b')$.

On a donc bien prouvé que $f'_{mn}(a, b) = f'_{mn}(a', b') \Rightarrow (a, b) = (a', b')$ et donc que f'_{mn} est injective. □

Corollaire 3.1.1. *Puisque* $|\text{dom } f'_{mn}| = |\text{im } f'_{mn}|, f'_{mn}$ *est bijective.*

Théorème 3.2. *Si* f_m *et* f_n *sont surjectives,* $f'_{mn} = f_m \boxtimes f_n$ *l'est aussi.*

Démonstration. Soit $(c, d) \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^2$. On définit le quotient et reste de (c, d) après division euclidienne par m :

$$(c, d) = m \cdot (c_q, d_q) + (c_r, d_r) \text{ où } c_r, d_r < m.$$

Puisque $c, d < mn, c_q, d_q < n$. Dés lors, comme f_m et f_n sont surjectives,

$$\exists (a_q, b_q) \in (\mathbb{Z}_n)^2, (a_r, b_r) \in (\mathbb{Z}_m)^2 \mid \\ f_n(a_q, b_q) = (c_q, d_q), f_m(a_r, b_r) = (c_r, d_r).$$

En prenant $(a, b) = m \cdot (a_q, b_q) + (a_r, b_r)$ ((a_q, b_q) et (a_r, b_r) sont quotient et reste de (a, b)), on a

$$f'_m n(a, b) = m \cdot f_n(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b}{m} \rfloor) + f_m(a \mod m, b \mod m)$$

$$= m \cdot f_n(a_q, b_q) + f_m(a_r, b_r) = m \cdot (c_q, d_q) + (c_r, d_r) = (c, d).$$

On a donc bien prouvé que $\forall (c, d) \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^2$, $\exists (a, b) \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^2 \mid f'_{mn}(a, b) = (c, d)$ et donc que f'_{mn} est surjective. □

3.3 Deuxième condition

Théorème 3.3. *Si $g_{b,m}$ et $g_{n,a}$ sont injectives, $g'_{b,mn} = g_{b,m} \boxtimes g_{a,n}$ l'est aussi. Idem pour $g'_{a,mn}, h'_{a,mn}, h'_{b,mn}$.*

Démonstration. Supposons que $g'_{b,mn}(a) = g'_{b,mn}(a')$. Or,

$$g'_{b,mn}(a) = g'_{b,n}(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor) + g_{b,m}(a \mod m)$$

avec b_n fixé à $\lfloor \frac{b}{m} \rfloor$, et b_m fixé à $b \bmod m$. On remarquera que $g'_{b,mn}(a) = g_{b,n}(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor) + g_{b,m}(a \bmod m)$ est le résultat de la division euclidienne de $g'_{b,mn}(a)$. Ainsi, par un raisonnement identique à celui du théorème 3.1, on a

$$\begin{aligned} &\begin{cases} g_{b,n}(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor) & = g_{b,n}(\lfloor \frac{a'}{m} \rfloor) \\ g_m(a \mod m) & = g'_m(a' \mod m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor \frac{a}{m} \rfloor & = \lfloor \frac{a'}{m} \rfloor \\ a \mod m & = a' \mod m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad a = a'. \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $g'_{b,mn}(a) = g'_{b,mn}(a') \Rightarrow a = a'$ et donc que $g'_{b,mn}$ est injective.
La démonstration de l'injectivité de $g'_{a,mn}, h'_{a,mn}, h'_{b,mn}$ est semblable. □

Corollaire 3.3.1. *Puisque $|\text{dom } g'_{b,mn}| = |\text{im } g'_{b,mn}|, g'_{b,mn}$ est bijective. Idem pour $g'_{a,mn}, \ldots$.*

Théorème 3.4. *Si $g_{b,m}$ et $g_{b,n}$ sont surjectives, $g'_{b,mn} = g_{b,m} \boxtimes g_{b,n}$ l'est aussi. Idem pour $g'_{a,mn}, \ldots$.*

Démonstration. Soit $c \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$. On effectue la division euclidienne :

$$c = m \cdot c_q + c_r \text{ où } c_r < m.$$

Puisque $c < mn, c_q < n$. Dés lors, comme $g_{b,m}$ et $g_{b,n}$ sont surjectives,

$$\exists a_q \in (\mathbb{Z}_n)^2, a_r \in (\mathbb{Z}_m)^2 \mid g_{b,n}(a_q) = c_q, g_{b,m}(a_r) = c_r).$$

En prenant $a = m \cdot a_q + a_r$ (a_q et a_r sont quotient et reste de a), on a

$$\begin{aligned} g_m n'(a) &= m \cdot g_{b,n}(\lfloor \frac{a}{m} \rfloor) + g_{b,m}(a \mod m) \\ &= m \cdot g_{b,n}(a_q) + g_{b,m}(a_r) \\ &= m \cdot c_q + c_r = c. \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $\forall c \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z},\ \exists a \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \mid g'_{b,mn}(a) = c$ et donc que g_{mn} est surjective.
La démonstration de la surjectivité de $g'_{a,mn}, h'_{b,mn}, h'_{a,mn}$ est semblable. □

Lemme 3.5. *Si f_m et f_n sont des fonctions résolvant le problème, $f'_{mn} = f_m \boxtimes f_n$ l'est aussi.*

Démonstration. Si f_m et f_n sont des fonctions résolvant le problème, elles respectent toutes les deux la première condition, et par les corollaires des théorèmes 3.1 ou 3.2, la fonction f'_{mn} la respecte aussi.
De plus, f_m et f_n respectent également la deuxième condition, par hypothèse, et par les corollaires des théorèmes 3.3 et 3.4, la fonction f'_{mn} la respecte également.
Ainsi, $f'_{mn} = f_m \boxtimes f_n$ respecte les deux conditions et résout le problème. □

4 Généralisation

4.1 Puissances de 2

Maintenant que l'on peut faire des composées de fonctions (confer section 3), on peut s'attaquer aux nombres pairs, en commençant par les puissances de 2. À peu près par hasard, nous avons trouvé des solutions pour 2^2 et 2^3. Bien que pour le cas 2×2, il n'y ait pas de solution, pour toutes les autres puissances de 2, il en existe. Nous prouvons l'existence de ces solutions au point suivant. Cependant, pour se convaincre de la non existence d'une solution 2×2, on peut, par exemple, essayer toutes les configurations possibles, sachant qu'il n'y en a pas énormément. Néanmoins, ce raisonnement un peu brutal est beaucoup moins efficace pour montrer la non existence d'une solution 6×6 ou plus, car le nombre de cas à traiter explose rapidement.

Puissances paires

Lemme 4.1. *Il existe une solution de dimension* 4×4.

Démonstration. En voici une :

$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(3,3)$
$(1,3)$	$(0,2)$	$(3,1)$	$(2,0)$
$(2,1)$	$(3,0)$	$(0,3)$	$(1,2)$
$(3,2)$	$(2,3)$	$(1,0)$	$(0,1)$

□

Théorème 4.2. *Pour tout naturel* n, *il existe une solution de dimension* $2^{2n} \times 2^{2n}$ *au problème.*

Démonstration. Par récurrence sur n.
Initialisation : Lorsque $n = 0$, il existe une solution évidente (le tableau de taille 1×1 contient un couple $(0,0)$).
Induction : Supposons que l'on ait une solution pour $2^{2n} \times 2^{2n}$. Alors, en la composant avec celle de 4×4, on obtient une solution pour $2^{2n} \cdot 4 \times 2^{2n} \cdot 4 = 2^{2n+2} \times 2^{2n+2}$. Cela clôt notre induction. □

Puissances impaires

Lemme 4.3. *Il existe une solution de dimension* 8×8.

Démonstration. En voici une :

$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(3,3)$	$(4,4)$	$(5,5)$	$(6,6)$	$(7,7)$
$(5,6)$	$(4,7)$	$(7,4)$	$(6,5)$	$(1,2)$	$(0,3)$	$(3,0)$	$(2,1)$
$(2,3)$	$(3,2)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(6,7)$	$(7,6)$	$(4,5)$	$(5,4)$
$(7,5)$	$(6,4)$	$(5,7)$	$(4,6)$	$(3,1)$	$(2,0)$	$(1,3)$	$(0,2)$
$(4,1)$	$(5,0)$	$(6,3)$	$(7,2)$	$(0,5)$	$(1,4)$	$(2,7)$	$(3,6)$
$(1,7)$	$(0,6)$	$(3,5)$	$(2,4)$	$(5,3)$	$(4,2)$	$(7,1)$	$(6,0)$
$(6,2)$	$(7,3)$	$(4,0)$	$(5,1)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(0,4)$	$(1,5)$
$(3,4)$	$(2,5)$	$(1,6)$	$(0,7)$	$(7,0)$	$(6,1)$	$(5,2)$	$(4,3)$

□

Théorème 4.4. *Pour tout naturel n, il existe une solution de dimension $2^{2n+3} \times 2^{2n+3}$.*[4]

Démonstration. Par le théorème 4.2, il existe une solution pour 2^{2n}. En la composant avec celle de 8×8, on obtient une solution pour $2^{2n} \cdot 8 \times 2^{2n} \cdot 8 = 2^{2n+3} \times 2^{2n+3}$. □

Corollaire 4.4.1. *Pour tout naturel $n \neq 1$, il existe une solution de taille $2^n \times 2^n$.*

4.2 Multiples de 4

Tous les multiples de 4 peuvent être écrits comme un produit d'un nombre impair et d'une puissance supérieure à 2 de 2. On a vu, dans la section 2 qu'il existait une solution pour tout nombre impair. Par le corollaire 4.4.1, on sait qu'il en existe pour toute puissance supérieure à 2 de 2. De plus, par le lemme 3.5, s'il existe des solutions pour $m \times m$ et $n \times n$, il en existe pour $mn \times mn$. Ainsi, il existe une solution pour tous les multiples de 4.

4.3 Et le reste ?

Les nombres pairs non multiples de 4 résistent encore et toujours.. On s'aperçoit facilement qu'il n'y a pas de solution de dimension 2×2, mais ça se complique dés le 6×6. C'est d'ailleurs ce que le très célèbre mathématicien Leonhard Euler conjectura en 1782 dans son problème des 36 officiers :

> You're in command of an army that consists of six regiments, each containing six officers of six different ranks. Can you arrange the officers in a 6×6 square so that each row and each column of the square holds only one officer from each regiment and only one officer from each rank ?

4. Remarquons que ainsi, le cas 2×2 est exclus, mais toutes les autres puissances impaires de 2 sont incluses.

5 Annexe

5.1 Arithmétique modulaire

Théorème de Bézout

Soient a et b entiers. On peut écrire n comme combinaison linéaire de a et b ssi n est multiple de $\gcd(a, b)$.

Congruence

On dit que deux nombres a et b sont congrus modulo n ssi leur différence est multiple de n, i.e. ssi ils ont le même reste après division par n. On écrit $a \equiv b \pmod{n}$.

On a évidement certaines propriétés :

Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}, a \equiv c \pmod{n}$.

Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$, $\begin{cases} a + c & \equiv b + d \\ a - c & \equiv b - d \\ a \cdot c & \equiv b \cdot d \end{cases} \pmod{n}$.

Inverse

On défini l'inverse de a modulo n comme étant l'entier a^{-1} tel que $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Cela est équivalent à $aa^{-1} + kn = 1$ pour certains a^{-1}, k entiers. Par le théorème de Bézout, cela est possible ssi 1 est multiple de $\gcd(a, n)$, i.e. ssi $\gcd(a, n) = 1$. En d'autres termes, a possède un inverse modulo n ssi il est premier avec n.

Ensemble des entiers

Lorsqu'on travaille modulo n, $n \equiv 0,\ n + 1 \equiv 1,\ \dots$. On peut alors considérer que ces nombres sont égaux, et que les seuls nombres existant sont $0, 1, \dots, n - 1$. Dans ce cas, on travaille dans l'ensemble des entiers modulo n, $\{0, 1, 2, \dots, n - 2, n - 1\}$, dénoté $\mathbb{Z}_n$.

5.2 Injection, surjection et bijection

En mathématiques, les injections, les surjections et les bijections sont des fonctions qui se distinguent par la manière dont les arguments (expressions d'entrée du domaine) et les images (expressions de sortie du codomaine) sont liés l'un à l'autre.

Injectivité

Une fonction est injective ssi toute image a au plus un antécédent, i.e. est l'image d'au plus un élément du domaine. Formellement, on a $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ est injective ssi

$$\forall x,\ x' \in X : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Leftrightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

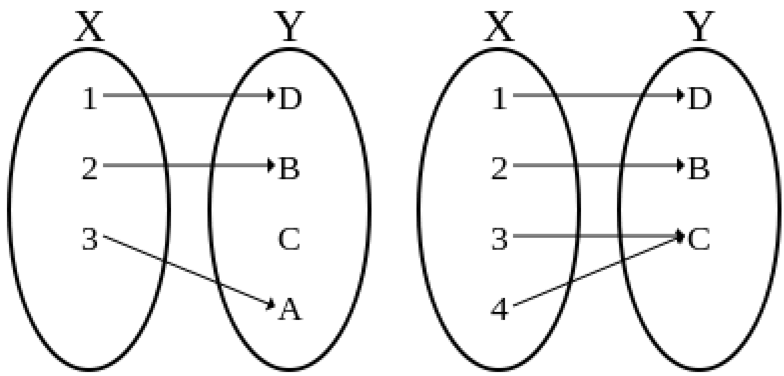


FIGURE 1 – *À gauche :* fonction injective. *À droite :* fonction non-injective.

On dit que f est une injection de X vers Y.

Surjectivité

Une fonction est surjective ssi toute image a au moins un antécédent, i.e. est l'image d'au moins un élément du domaine. Formellement, $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ est surjective ssi

$$\forall y \in Y, \exists x \mid f(x) = y.$$

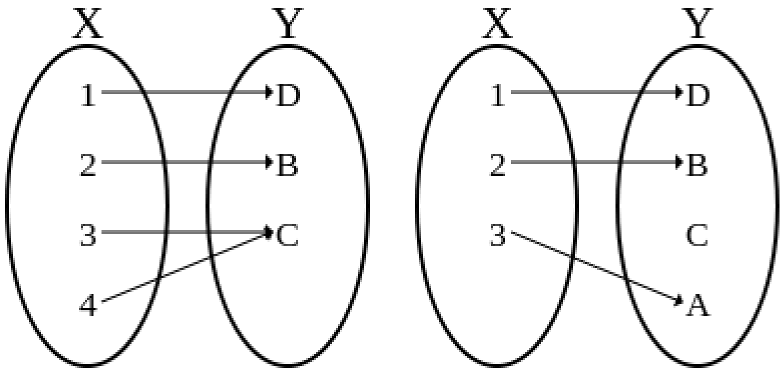


Figure 2 – *À gauche :* fonction surjective. *À droite :* fonction non-surjective.

On dit que f est une surjection de X vers Y.

Bijectivité

Une fonction est bijective ssi toute image a exactement un antécédent, i.e. est l'image d'exactement un élément du domaine. Par les définition d'injectivité et de surjectivité, on remarque qu'une fonction est bijective ssi elle est injective et surjective. De manière formelle, $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ est bijective ssi

$$\forall x,\ x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \text{ et } \forall y \in Y, \exists x \mid f(x) = y.$$

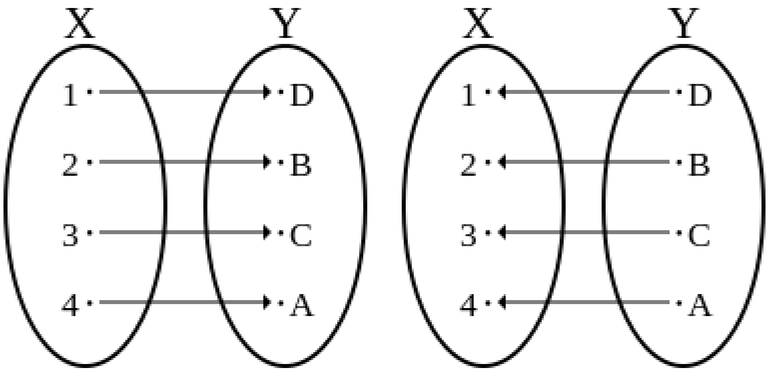


Figure 3 – Fonction bijective et son inverse.

On dit que f est une bijection de X vers Y. Lorsque f est bijective, on peut définir $f^{-1} : Y \to X, f(x) \mapsto x$, qui est aussi bijective.

Fractions égyptiennes

Laura Lambert, Thelma Lambert et Zoé Leroy

Élèves de 5^{e} et 6^{e} secondaire à
Athénée Royal Charles Rogier Liège 1

Avec l'aide de leurs enseignants
Yvan Haine et Eveline Moitroux.

et des chercheurs
Kevin Balhan et Christophe Dubussy (ULiège)

Résumé :

Cet article aborde les fractions égyptiennes. Il s'agit d'écrire toute fraction irréductible comme une somme de fractions dont tous les numérateurs sont égaux à 1, et dont les dénominateurs sont des naturels deux-à-deux distincts. Pour ce faire, les élèves présentent deux méthodes différentes : la première basée sur la formule

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q(q+1)},$$

la seconde sur un algorithme d'un type particulier, dit glouton. Elles abordent également la question de l'optimalité, en termes de nombre de fractions ou de taille des dénominateurs.

1 Présentation du sujet

Est-il possible de décomposer une fraction irréductible en une somme de fractions égyptiennes càd de fractions telles que les numérateurs sont égaux à 1 et les dénominateurs sont des naturels non nuls distincts ?

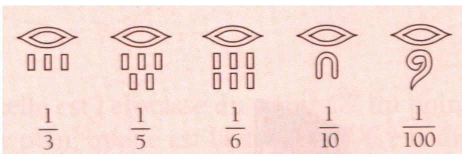
Autrement dit, étant donné une fraction $\frac{p}{q}$ où p et q sont des naturels tels que $1 < p < q$, peut-on écrire

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{l}$$

où m, n, l sont des naturels distincts ?

2 Pourquoi parle-t-on de fractions égyptiennes ?

Dans l'Antiquité, la numération égyptienne était basée sur les naturels, les fractions dont le numérateur est 1, ainsi que $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$; aucun symbole ne permettait de coder les autres fractions. Ainsi, tous les nombres rationnels étaient transformés en sommes de fractions dont le numérateur est égal à 1.



Cette technique permet de comparer des fractions aisément. Notamment, on voit que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{14} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Par conséquent, on a :

$$\frac{4}{7} < \frac{5}{8}.$$

De plus, on peut multiplier aisément par $\frac{2}{3}$ grâce à la formule :

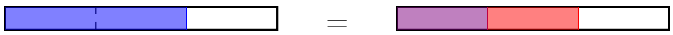
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}.$$

3 Première méthode

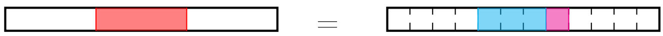
Dans un premier temps, nous avons traité des exemples visuellement et nous avons mis en évidence un premier algorithme.

3.1 Exemples

Si on décompose $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, les deux dénominateurs sont identiques.



Il faut donc décomposer $\frac{1}{3}$ comme suit.



Et on obtient $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$.

De manière plus générale, on sait que $\frac{p}{q}=p\cdot\frac{1}{q}$. Il faut donc pouvoir décomposer une fraction de type $\frac{1}{q}$.

Nous avons d'abord observé quelques exemples :

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$$

Ceux-ci nous ont suggéré une première formule qui permet une décomposition.

3.2 Décomposition

Nous proposons donc cette décomposition :

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}, \forall q\in\mathbb{N}_0,$$

qui se démontre aisément puisque

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}=\frac{q+1}{q(q+1)}=\frac{1}{q}.$$

3.3 Application de la formule

1. Cas où le numérateur de la fraction est égal à 2

$$\begin{aligned}\frac{2}{q} &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q}\\ &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}\end{aligned}$$

   Prenons un exemple :

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7+1}+\frac{1}{7(7+1)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}.$$

2. Cas où le numérateur de la fraction est égal à 3
   Il faut décomposer les fractions obtenues à plusieurs reprises pour que tous les dénominateurs soient distincts :

$$\begin{aligned}\frac{3}{q} &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}\\ &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}\\ &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}\\ &= \frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}+\frac{1}{q+2}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}\\ &\quad+\frac{1}{q(q+1)+1}+\frac{1}{q(q+1)[q(q+1)+1]}\end{aligned}$$

   Prenons un exemple :

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5(5+1)}+\frac{1}{5+2}+\frac{1}{(5+1)(5+2)}\\ &\quad+\frac{1}{5(5+1)+1}+\frac{1}{5(5+1)(5(5+1)+1)}\\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}+\frac{1}{31}+\frac{1}{930}\end{aligned}$$

Et ainsi de suite...

On peut donc conclure que toute fraction $\frac{p}{q}$ peut être décomposée en une somme de fractions dont le numérateur vaut 1. En ce qui concerne les dénominateurs, il semble qu'ils soient tous différents puisque les dénominateurs de la décomposition sont supérieurs à celui de la fraction de départ.

3.4 Nombre de termes de la décomposition

Est-il possible d'estimer le nombre de fractions dans la décomposition finale de

$$\frac{p}{q} = \underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p \text{ termes}} \quad ?$$

Le premier terme $\frac{1}{q}$ reste tel quel.
Le 2e terme $\frac{1}{q}$ se décompose en deux fractions.
Le 3e terme $\frac{1}{q}$ se décompose en deux fractions qui sont les mêmes que celles obtenues au terme précédent ; il faut donc décomposer chacune d'elles en deux autres, ce qui donne au total $2 \cdot 2 = 4$ fractions.

Et ainsi de suite $\cdots$

Par conséquent, le nombre de termes de la décomposition vaut

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{p-1} = 2^p - 1$$

car les termes de la somme sont les termes d'une suite géométrique de raison 2.

Le nombre de fractions de la décomposition dépend donc du numérateur initial. Ainsi si le numérateur de la fraction initiale vaut $p = 3$, la décomposition compte $2^3 - 1 = 7$ fractions. Et si $p = 10$, le nombre de fractions est $2^{10} - 1 = 1023$.

Le nombre de termes croît donc de manière très rapide !

Nous cherchons donc une méthode qui permettrait une décomposition comportant moins de termes.

4 Algorithme « glouton »

La méthode précédente a l'inconvénient de donner une décomposition avec un grand nombre de termes. On souhaite donc décomposer successivement les fractions en faisant intervenir la plus grande fraction de type $\frac{1}{x}$.

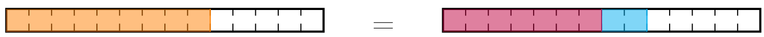
Observons l'algorithme de décomposition sur quelques exemples.

4.1 Exemples

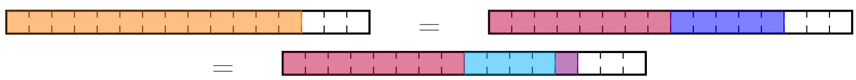
1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$.

   La plus grande fraction du type $\frac{1}{x}$ inférieure à $\frac{2}{3}$ est $\frac{1}{2}$ et on a $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.
2. Considérons la fraction $\frac{9}{14}$.

   La plus grande fraction du type $\frac{1}{x}$ inférieure à $\frac{9}{14}$ est $\frac{1}{2}$ et on a $\frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{2}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ après simplification.
3. Considérons la fraction $\frac{13}{16}$.
   La plus grande fraction du type $\frac{1}{x}$ inférieure à $\frac{13}{16}$ est aussi $\frac{1}{2}$ et on a $\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}$.

   Mais dans ce cas-ci, la fraction $\frac{5}{16}$ n'a pas la forme adéquate, elle doit être décomposée en faisant intervenir la plus grande fraction du type $\frac{1}{x}$ inférieure à $\frac{5}{16}$ qui est $\frac{1}{4}$.
   On a donc la décomposition suivante : $\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$.

4.2 Algorithme

Trouver la plus grande fraction

On considère la fraction irréductible initiale $\frac{p}{q}$ où $q > p > 1$.

On cherche la plus grande fraction $\frac{1}{x}$ inférieure à la fraction $\frac{p}{q}$ où x est un naturel supérieur à 1. Pour que la fraction soit la plus grande possible, il faut que x soit le plus petit possible. Quelle est alors la valeur de x ?

1. Effectuons d'abord la recherche sur un exemple.
   Supposons que $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$. On cherche le plus petit naturel x tel que $\frac{1}{x} < \frac{3}{4}$, ce qui équivaut à $x > \frac{4}{3}$.
   Dans ce cas-ci, le plus petit x possible est $2 = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 1$ et on a la décomposition $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \cdots$ où $\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{4}{3}$, soit 1.

2. Cas général
   On cherche le plus petit naturel x tel que $\frac{1}{x} < \frac{p}{q}$, ce qui équivaut à $x > \frac{q}{p}$.
   Ainsi, pour que x soit le plus petit possible, on prend $x = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + 1$.

Dans la suite, nous utilisons la notation de la partie entière.

Si y est un réel, $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à y.

Par conséquent, si y n'est pas un naturel, il est compris entre deux naturels consécutifs :

$$\lfloor y \rfloor < y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Décomposition

On considère la fraction irréductible initiale $\frac{p}{q}$ où $q > p > 1$ et on pose $x = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + 1$.

Par conséquent, on a

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{x} + \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} + \frac{px - q}{qx}.$$

Plusieurs cas se présentent en fonction de la forme de la 2$^{\text{e}}$ fraction de la décomposition.

1. Si $px - q = 1$: on a $\frac{p}{q} = \frac{1}{x} + \frac{1}{qx}$.
   Le problème est résolu car les numérateurs sont égaux à 1 et les dénominateurs sont différents puisque $qx \neq x$.
   C'est le cas rencontré dans l'exemple 1 : $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
2. Si $px - q \neq 1$ et si on peut simplifier la 2e fraction $\frac{px-q}{qx}$ et obtenir 1 au numérateur :
   le problème est aussi résolu comme c'est illustré dans l'exemple 2 :
$$\frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{4}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$$
3. Si $px - q \neq 1$ et si le numérateur n'est pas égal à 1 après simplification :
   on recommence le procédé de décomposition avec la 2e fraction en recherchant la plus grande fraction de type $\frac{1}{x}$ inférieure à celle-ci.
   C'est le cas de l'exemple 3 :
$$\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{5}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

Il est important de savoir si l'application de cet algorithme a toujours une fin !

Algorithme fini

Nous allons démontrer que le numérateur obtenu lors de la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ étape est un naturel strictement positif qui est inférieur à celui de l'étape précédente. Cela prouvera que la méthode a une fin.

Supposons qu'après n étapes, on ait
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{a}{b}$$
où $\dfrac{a}{b}$ est une fraction irréductible, $p, q, x_1, \ldots x_n, n, a, b \in \mathbb{N}_0$.

On pose $x = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + 1$ et on a
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{ax - b}{bx}.$$

Prouvons que $ax-b$ est un naturel non nul et que $ax-b<a$.

Le numérateur $ax-b$ est un entier puisque a, b et x sont naturels. Reste à démontrer $ax-b>0$.

Transformons cette inégalité :

$$\begin{aligned} a\left(\left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor+1\right)-b>0 \quad &\Leftrightarrow a\left(\left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor+1\right)>b \\ &\Leftrightarrow \left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor+1>\frac{b}{a} \end{aligned}.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $\lfloor y\rfloor<y<\lfloor y\rfloor+1$ pour tout y non entier, donc la première l'est aussi.

Enfin prouvons que $ax-b<a$.

Transformons cette dernière inégalité :

$$\begin{aligned} ax-b<a \quad &\Leftrightarrow a\left(\left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor+1\right)-b<a \quad &&\Leftrightarrow a\left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor+a-b<a \\ &\Leftrightarrow a\left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor<b &&\Leftrightarrow \left\lfloor\frac{b}{a}\right\rfloor<\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Puisque cette dernière inégalité est vraie, la première l'est aussi.

Par conséquent, on déduit que le numérateur est un naturel strictement positif qui décroît à chaque étape. Il sera donc égal à 1 au bout d'un nombre fini d'étapes qui est inférieur ou égal à p.

Par conséquent, le nombre de fractions de la décomposition est inférieur au numérateur initial.

Malgré quelques simulations, nous n'avons pas trouvé de formule permettant de déterminer le nombre de termes de la décomposition au préalable.

Programme

Pour guider notre recherche, nous avons implémenté cet algorithme sur notre calculatrice, ce qui nous a permis d'effectuer plusieurs simulations et observations.

```
Define fractions()=
Prgm
Request "p0",p0
Request "q0",q0
p :=p0
q :=q0
n :=0
liste :={}
While p0 ≠ 1
n :=n+1
d :=iPart(((q0)/(p0)))+1
liste :=augment(liste,d)
p0 := p0 · d − q0
q0 := q0 · d
g :=gcd(p0,q0)
If g ≠ 1 Then
p0 :=((p0)/(g))
q0 :=((q0)/(g))
EndIf
If p0=1 Then
liste :=augment(liste,q0)
EndIf
EndWhile
n :=n+1
Disp p,"/",q,"="
For i,1,n
Disp "1/",liste[i],"+"
EndFor
Disp "Nombre de fractions",n
End Prgm
```

4.3 Efficacité de l'algorithme glouton

Malheureusement, en faisant quelques essais, nous avons découvert que cette méthode n'est pas la plus efficace. En effet, pour certaines fractions, il existe une décomposition qui fait intervenir moins de fractions et des dénominateurs plus petits que ceux trouvés par l'algorithme « glouton ».

Considérons la fraction $\frac{19}{20}$. L'algorithme glouton décompose cette fraction en 4 fractions dont le plus grand dénominateur est 180 :

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180},$$

alors qu' on a trouvé une décomposition en 3 fractions dont le plus grand dénominateur est 5 :

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

5 Conclusion

5.1 Comparaison des deux algorithmes envisagés

Le premier algorithme est plus simple à implémenter que le 2e. Mais il donne une décomposition dont le nombre de termes et les dénominateurs peuvent être très grands.

On peut se demander ce qu'on entend par méthode optimale. Est-ce celle qui fait intervenir les plus petits dénominateurs ou celle qui donne le nombre de fractions minimal ?

5.2 Pistes de recherche à poursuivre

— Dans quels cas l'algorithme glouton n'est-il pas optimal ?
— Dans les simulations de l'algorithme glouton, on a observé que le dernier dénominateur est le PPCM de tous les autres sauf quand on a dû simplifier une fraction comme dans l'exemple 2. Est-ce toujours vrai ? Est-ce utile pour découvrir un autre algorithme ?
— Pourrait-on trouver un autre algorithme en exploitant la relation suivante ?

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$$

1. soit $m + n = p$ et $mn = q$: on trouve m et n mentalement ou avec une équation du second degré

2. soit $(m + n)$ multiple de p et (mn) multiple de q : résolution inconnue.

— Pourrait-on trouver la forme des fractions s'écrivant comme une somme de 2 fractions égyptiennes ?
— Est-il possible d'imposer une condition supplémentaire pour que la décomposition soit unique ?

Les tours de Hanoï

Gilles Defresne, Léa Lo Manto, Laura Tialans et Claire Neuttiens

Élèves de 1^{e} et 3^{e} secondaire au Collège Saint-Benoît Saint-Servais de Liège

Avec l'aide de leurs enseignants Xavier Heeren et Romain Sourdeau

et des chercheurs Stéphanie Aerts, Céline Esser, Zyed Hamdi et Julien Raskin (ULiège)

Résumé :

Dans cet article, les élèves étudient le célèbre jeu des « tours de Hanoi » qui consiste à déplacer n disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée, en s'aidant d'une tour intermédiaire et en un minimum de coups. Les disques sont initialement empilés par diamètre décroissant (le plus grand se trouve en bas) et les déplacements doivent respecter deux règles :

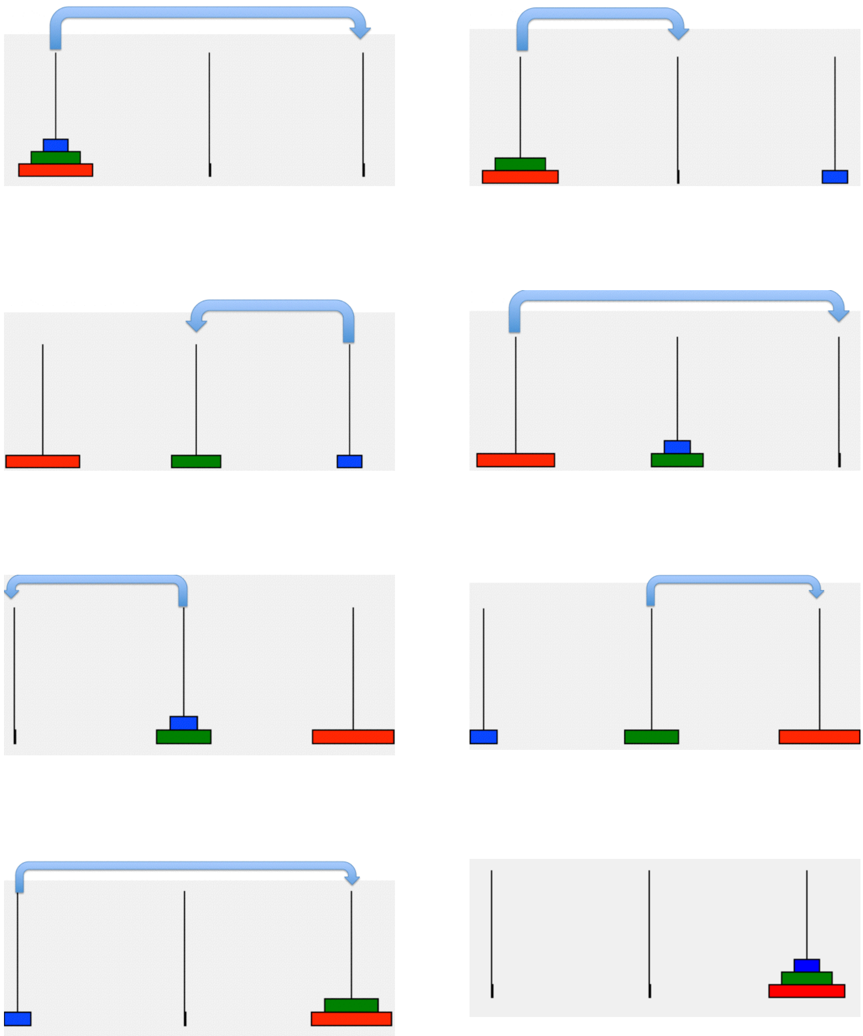
- *on ne déplace qu'un disque à la fois ;*
- *on ne peut placer un disque que sur un autre disque dont le diamètre est plus grand, ou sur un emplacement vide.*

En utilisant une preuve par récurrence, les élèves démontrent que le nombre de déplacements nécessaires est exactement égal à $2^n - 1$.

Voici le célèbre jeu "Les tours de Hanoï" revisité par des apprentis mathématiciens :

Sur un plateau sont dressés trois piquets. Une pile de disques est empilée sur le premier, du plus grand au plus petit. Le but du jeu est d'amener la pile sur le dernier piquet en respectant les deux règles suivantes :
— déplacer un seul disque à la fois ;
— ne jamais poser un disque plus grand sur un plus petit.

Exemple avec trois disques



On remarque que nous sommes parvenus à déplacer les 3 disques en 7 coups.

Combien de coups pour gagner : observations

Après plusieurs essais-erreurs, nous obtenons les résultats suivants :

Nombre de disques (n)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Nombre de coups	**1**	**3**	**7**	**15**	**31**	**63**	**127**

On constate que, pour n disques, le nombre de coups nécessaires semble être $2^n - 1$. Tentons de démontrer que cette formule est vraie quelque soit le nombre de disques.

Démonstration par récurrence

Réfléchissons par récurrence.

Commençons par envisager le cas de base : pour déplacer un disque, il ne nous faut qu'un seul coup. Ce nombre de coups est minimal (évident).

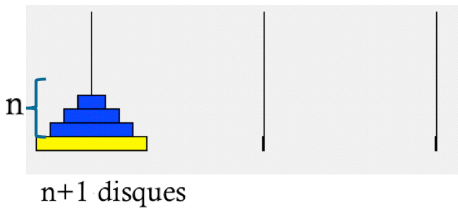
Nous allons maintenant démontrer que, si la formule est vraie pour n disques, elle l'est aussi pour $n + 1$ disques et que ce nombre de coups est minimal. Si pour déplacer n disques, il faut $2^n - 1$ coups, alors nous démontrons que pour en déplacer $n + 1$, il faut $2^{n+1} - 1$ coups.

<u>Hypothèses :</u> 1) On peut déplacer une pile de n disques en $2^n - 1$ coups ;
2) Ce nombre de coups est minimal.

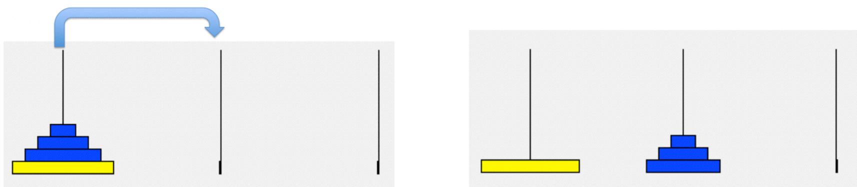
<u>Thèses :</u> On peut déplacer une pile de $n + 1$ disques en $2^{n+1} - 1$ coups et ce nombre reste minimal.

Démonstration :

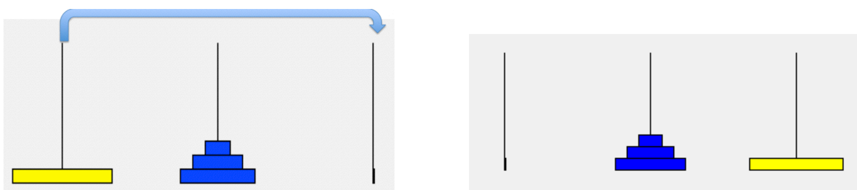
Considérons la tour formée de n disques bleus et 1 disque jaune en dessous.



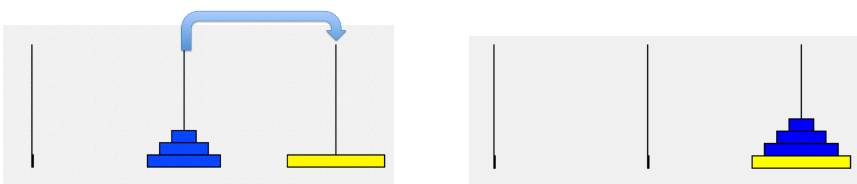
Par l'hypothèse 1, il faut $2^n - 1$ coups pour déplacer la pile des n disques bleus :



Il faut 1 coup pour déplacer le disque jaune, soit un total de $2^n - 1 + 1 = 2^n$ coups :



Pour à nouveau déplacer la pile de n disques bleus, il nous faut $2^n - 1$ coups (par hypothèse 1), soit un total de $2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$:



Puisque la formule s'applique pour 1 disque, alors elle s'applique pour 1+1, donc 2 disques, puis 2+1, donc 3 disques, etc.

On pourrait se demander pourquoi ce nombre de coups est minimal et si on ne pourrait pas trouver une solution plus rapide en utilisant une méthode différente. Toutefois, en y regardant de plus près, on constate qu'il est *impossible* de déplacer le disque jaune sans avoir au préalable déplacé la pile bleue.

De plus, parmi les trois piquets, un doit être laissé libre pour pouvoir soulever le jaune et un autre doit être laissé libre pour le poser. On doit donc déplacer la pile sur le piquet restant, *en un seul morceau*. Par hypothèse 2), ceci prend au *minimum* $2^{n+1} - 1$ coups. Comme il est évident que 1 disque prend au minimum 1 coup, la récurrence ci-dessus s'applique pour déterminer le nombre minimal de coups.

À noter que cette démonstration n'est à priori valable que pour 3 piquets puisque, pour un nombre supérieur, on peut répartir la pile bleue sur plusieurs piquets différents, et on peut alors trouver une méthode plus rapide.

Conclusion

Avec un jeu comportant 3 piquets, il est toujours possible de déplacer une pile de n disques en $2^n - 1$ coups.

Par récurrence, nous avons démontré que cette formule s'applique quel que soit le nombre de disques, et que ce nombre de coups est bien minimal.

On peut se demander ce qu'il adviendrait de cette formule avec un plateau comportant 4 piquets... ou n piquets !

On pourrait aussi trouver des stratégies pour être certains de gagner.

Nous avons pensé, par exemple, que lorsqu'on joue avec un nombre pair de disques, il faut placer le tout premier disque sur le deuxième piquet. Ou encore que lorsqu'on joue avec un nombre impair de disques, il faut placer le tout premier disque sur le troisième piquet.

Multiplications en chaîne

Davan Chiem Dao et Eloi Collette

Élèves de 6ᵉ secondaire au
Collège Sainte-Véronique de Liège

Avec l'aide de leurs enseignants
Anne Lacroix, Sébastien Kirsch et Sandrine Schieres

et des chercheurs
Julien Leroy, Adeline Massuir et Stéphanie Tixhon (ULiège)

Résumé :
Cet article traite de la persistance *des nombres. Pour tout entier* $x \geq 0$, $f(x)$ *est l'entier obtenu en multipliant les chiffres de* x *lorsque* x *est écrit en base 10. La* persistance *de* x *est alors le nombre* $p(x)$ *d'itérations nécessaires de ce processus pour obtenir un nombre entre* 0 *et* 9*. Plus précisément, il s'agit du plus petit entier* n *tel que*

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots f}_{n \text{ fois}}(x) \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Dans l'article, les élèves démontrent que si x *est plus grand que* 10*, alors* $f(x)$ *est strictement inférieur à* 10*, rendant* $p(x)$ *bien défini. Ils étudient ensuite la persistance de tous les entiers inférieurs à* 10^7 *et recherchent des conditions nécessaires et suffisantes pour que* $f^{p(x)}(x)$ *soit un chiffre fixé.*

1 Présentation du sujet

La "multiplication en chaîne" consiste à multiplier entre eux les chiffres qui constituent un nombre entre eux, puis à multiplier entre eux les chiffres qui constituent le résultat de la première multiplication, puis à multiplier entre eux les chiffres qui constituent le résultat de la deuxième multiplication, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un résultat compris entre 0 et 9. Lorsque le résultat est dans cet intervalle, on dit que la multiplication en chaîne est *complète*.

Par exemple, la multiplication en chaîne pour le nombre 4916783 est la suivante :

$$\begin{aligned} 4 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 &= 36228 \\ 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 &= 576 \\ 5 \cdot 7 \cdot 6 &= 210 \\ 2 \cdot 1 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Il faut donc 4 étapes pour compléter la multiplication en chaîne de 491678. De même, la multiplication en chaîne pour le nombre 953 est la suivante :

$$\begin{aligned} 9.5.3 &= 135 \\ 1.3.5 &= 15 \\ 1.5 &= 5 \end{aligned}$$

Il faut donc 3 étapes pour compléter la multiplication en chaîne de 953.

Voici les deux questions qui nous ont été posées :
- Démontrer que le produit des chiffres qui composent un nombre est toujours plus petit que le nombre de départ.
- Combien d'étapes sont nécessaires pour compléter une multiplication en chaîne ?

2 Résultats obtenus

Nous avons démontré que le produit des chiffres qui composent un nombre est toujours plus petit que ce nombre. Nous allons démontrer le théorème suivant dans la suite de l'article :

Théorème 1. *Le produit des chiffres qui composent un nombre est toujours plus petit que ce nombre.*

Nous avons établi une méthode pour déterminer le nombre d'étapes pour les 10^7 premiers naturels.

3 Détails des résultats

3.1 Preuve du théorème 1

Hypothèses :
Prenons $n \in \mathbb{N}_0$.
Considérons $a \in \mathbb{N} \cap [0; 10^{n+1} - 1]$.
Soit c_0 , le chiffre de l'unité de a,
Soit c_1 , le chiffre de la dizaine de a,
...
Soit c_{n-1} , le 2ème chiffre de a,
Soit c_n , le 1er chiffre de a, avec $c_n \neq 0$,
Tels que $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ avec $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Thèse :
$c_n \cdot c_{n-1} \cdots c_1 \cdot c_0 \leq a$.

Démonstration :
Par hypothèses $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_0 \cdot 10^0$.

Dès lors, il suffit de prouver :

$$\begin{aligned}
& c_n \cdot c_{n-1} \cdot \cdots \cdot c_0 \leq c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_0 \cdot 10^0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{c_n \cdot c_{n-1} \cdots c_0}{c_n} \leq \frac{c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_0 \cdot 10^0}{c_n} \\
\Leftrightarrow \quad & c_{n-1} \cdots c_0 \leq 10^n + \frac{c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + c_0 \cdot 10^0}{c_n}
\end{aligned}$$

Or, le produit $c_{n-1} \cdots c_1 \cdot c_0$ vaut au maximum 9^n car $c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0 \in [0; 9]$.

De plus, $\frac{c_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+c_1\cdot 10^1+c_0\cdot 10^0}{c_n} \geq 0$ car le quotient d'une somme de nombres positifs par un nombre positif non nul est positif.

Donc, on a $c_{n-1}\cdots c_1 \cdot c_0 \leq 9^n \leq 10^n \leq c_n \cdot 10^n + c_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ car $9^n \leq 10^n$ est toujours vrai si $n \in \mathbb{N}_0$.

Donc, $c_{n-1}\cdots c_1 \cdot c_0 \leq a$, ce qui termine la preuve du théorème.

3.2 Analyse pour les 10^7 premiers naturels

Pour tenter de comprendre les facteurs qui influencent les nombres d'étapes, nous avons créé un tableau Excel qui effectue la multiplication en chaîne des 10 7 premiers naturels.

Ensuite, nous avons compté le nombre de fois où une multiplication en chaîne complète se termine en 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Autrement dit, nous avons compté le nombre de fois où nous arrivons à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 à la fin de la multiplication en chaîne pour 10^7 premiers naturels. Nous avons constaté qu'il y a plus de récurrence en 0 puis 6 puis 8 puis 2 puis 4 puis 5 puis 9 puis 3 et 7 égaux puis 1. Nous avons aussi remarqué que plus nous augmentons le nombre de chiffres qui forment le nombre de départ, plus le nombre d'étapes maximum augmente.

3.3 Conditions nécessaires et/ou suffisantes pour atteindre un nombre

Nous avons analysé la multiplication en chaîne pour les 10.000.000 premiers naturels et en avons tiré les six conclusions suivantes.

Conclusion 1. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 1, est que tous les chiffres du nombre de départ soient 1 car 1 est un élément neutre de la multiplication. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète.

Cette condition est aussi nécessaire, pour qu'elle soit prouvée, il faudrait prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 implique au moins un facteur plus grand que 9. Dès lors, il est impossible d'obtenir ce produit uniquement avec un produit de chiffres. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1.

Par exemple, on a :
$111 = 3 \cdot 37$,   37 étant un nombre premier supérieur à 9.
$1111 = 11.101$,   11 et 101 étant des nombres premiers supérieurs à 9.

Conclusion 2. Voici deux conditions suffisantes pour que le produit final soit égal à 0 :

— Il existe au moins un 0 parmi les chiffres du nombre de départ. La multiplication sera complète en une étape.
  Exemple : 370, on a $3 \cdot 7 \cdot 0 = 0$.
— Il existe au moins un 5 et un chiffre pair parmi les chiffres du nombre de départ. La multiplication sera complète en deux étapes.
  Exemple : 8315, on a $8 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 120$ puis $1 \cdot 2 \cdot 0 = 0$.

Conclusion 3. Une condition nécessaire pour que le produit final soit égal à 5, est qu'il existe au moins un 5 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres du nombre de départ soient impairs.

Cette condition n'est pas suffisante car il existe un contre-exemple : pour 55, on a $5 \cdot 5 = 25$, puis $2 \cdot 5 = 10$ et enfin $1 \cdot 0 = 0$.

Conclusion 4. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 3, est qu'il existe un et un seul 3 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1 et d'une seul fois le chiffre 3.

Cette condition est aussi nécessaire, et pour qu'elle soit prouvée, il faudrait prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 et d'un seul 3 implique au moins un facteur plus grand que 9.

Par exemple, on a :
$1113 = 3 \cdot 7 \cdot 53$,   53 étant un nombre premier supérieur à 9.
$1311 = 3 \cdot 19 \cdot 23$,   23 étant un nombre premier supérieur à 9.

Conclusion 5. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 7, est qu'il existe un et un seul 7 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète.

Cette condition est également nécessaire. Sa démonstration implique de prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 et d'un seul 7 implique au moins un facteur plus grand que 9. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1 et d'une seul fois le chiffre 7.

Par exemple, on a :

$171 = 3 \cdot 57$,	57 étant un nombre premier supérieur à 9.
$111711 = 3 \cdot 23 \cdot 1619$,	23 et 1619 étant premiers et supérieurs à 9.

Conclusion 6. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 9, est qu'il existe un et un seul 9 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1 ou qu'il n'y ait que deux fois le chiffre 3 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète.

Cette condition est aussi nécessaire. Pour la démontrer, il faudrait prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 et d'un seul 9, ou du chiffre 1 et de strictement deux fois le chiffre 3, implique au moins un facteur plus grand que 9. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1 et d'une seul fois le chiffre 9 ou un nombre formé uniquement du chiffre 1 et de 2 fois le chiffre 3.

Par exemple, on a :

$9111 = 3 \cdot 3037$,	3037 étant un nombre premier supérieur à 9.
$131131 = 7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}131$,	11, 13 et 131 étant premiers et supérieurs à 9.

3.4 "Arbres" de la multiplication en chaîne

Comme dit précédemment, nous avons remarqué que plus nous augmentons le nombre de chiffres qui forment le nombre de départ, plus le nombre maximum d'étapes augmente. Mais nous avons remarqué que les nombres qui formaient ces étapes, appelé nombre à l'étape, variaient rarement. Nous avons donc décidé de les classer grâce à des "arbres". Nous avons placé dans ces arbres uniquement les nombres à l'étape et non les nombres de départ. Ces arbres sont donnés à la fin de l'article.

Par exemple, pour l'arbre de 5, nous sommes certains (pour les nombres allant jusqu'à 10^7) que pour que la multiplication en chaîne fasse 5, l'étape précédente sera 15. Jusqu'à 10^7 , nous pouvons donc affirmer que 51 n'est jamais l'étape précédant 5, étant donné que nous avons effectué la multiplication en chaîne pour tous les nombres. Pour tous les "arbres", les branches sortant d'un nombre sont les seules à exister, d'après notre tableau Excel.

Nous pouvons donc grâce à ces arbres déterminer le nombre d'étapes nécessaires pour compléter la multiplication en chaîne. Il est égal au niveau dans l'un des arbres du nombre à l'étape auquel nous arrivons après la première multiplication.

Par exemple, si nous arrivons à 729 après la première multiplication, on observe qu'il est au 4ème niveau dans l'arbre de 2. Le nombre d'étapes du nombre de départ vaut donc 4.

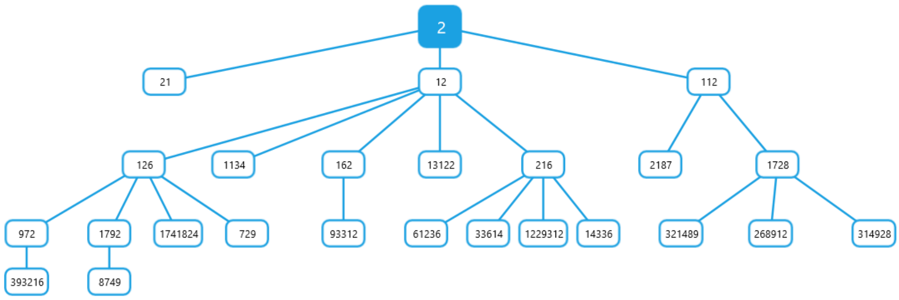
4 Conjecture

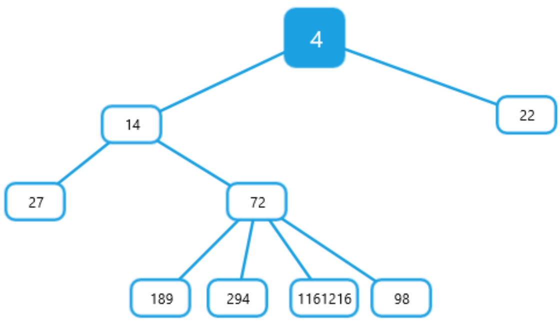
Nous pensons que plus le nombre de chiffres qui forment le nombre de départ est grand, plus le nombre d'étapes maximum peut être grand. Donc, il serait possible d'avoir un nombre infiniment grand d'étapes pour un nombre infiniment grand.

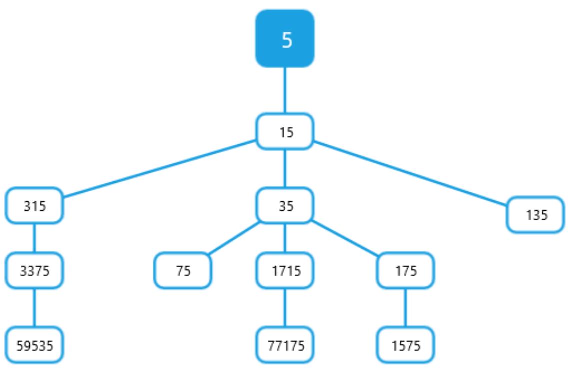
Remerciements

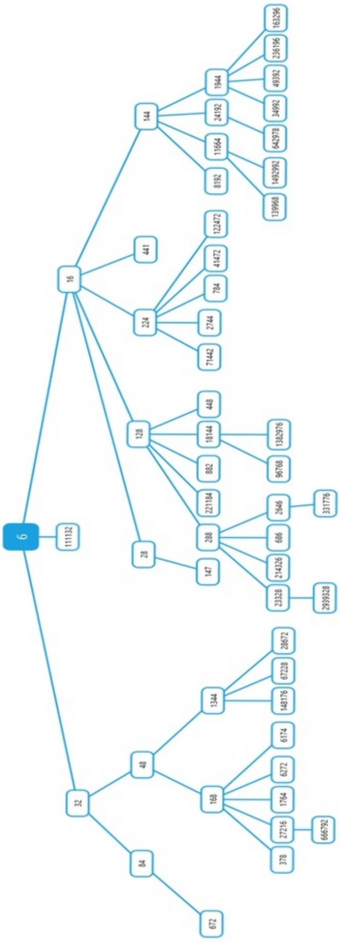
Nous remercions chaleureusement nos trois professeurs, Mesdames Lacroix et Schieres, et Monsieur Kirsch, qui nous ont aidés à avancer dans nos recherches et donnés un avis extérieur sur le travail réalisé à domicile, et ce, toutes les semaines. Nous remercions aussi les chercheurs de l'ULg, Mesdames Massuir et Tixhon, et Monsieur Leroy, pour leurs suggestions.

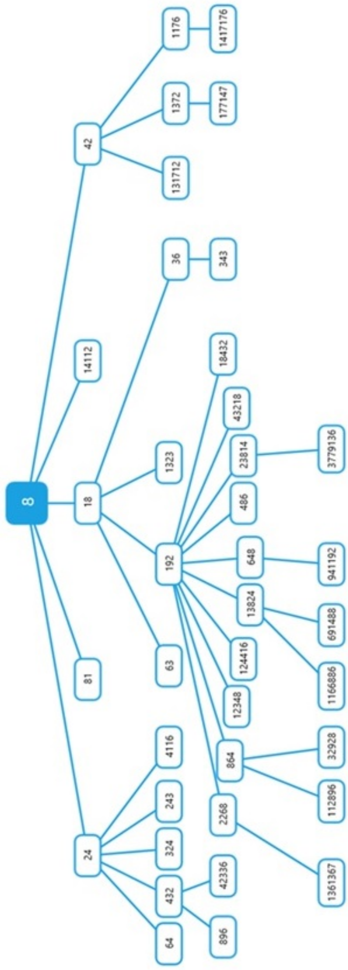

1
3
7
9


2
21
12
112
126
1134
162
13122
216
2187
1728
972
1792
1741824
729
93312
61236
33614
1229312
14336
321489
268912
314928
393216
8749


4
14
22
27
72
189
294
1161216
98


5
15
315
35
135
3375
75
1715
175
59535
77175
1575


6
111132
32
16
84
48
28
128
224
441
144
672
168
1344
147
288
221184
882
18144
448
71442
2744
784
41472
122472
8192
11664
24192
1944
378
27216
1764
6272
6174
148176
67228
28672
23328
214326
686
2646
96768
1382976
139968
1492992
642978
34992
49392
236196
163296
666792
2939328
331776


8
24
81
18
14112
42
64
432
324
243
4116
63
192
1323
36
131712
1372
1176
896
42336
2268
864
12348
124416
13824
648
486
23814
43218
18432
343
177147
1417176
1361367
112896
32928
1166886
691488
941192
3779136

N carrés

Lucas Prieels et Sam Vanhamme

Élèves de 4e secondaire au
Collège Don Bosco de Woluwe-Saint-Lambert

Avec l'aide de leurs enseignantes
Céline Serta et Ingrid Demulder-t'Kindt

et des chercheurs
Émilie Clette et Yvik Swan (ULiège)

Résumé :

Dans cet article, les élèves tentent d'évaluer le nombre $B(n)$ de formes « à la tétris » que l'on peut créer avec n carrés de coté 1. Ils ont également considéré le nombre $A(n)$ de tels formes à symétrie et rotation près. Afin de confronter leurs intuitions, ils ont conçu algorithme (disponible en ligne), permettant de calculer $A(n)$ et $B(n)$. Afin d'estimer la vitesse de croissance des deux suites A et B, ils s sont affranchi de l'aspect géométrique du problème en considérant une troisième suite $(C(n))_n$ minorant $(B(n))_n$ et définie récursivement à l'aide d'une fonction « dec » de leur invention. Un autre algorithme (lui aussi disponible en ligne) permet de calculer $C(n)$. Enfin, ils sont parvenu à démontrer par récurrence que $B(n) \geq 2^{n-1}$ pour tout n.

1 Introduction

1.1 Problème

Le problème que nous avons choisi est le suivant : "Combien peut-on former d'objets avec n carrés ?". Certaines des notions utilisées comme le symbole-somme sigma ($\sum$) ou la récursivité seront expliquées en annexe pour ne pas atténuer la lisibilité des preuves. Les listes complètes de formes seront aussi proposées dans les annexes.

1.2 Conventions

Nous avons adopté quelques conventions que nous allons expliciter ici : premièrement, assez logiquement, $n \in \mathbb{N}^*$ [5]. En effet, nous ne pouvons pas créer d'objets avec un nombre non-naturel de carrés. Deuxièmement, tous les carrés composant les objets seront de même taille. Troisièmement, l'objet ainsi obtenu sera en un seul tenant. Quatrièmement, les carrés devront se toucher par un côté entier. Ensuite, nous manipulerons les objets ainsi définis avec des rotations et des symétries. Nous ne considérerons que des rotations d'amplitudes multiples de 90°.
Toutes les figures sont faites avec le logicel libre GeoGebra.

2 Dénombrement

2.1 Rotations et symétrie

Nous pouvons nous demander si deux formes équivalentes [6] par une rotation et/ou une symétrie sont considérées comme identiques ou non.
Par exemple, les deux formes représentées à la figure 4 sont-elles identiques ?

Nous avons répondu à cette question en nous disant que la meilleure manière d'aborder le dénombrement de ces formes est de traiter les deux

5. $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}_0$ sont deux écritures équivalentes pour représenter l'ensemble des entiers naturels non nuls.

6. Deux formes seront considérées comme "équivalentes"si appliquer une rotation et/ou une symétrie sur la première donne la deuxième.

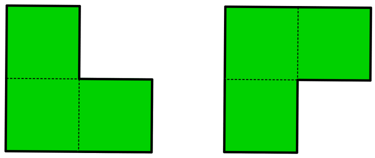


FIGURE 4 – Deux des formes de taille 3

cas possibles : celui on nous faisons intervenir les rotations et les symétries et celui ou nous ne le faisons pas.

2.2 À la main

Ainsi, nous avons commencé par essayer toutes les configurations de carrés une à une à la main pour calculer les premiers nombres de deux suites, : une suite A avec les formes basiques, et une suite B avec les rotations et symétries. Notons A_n le $n$ème élément de la suite A et B_n le $n$ème élément de la suite B.

Voici les premiers nombres formant les suites A et B.

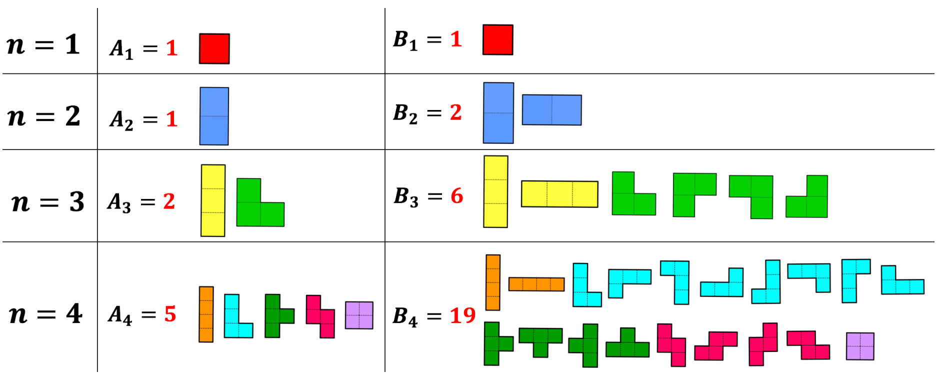


FIGURE 5 – Liste des premières formes

Nous espérions trouver une suite arithmétique, géométrique ou périodique, mais ce ne fut pas le cas.

2.3 À l'ordinateur

Voyant que nous ne pouvions pas continuer à la main indéfiniment car trop fastidieux, nous avons décidé d'écrire un programme informatique de près de 700 lignes en C++ disponible à l'adresse suivante :
`https://github.com/Lucas31415/MeJ/blob/master/main.cpp`

Cela nous a aidé à calculer plus de nombres pour les deux suites :

Suite A : 1, 1, 2, 5, 12, 35, 108, 369

Suite B : 1, 2, 6, 19, 63, 216, 760, 2725

2.4 Algorithme

Un algorithme est une suite d'instructions qui sont, dans notre cas, réalisées par un ordinateur.

L'algorithme que nous avons écrit est relativement simple. Il faut donner à l'ordinateur en *input* toutes les formes de taille n. Le programme va alors regarder tous les endroits où il pourrait ajouter un carré de façon à ce que la forme obtenue soit en un seul tenant. Il va à chaque fois stocker en mémoire cette nouvelle forme. L'ordinateur va ensuite comparer toutes les formes stockées pour retirer celles qui sont en doubles. Dans le cas de la suite A, il va faire une étape supplémentaire qui consiste à comparer également les formes équivalentes par rotations et/ou symétries. Cette étape supplémentaire n'est pas une étape si simple et même pour l'ordinateur, elle est très longue. C'est pourquoi nous avons pu calculer un nombre en plus dans la suite B. Le programme va finalement imprimer en *output* le nombre de formes de taille $n+1$, suivi par toutes ces formes. Nous pourrons ensuite les redonner à l'ordinateur en *input* afin de récupérer les formes de taille $n+2$, etc. Mais notre algorithme ayant une complexité beaucoup trop grande, nous ne sommes pas arrivés à calculer plus de nombres des suites A et B. Nous n'avons malheureusement pas trouvé de formule, ni explicite, ni de récurrence.

Axiome

Notre première constatation a été que, pour tout n, $A_n \leq B_n$. En effet, toutes les formes de A se retrouvent évidemment dans B. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \leq B_n$.

Conjectures

La première conjecture que nous avons trouvée est la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \neq 3, \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} > \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

Autrement dit, nous devons multiplier A_n par un nombre de plus en plus grand pour obtenir A_{n+1}. La seule exception, sans que nous sachions pourquoi, est que si $n = 3$, l'inégalité n'est pas vérifiée : $\frac{12}{5} \not> \frac{5}{2}$.

Notre deuxième conjecture est très similaire à la première mais avec B :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{B_{n+2}}{B_{n+1}} > \frac{B_{n+1}}{B_n}$$

Cela veut dire la même chose que la première, mais pour la suite B. En revanche, il n'y a cette fois pas d'exception.

Résultat

Proposition 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \leq 8 \times A_n$. Cela signifie que chacune des formes de la suite A peut se retrouver au maximum 8 fois dans la suite B.

Démonstration. Nous remarquons que chaque forme de base de la suite A peut donner 4 images par rotation (de 0, de 90°, de 180° et de 270°). Nous pouvons aussi prendre une symétrie orthogonale de la forme de A et lui appliquer 4 nouvelles rotations de même amplitudes. Cela nous donne donc $4 + 4 = 8$ images différentes d'une seule forme de base, et il n'existe pas d'autres transformations du plan qui donnerait de nouvelles images. Chacune des formes de A peut donc donner au maximum 8 formes dans

B. Ce ne sera pourtant pas toujours le cas ! Nous pouvons par exemple citer le cas du carré, dont toutes les images que nous venons de citer sont identiques.

3 Borne inférieure

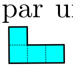
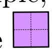
Nous avons cherché ensuite une manière de calculer une estimation de A_n et B_n. Pour cela, nous avons pensé à un concept de "borne inférieure". Le principe est simple : il faut trouver une suite C, qui sera plus facile à calculer, de façon à ce que $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n \leq B_n$.

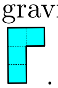
3.1 Décompositions

Nous avons pensé à faire des décompositions de nombre. Définissons C_n comme le nombre de sommes dont le total vaut n à commutativité près, c'est à dire de façon à ce que les nombres forment une suite décroissante. Par exemple, pour le nombre 4, nous pouvons l'écrire sous les formes suivantes :

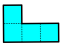
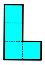
$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Le nombre de sommes dont le total vaut 4 à commutativité près est 5. Autrement dit, $C_4 = 5$

Pour faire le lien avec nos formes composées de carrés, il faut se rendre compte que nous pouvons remplacer chaque terme de la somme par une colonne de carrés. Par exemple, la somme $2 + 1 + 1$ peut s'écrire  et la somme $2 + 2$ peut s'écrire .

Cela signifie qu'en utilisant ce principe, nous aurons quelques-unes des formes de B_n, mais pas toutes. En effet, nous aurons seulement les formes qui "subissent la gravité" en quelque sorte. Nous n'aurons donc pas de formes de ce type . Cela signifie que nous obtiendrons dans la suite C certaines de formes de la suite B mais pas toutes. Autrement dit,

$$C_n \leq B_n$$

En revanche, il suffit de citer par exemple les formes obtenues par 2+1+1  et 3+1  qui sont images l'une de l'autre pour se convaincre que $C_n \not\leq A_n$.

3.2 Fonction *dec*

Nous avons voulu à nouveau écrire un programme informatique qui calculerait C_n. Pour cela nous avons dû définir la fonction *dec* qui prend deux arguments : la somme des termes et le nombre de termes. Autrement dit $dec(a, b)$ est le nombre de sommes de b termes dont le total est a, à commutativité près.
Par exemple, $dec(7, 4) = 3$ car $7 = 4+1+1+1 = 3+2+1+1 = 2+2+2+1$.

Plus précisément, $dec(a, b)$ est le nombre d'ensembles $\{x_1, \ldots, x_b\} \subset \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 + x_2 + ... + x_b = a$, ou encore $\sum\limits_{i=1}^{b} x_1 = a$.

3.3 Algorithme

Nous avons alors écrit un algorithme récursif [7], dont le principe est expliqué en annexe, assez simple, mais dont la preuve est compliquée.

Proposition 2. $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, dec(a, b) = dec(a-1, b-1) + dec(a-b, b)$

Démonstration. Par définition, $dec(a, b)$ est le nombre d'ensembles

$$\{x_1, x_2, ..., x_b\} \subset \mathbb{N}^*$$

tels que $x_1 + x_2 + ... + x_b = a$. Pour tout ensemble répondant à ces conditions, nous avons deux possibilités. Soit $1 \in \{x_1, x_2, ..., x_b\}$, soit $1 \notin \{x_1, x_2, ..., x_b\}$.
Notons $dec_{avec1}(a, b)$ le nombre d'ensembles $\{x_1, x_2, ..., x_b\} \subset \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 + x_2 + ... + x_b = a$ et qui contiennent 1. Notons également $dec_{sans1}(a, b)$ le nombre d'ensembles $\{x_1, x_2, ..., x_b\} \subset \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 + x_2 + ... + x_b = a$ et

7. Un algorithme récursif est un algorithme qui utilise une ou plusieurs fonctions récursives. La récursivité sera expliquée plus en détails en annexes.

qui ne contiennent pas de 1. Nous avons donc $dec(a,b) = dec_{avec1}(a,b) + dec_{sans1}(a,b)$.
Montrons que $dec_{avec1}(a,b) = dec(a-1,b-1)$: S'il y'a un 1 dans la décomposition, nous retirons 1 de la somme. Ainsi, nous avons $x_1+x_2+...+x_{b-1}+x_b-1 = \sum_{i=1}^{b} x_i - 1 = a-1$. Or, puisque nous savons qu'il y a un 1 dans la décomposition et que la suite des termes est décroissante, cela implique que $x_b = 1$. Par conséquent, nous pouvons remplacer le x_b par 1. Cela donne $x_1+x_2+...+x_{b-1}+1-1 = x_1+x_2+...+x_{b-1} = \sum_{i=1}^{b-1} x_i+x_b-1 = \sum_{i=1}^{b-1} x_i = a-1$. Nous avons alors une somme de $b-1$ termes qui a un total de $a-1$, autrement dit $dec(a-1,b-1)$.
Montrons que $dec_{sans1}(a,b) = dec(a-b,b)$: dans ce cas-là, retirons 1 à chacun des termes, c'est à dire retirer 1 à b termes, donc b au total. Nous obtenons $x_1-1+x_2-1+...+x_{b-1}-1+x_b-1 = \sum_{i=1}^{b} x_i-1 = a-1\times b = a-b$. Cela correspond à $dec(a-b,b)$.
En résumé, $dec_{avec1}(a,b) = dec(a-1,b-1)$ et $dec_{sans1}(a,b) = dec(a-b,b)$. Comme $dec(a,b) = dec_{avec1} + dec_{sans1}$,

$$dec(a,b) = dec(a-1,b-1) + dec(a-b,b).$$

En utilisant cette formule récursive, nous avons écrit un programme en C++ disponible à l'adresse suivante :
`https://github.com/Lucas31415/MeJ/blob/master/decompositions`.

3.4 Résultat de l'algorithme

Les premiers nombres que nous avons pu calculer grâce à cette fonction récursive sont les suivants :

Suite C : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42

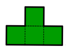
Cette fois, l'algorithme est assez rapide pour calculer beaucoup plus de nombres, 416 plus précisément.

4 Un autre type de décomposition

Nous avons cherché un autre type de décomposition qui se rapprocherait plus de la suite B. Nous avons finalement trouvé une manière plus efficace et plus simple, mais malheureusement après avoir fait notre présentation au congrès de MATh.en.JEANS à Liège. Nous avons quand même décidé de le détailler lors de cet article.

Nous avons en fait simplement décidé de construire une suite D qui utiliserait le même principe que la suite C, mais sans que ce soit à commutativité près. D_n correspond au nombre de sommes différentes dont le total est n. Par exemple $D_4 = 8$ car 8 peut être écrit sous les formes suivantes :

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$$

Il y a donc bien 8 sommes différentes dont le total vaut 4. Ces sommes peuvent être assimilées aux formes de la même manière que C. Par exemple, $1+2+1$ peut s'écrire avec des carrés : . Nous aurons également une partie des formes, mais pas toutes.

4.1 Dénombrement

Pour dénombrer cette suite D, remarquons déjà que le premier nombre de la décomposition de D_n sera un naturel compris entre 1 et n. Cela signifie que le reste de la décomposition aura comme somme $n-1$ si le premier terme est 1, $n-2$, si c'est 2, ..., 1 si c'est $n-1$ et 0 si c'est n. Donc, si le premier terme est 1, le total du reste de la décomposition devra être $n-1$. Nous aurons ainsi D_{n-1} possibilités. Nous pouvons continuer de la sorte pour les autres premiers termes.

Cela implique que $D_n = D_{n-1} + D_{n-2} + ... + D_2 + D_1 + D_0 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} D_i$. Nous pouvons définir $D_0 = 1$ car il n'y a qu'une manière de décomposer 0.

Par conséquent, $D_1 = D_0 = 1$, $D_2 = D_1 + D_0 = 1 + 1 = 2$, $D_3 = D_2 + D_1 + D_0 = 2 + 1 + 1 = 4$, ... Nous constatons qu'il s'agit en fait des puissances de 2. Plus précisément, $D_n = 2^{n-1}$. En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \geq 2^{n-1}$$

car, par définition, $B_n \geq D_n$.

Les premiers nombres de la suite D sont ainsi les suivants :

$$\boxed{\textbf{suite D : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512}}$$

4.2 Preuve

Finalement, il nous reste à prouver qu'il s'agissait bien de la suite de puissances de 2. Nous avons utilisé pour cela une preuve par récurrence dont le principe est expliqué en annexe.

Initialisation : nous avons déjà trouvé que $D_1 = 1 = 2^0$. Nous n'utilisons pas D_0, car c'est une exception qui a été définie, nous arriverions à des nombres qui ne sont pas entiers.

Hérédité : si D_k est une puissance de 2, prouvons que D_{k+1} est une puissance de 2.

Pour cela, remarquons que $D_{k+1} = \sum\limits_{i=0}^{k} D_i = \sum\limits_{i=0}^{k-1} D_i + D_k$.

Or, par définition, $D_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} D_i$. Donc, $D_{k+1} = D_k + D_k = 2 \times D_k$.

$D_k = 2^{k-1}$ implique que $D_{k+1} = 2 \times 2^{k-1} = 2^k$, qui est bien la puissance de 2 suivante.

5 Pour aller plus loin

Nous pourrions étendre notre problème en passant de nos petits carrés dans le plan à des petits cubes dans l'espace. Nous pourrions également essayer de paver des carrés ou des rectangles à l'aide de ces formes. Finalement, nous pourrions essayer d'améliorer nos algorithmes afin de calculer plus de nombres dans les suites.

6 Conclusion

Nous souhaitons remercier particulièrement les chercheurs et enseignants qui nous ont accompagnés pendant toute l'année : le professeur Yvik Swan, docteur en mathématiques (en statistique et probabilités) et chargé de cours à l'ULg et à l'ULB, madame Émilie Clette, assistante à

l'ULg, mesdames Céline Serta et Ingrid Demulder-t'Kindt, organisatrices de Math.en.JEANS dans notre école, au collège Don Bosco. Elles ont aussi sacrifié un midi par semaine ! Enfin, nous souhaitons aussi remercier le département de mathématiques de l'ULg pour avoir organisé le congrès Math.en.JEANS fin avril.

Si vous pensez avoir compris une logique dans les suites, ou si vous avez des questions, des suggestions ou des remarques, nous vous encourageons à nous écrire un email à l'adresse `prieelslucas@gmail.com`.

Nous avons appris à la fin de l'année qu'un site internet, `oeis.org`, avait beaucoup d'informations sur toutes les suites de nombres que nous avons pu calculer. Cependant, nous avons préféré présenter seulement notre travail personnel dans cet article et pas des informations que n'importe qui aurait pu trouver en cherchant sur internet.

7 Annexes

7.1 $\sum$

Le symbole somme ($\sum$, la lettre majuscule sigma en grec), aussi appelé symbole de sommation, est une notation mathématique très utilisée. Il sert à noter une somme de plusieurs termes sans devoir utiliser les points de suspension. Pour cela, nous utilisons un indice, la plupart du temps noté i. Nous allons faire varier cet indice dans une intervalle de nombres. Par exemple [8],

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

est la notation simplifiée de

$$x_1 + x_2 + x_3 + ...x_{n-1} + x_n$$

Nous pouvons remarquer qu'en dessous du symbole-somme, nous allons initialiser l'indice i, il sera ensuite incrémenté de 1 à chaque itération, jusqu'à ce que $i = n$.

7.2 Algorithme récursif

Un algorithme récursif est un algorithme qui utilise au moins une fonction récursive. Nous allons maintenant détailler le principe d'une fonction récursive.

Basiquement, une fonction récursive est une fonction informatique qui s'appelle elle-même. Pour mieux comprendre, considérons un exemple : la fonction factorielle.

Tout d'abord, la factorielle [9] de n est définie comme $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ et est notée $n!$. Par convention, $0! = 1$ Nous pouvons ainsi faire une fonction récursive pour la factorielle. Nous pouvons appeler une fonction récursive $fact(n)$ qui calcule $n!$ en posant $fact(n) = n \times fact(n-1)$ et en utilisant le fait que $fact(0) = 1$.

8. La lecture de ce symbole est "la somme pour i variant de 1 à n de x_i"
9. La factorielle de n est aussi appelée factorielle n ou n factorielle.

Par exemple, $fact(5) = 5 \times fact(4)$, mais là, nous pouvons recommencer l'opération avec $fact(4) = 4 \times fact(3)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
fact(5) &= 5 \times fact(4) = 5 \times 4 \times fact(3) = 5 \times 4 \times 3 \times fact(2) \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times fact(1) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times fact(0) \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \\
&= 5!
\end{aligned}$$

7.3 Preuve par récurrence

Nous allons expliquer le principe de la preuve par récurrence. C'est une preuve qui peut seulement être utilisée pour prouver une propriété sur les entiers naturels qui se déroule en deux étapes.

D'abord, l'initialisation : nous allons prouver qu'une propriété est vraie pour le plus petit entier qui nous intéresse (le plus souvent 0). Ensuite, c'est l'hérédité. Nous allons prouver que si cette propriété est vraie pour un entier appelé k, alors elle est vraie pour $k + 1$.

Cela signifie que, d'après l'initialisation, la propriété est vraie pour 0. Or si c'est vrai pour 0, c'est vrai pour 1, d'après l'hérédite. Mais si c'est vrai pour 1, c'est vrai pour 2. Nous pouvons continuer ainsi en avançant d'un entier à la fois et cela veut dire que ça sera vrai pour tous les entiers naturels.

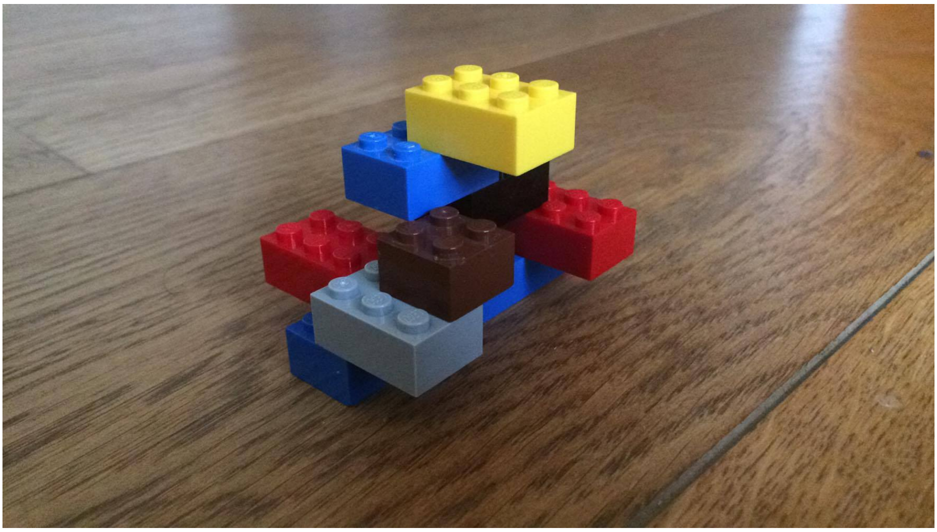


Figure 6 – Et après...

Un ascenseur contrariant

Adrian Orban et Arthur Picard

Élèves de 6e secondaire au
Collège Sainte-Véronique de Liège

Avec l'aide de leurs enseignants
Anne Lacroix, Sébastien Kirsch et Sandrine Schieres

et des chercheurs
Julien Leroy, Adeline Massuir et Stéphanie Tixhon (ULiège)

Résumé :

Cet article traite d'un hôtel pour le moins singulier. Celui-ci contient un nombre infini d'étages et son ascenseur ne permet de les monter et descendre que par 5 ou par 7. Dans cet article, les élèves démontrent qu'il est tout de même possible de se rendre à tous les étages. Ils généralisent ensuite le problème et découvrent que les conclusions sont identiques lorsque les deux déplacements possibles sont des nombres premiers entre eux. Ils traitent ensuite le cas des hôtels possédant un nombre fini d'étages et conjecturent que si x *et* y *sont les deux déplacements autorisés et sont premiers entre eux, alors on peut se rendre à tous les étages pour autant que l'hôtel en possède au moins* $x + y - 2$.

1 Présentation du sujet

1.1 Problème

Un hôtel possède un nombre infini d'étages, mais un seul ascenseur. Capricieux, on ne peut monter ou descendre les étages que par 5 ou 7.

1. Peut-on atteindre tous les étages ?
2. Que se passe-t-il si on remplace les nombres 5 et 7 par d'autres nombres ? Quelles sont les conditions à appliquer à ces nombres pour que l'ascenseur puisse atteindre tous les étages ?
3. Que se passe-t-il si le nombre d'étages est fini ? Quelles sont les conditions à appliquer à ce nombre d'étages pour que l'ascenseur puisse toujours aller partout ?

1.2 Conventions

- L'ascenseur se trouve initialement au rez-de-chaussée.
- Le nombre d'étages est infini, nous prenons comme convention que les étages se situent uniquement au-dessus du rez-de-chaussée donc l'ascenseur peut monter jusqu'à l'infini (car le raisonnement est analogue en l'infini positivement et négativement).
- L'étage numéroté par le nombre naturel n est celui situé "n étage(s) au-dessus du rez-de-chaussée" (c'est-à-dire l'étage n dans la vie courante).
- Quand l'ascenseur monte/descend de n étage(s), mathématiquement, on écrit : $+n$ / $-n$.

2 Annonce des résultats obtenus

2.1 Peut-on atteindre tous les étages ?

Pour démontrer intuitivement que l'ascenseur peut atteindre tous les nombres naturels, le plus simple est de diviser la question en 2 parties.

A. Tous les nombres pairs
B. Tous les nombres impairs

A. Nombres pairs

L'ascenseur démarrant en 0, il peut monter de 7 et puis de descendre de 5 successivement. Ce qui signifie qu'il peut aller au deuxième étage car

$$0 + 7 - 5 = 2.$$

Et qu'il peut aller quatrième étage car

$$0 + 7 - 5 + 7 - 5 = 7 \times 2 - 5 \times 2 = (7 - 5) \times 2 = 2 \times 2 = 4.$$

Et qu'il peut aller au sixième étage car

$$0 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 = 7 \times 3 - 5 \times 3 = (7 - 5) \times 3 = 2 \times 3 = 6.$$

Et qu'il peut aller au huitième étage car

$$0 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 = 7 \times 4 - 5 \times 4 = (7 - 5) \times 4 = 2 \times 4 = 8$$

Et ainsi de suite...

Cet ensemble de calculs se résume en l'équation :

$$\begin{aligned} F(n) &= 0 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + \cdots - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - \cdots \\ &= 0 + 7m - 5n. \end{aligned}$$

Les entiers m et n étant arbitraires, puisqu'on peut décider de monter ou descendre de 5 ou 7 autant de fois que l'on veut, nous prenons $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ comme convention.

$F(n) = 7n - 5n = (7 - 5) \times n = 2n$ $\Rightarrow$ **ce qui donne la généralisation des nombres pairs**,
n étant le nombre de fois que l'on ajoute 7 puis retire 5, $F(n)$ étant le nombre d'étage qui désigne l'étage atteint.

B. Nombres pairs

Voyons si l'ascenseur peut aller en 1.

$\mathbf{0 + 5 + 5 + 5 - 7 - 7 = 1}$ $\Rightarrow$ **Oui il peut aller au premier étage.**

L'ascenseur étant en 1, il peut monter de 7 et puis de descendre de 5 successivement.

Ce qui signifie qu'il peut aller au troisième étage car

$$1 + 7 - 5 = 3.$$

Et qu'il peut aller au cinquième étage car

$$1+7-5+7-5 = 1+7\times 2-5\times 2 = 1+(7-5)\times 2 = 1+2\times 2 = 1+4 = 5.$$

Et qu'il peut aller au septième étage car

$$1+7-5+7-5+7-5 = 1+7\times 3-5\times 3 = 1+(7-5)\times 3 = 1+2\times 3 = 1+6 = 7.$$

Et qu'il peut aller au neuvième étage car

$$\begin{aligned}1 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 &= 1 + 7 \times 4 - 5 \times 4\\ &= 1 + (7 - 5) \times 4 = 1 + 2 \times 4 = 1 + 8 = 9.\end{aligned}$$

Et ainsi de suite...

Cet ensemble de calculs se résume en l'équation :

$$\begin{aligned}F(n) &= 1 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + \cdots - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - \cdots\\ &= 1 + 7m - 5n.\end{aligned}$$

Les entiers m et n étant arbitraires, puisqu'on peut décider de monter/descendre de 5 ou 7 autant de fois que l'on veut, nous prenons $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ comme convention.

$F(n) = 7n - 5n = (7 - 5) \times n = 2n \quad \Rightarrow$ **ce qui donne la généralisation des nombres pairs**,
n étant le nombre de fois que l'on ajoute 7 puis retire 5, $F(n)$ étant le nombre d'étage qui désigne l'étage atteint.

Par conséquent, puisque l'ascenseur peut atteindre tous les étages pairs et impairs de l'immeuble, il peut donc aller partout dans l'immeuble.

2.2 Que se passe-t-il si on remplace les nombres 5 et 7 ?

Le tableau qui suit expose nos résultats obtenus d'après nos observations en fonction de différents couples de nombres. Nous pouvons voir que la question de diviseur commun est abondamment présente.

Nombre de départ	2	3	n
Couplé avec un nombre tels qu'ils aient au moins un diviseur commun.	L'ascenseur peut uniquement aller aux étages multiples de 2.	L'ascenseur peut uniquement aller aux étages multiples de 3.	L'ascenseur peut uniquement aller aux étages multiples du diviseur commun.
Couplé avec un nombre tel qu'ils n'aient pas de diviseur commun (= Couplé tel que les **2 nombres soient premiers entre eux**.)	L'ascenseur peut toujours aller partout.	L'ascenseur peut toujours aller partout.	L'ascenseur peut toujours aller partout.

2.3 Quelles sont les conditions à appliquer à ces nombres pour que l'ascenseur puisse atteindre tous les étages ?

Après avoir divisé le problème en deux parties (les étages pairs et les étages impairs), nous avons facilement remarqué que les nombres 5 et 7, grâce à de simples additions ou soustractions successives, permettent d'atteindre la généralisation des nombres pairs et des nombres impairs. Il a fallu démontrer que l'ascenseur pouvait atteindre le 1er étage pour pouvoir appliquer le cas des nombres pairs sur celui des nombres impairs et avoir donc prouvé qu'il pouvait aller à tous les nombres.

A. Nombres pairs $\Rightarrow$ $2n$
B. Nombres impairs $\Rightarrow$ $1 + 2n$

Nous avons donc démontré intuitivement que l'ascenseur peut atteindre n'importe quel étage de l'immeuble.

Les résultats observés lors des recherches nous amènent à une conclusion évidente : la condition nécessaire et suffisante pour que le couple de nombres permet d'atteindre tous les étages de l'ascenseur est que les deux nombres de ce couple soient premiers entre eux. En d'autres termes, nos observations heuristiques nous ont montré que si les nombres avaient un diviseur commun (et donc qu'ils n'étaient pas premiers entre eux), l'ascenseur ne pouvait atteindre que les nombres multiples de ce diviseur commun.

Exemple : Pour les nombres 9 et 6, l'ascenseur ne peut atteindre que les nombres multiples de 3.

Démontrons maintenant que cette hypothèse est bien la condition nécessaire et suffisante pour que l'ascenseur puisse aller partout.

DEMONSTRATION :
Utilisons le théorème de Bézout :
Si x et y appartiennent à $\mathbb{N}$
On peut admettre : il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $mx + ny = \text{pgcd}(x; y)$.

Mais nous allons tout de même montrer d'où vient cette formule.
Si $x > y$, par division euclidienne :
$x = q_1 \times y + r_1$, avec $0 \leq r_1 < y$.

En remplaçant les rôles :
$y = q_2 \times r_1 + r_2$, avec $0 \leq r_2 < r_1$.
Puis :
$r_1 = q_3 \times r_2 + r_3$, avec $0 \leq r_3 < r_2$.

Et ainsi de suite...
$r_{n-2} = q_n \times r_{n-1} + r_n$, avec $0 \leq r_n < r_{n-1}$.
$r_{n-1} = q_{n+1} \times r_n + r_{n+1}$, avec $0 \leq r_{n+1} < r_n$.
$r_n = q_{n+2} \times r_{n+1} + 0$.

Lorsque l'on arrive à un reste nul, le PGCD de ces deux nombres est le reste de la ligne précédente. Dans ce cas-ci :
$r_{n+1} = \text{pgcd}(x; y)$.

Pour retrouver sur la formule $mx + ny = \text{pgcd}(x; y)$, il faut remonter la chaîne comme ceci :
$r_{n-1} = q_{n+1} \times r_n + r_{n+1}$
$\Leftrightarrow r_{n+1} = r_{n-1} - q_{n+1} \times r_n$
$\Leftrightarrow r_{n+1} = r_{n-1} - q_{n+1} \times (r_{n-2} - q_n \times r_{n-1})$.

Remontons comme cela jusqu'à retomber sur x et y :
$\text{pgcd}(x; y) = mx + ny$,
avec m et n qui ont une valeur composée d'additions et de multiplications, de quotient et de reste.

Maintenant que le théorème de Bézout est expliqué nous devons juste l'appliquer à deux cas comme énoncé plus haut.

Si les nombres sont premiers entre eux :
Par exemple, utilisons la formule pour les nombres 7 et 5.
$7 = 5 \times 1 + 2$;
$5 = 2 \times 2 + 1$;
$2 = 2 \times 1 + 0$;
Donc $\text{pgcd}(7; 5) = 1$.
On trouve $\text{pgcd}(7; 5) = 5 - (2 \times 2) = 5 - 2 \times (7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7$, donc voilà comment on pourrait rejoindre le premier étage.

Si on voulait atteindre le 2ème étage, il suffit de multiplier par deux de part et d'autre. Et donc, par extension, si on veut atteindre le nombre d'étage z, il suffit de multiplier par z de part et d'autre.

Donc, lorsque le PGCD est égal à 1, cela montre que l'on peut atteindre tous les étages assez facilement. En conclusion, il faut que les nombres soient premiers entre eux pour que l'ascenseur puisse s'arrêter à tous les étages. Si les nombres ne sont pas premiers entre eux. Prenons 18 et 12, par exemple, pour illustrer ce qu'il se passe lorsque les nombres ne sont pas premiers entre eux c'est-à-dire qu'ils ont un diviseur commun.
$18 = 1 * 12 + 6$;
$12 = 2 * 6 + 0$;
$\text{pgcd}(12; 18) = 6 = 18\breve{\ }12$.

Dans ce cas-ci, si l'ascenseur démarre du rez-de-chaussée, l'ascenseur ne se déplacera d'uniquement de 6 étages par 6 étages.

Vu que si on a deux nombres x, y tel que $y = nx$, $ax + by = ax + bnx = x(a + bn)$ donc ce nombre est égal à un nombre qui est multiple de x. L'ascenseur ne pourrait se déplacer que sur les étages multiples de x.

Donc, si les nombres ne sont pas premiers entre eux, il est impossible d'atteindre l'étage 1 qui tout au long de la recherche a été un but à atteindre.

2.4 Que se passe-t-il lorsque le nombre d'étage est fini ?

Pour énoncer la formule, nous allons partir d'un cas particulier pour arriver ensuite à une formule générale. Dans ce cas-ci, vu les nombres utilisés précédemment, nous allons utiliser 5 et 7. Le but de cette représentation est de monter le plus haut possible tout en atteignant tous les étages. Pour rendre les calculs plus digestes, nous réutiliserons les résultats précédents.

1. Dès la première étape, on va directement placer les nombres évidents. Ces nombres sont évidemment 5 et 7.
2. La deuxième étape consiste en $7 - 5 = 2$.
3. La troisième étape est $2 + 7 = 9$ vu que si on limite le nombre d'étage à 7 ou à 8, on ne peut faire d'autre mouvement sans dépasser le nombre d'étage fini. Donc on va élever notre nombre d'étage fini à 9.
4. La quatrième étape est 9˘5 = 4, on arrive au quatrième étage. A ce stade, nous nous retrouvons bloqués, donc nous allons devoir augmenter le nombre d'étages à 10. Vu que lorsqu'on a les nombres 2, 5, 7 et 9, on ne peut pas atteindre d'autres étages tout en se limitant à un intervalle de 9 étages.
5. Repartons de zéro mais considérons que les étages précédemment atteints le sont toujours. Donc, $5 \times 2 = 10$.
6. A cette étape, on atteint l'étage 3 en faisant $10 - 7 = 3$.
7. Avant-dernière étape, on atteint le premier étage en faisant $8 - 7 = 1$.
8. La dernière étape permet d'atteindre le sixième étage en faisant $1 + 5 = 6$.

En conclusion, si les nombres que nous utilisons sont 7 et 5, le plus petit nombre que nous obtenons pour un nombre d'étages fini est 10. Si nous prenons un nombre plus grand que dix, l'ascenseur pourra tout de même s'arrêter partout. Par exemple, si on veut atteindre l'étage 11 et que l'on part du principe que l'on sait s'arrêter aux dix premiers étages, il suffit de faire $4 + 7 = 11$ ou bien encore $6 + 5 = 11$.

Maintenant que l'on a expliqué comment on arrivait au résultat de 10 pour 5 et 7, montrons les résultats que nous avons obtenus sous forme de tableau.

Nombres	Nombre d'étages limite	Nombres	Nombre d'étages limite	Nombres	Nombre d'étages limite
5 et 7	10	3 et 11	12	4 et 17	19
9 et 7	12	4 et 11	13	6 et 17	21
10 et 7	15	5 et 11	14	8 et 17	23
11 et 7	16	6 et 11	15	9 et 17	24
12 et 7	17	8 et 11	17	10 et 17	25
13 et 7	18	9 et 11	18	12 et 17	27
14 et 7	19	13 et 11	22	14 et 17	29

D'après ce tableau non-exhaustif des résultats que nous avons obtenus, nous sommes arrivés à la formule suivante : le nombre d'étage limite est $x + y - 2$.

3 Conclusion, conjectures et questions ouvertes

Pour la première question, nous avons montré qu'avec les nombres 5 et 7, notre ascenseur pouvait s'arrêter partout. En ce qui concerne la seconde question, si les nombres sont premiers entre eux, on peut s'arrêter à tous les étages. S'ils ne le sont pas, ils s'arrêteront uniquement sur des multiples de leur plus grand commun diviseur. Cependant, pour la troisième question, nous sommes arrivés à une conjecture. La formule est la suivante : $x + y - 2 =$ le nombre d'étages fini.

Remerciements

Nous tenons à remercier nos professeurs, Madame Lacroix, Madame Schieres et Monsieur Kirsch pour leurs conseils lors de nos réunions hebdomadaires. Nous remercions aussi les chercheurs, Julien Leroy, Adeline Massuir et Stéphanie Tixhon pour leur aide pour faire avancer le projet.

Congrès de Liège 2017

Le congrès organisé par le Département de Mathématique de l'Université de Liège s'est déroulé du vendredi 28 au dimanche 30 avril 2017 sur le campus du Sart Tilman à Liège. À cette occasion, près de 400 élèves belges, français et luxembourgeois sont venus présenter leurs travaux, de façon joviale et compréhensible.

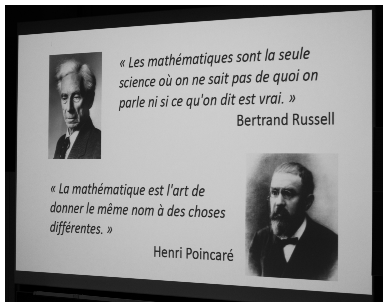
Pendant 3 jours, les jeunes ont été acteurs de leurs recherches et ont concrétisé leur travail d'une année : ils ont présenté leurs résultats et les ont soumis à l'épreuve de la critique, au moyen de posters et d'animations et sous forme d'exposés en amphithéâtre.

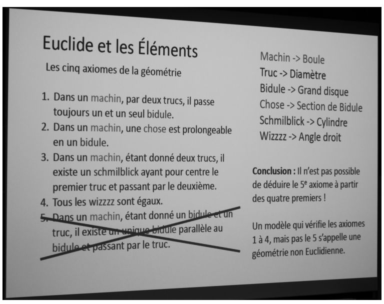
Des exposés de vulgarisation ont également été donnés par des orateurs expérimentés : Aline Parreau (CNRS à l'Université de Lyon 1), Mickaël Launay (célèbre youtubeur mathématique `www.youtube.com/micmaths/`) et Michel Rigo (professeur à l'Université de Liège). Une séance de cinéma a encore été organisée, durant laquelle les élèves ont assisté à une projection du film « The man who knew infinity » sur la vie du célèbre mathématicien indien Srinivasa Ramanujan.

L'art subtil de l'imprécision par Mickaël Launay

Les mathématiques sont réputées pour leur exactitude et leur rigueur. Pourtant, dans certaines situations, il peut s'avérer particulièrement intéressant et utile de cultiver l'art du flou. Les mathématicien.ne.s sont parfois capables de tirer un grand profit de ne pas savoir de quoi ils parlent, et certains célèbres problèmes ont même été résolus par un usage particulièrement subtil (et précis !) de l'imprécision.

Mickaël Launay entre à l'école normale supérieure (ENS) Ulm en 2005 et obtient une thèse en probabilités en 2012. Depuis plus de quinze ans, il participe à de nombreuses actions de diffusion des mathématiques pour les enfants et le grand public. En 2013, il crée la chaîne de vulgarisation Micmaths sur YouTube.
`http://www.micmaths.com/`
`https://www.youtube.com/micmaths/`

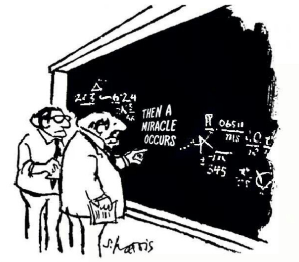




Lors de son exposé, il a fait découvrir aux participants l'aspect imprécis des mathématiques à travers différents exemples. Notamment, après avoir rendu floues les notions de « plan », « point », « droite », « cercle », « segment » et « angle droit », ils ont découvert un autre ensemble d'objets satisfaisant à tous les axiomes d'Euclide, sauf le dernier. Les géométries non-euclidiennes étaient nées.

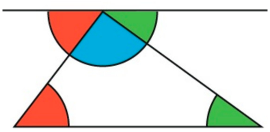
Des preuves ? Où, quand, comment ? par Michel Rigo

Expliquer une démonstration, prouver un résultat, énoncer une conjecture sont des activités qui font partie intégrante du quotidien du mathématicien. Dans cet exposé, je passe en revue quelques exemples de preuves. Certaines sont classiques ou historiques, d'autres sont peut-être moins connues : des preuves à la Ramanujan, des preuves sans mots, le théorème des quatre couleurs, la conjecture de Kepler sur l'empilement de sphères,... Le but est de partager mes réflexions comme chercheur « professionnel » et enseignant.



"I think you should be more explicit here in step two"

Michel Rigo obtient son doctorat de mathématiques en 2001 à l'Université de Liège. Après avoir été chargé de recherche FNRS puis chargé de cours, il y est maintenant professeur ordinaire depuis 2011. « *Mes recherches portent essentiellement sur la combinatoire des mots et l'informatique théorique. Je suis très attaché à la diffusion des mathématiques. Depuis plus de 10 ans, j'ai donné plus de 500 exposés devant des élèves du secondaire (Prix Wernaers en 2010). Avec l'antenne liégeoise* Maths à Modeler*, nous animons (assistants et étudiants) des ateliers depuis 2010 pour des enfants dès 9 ou 10 ans.* »
`http://www.discmath.ulg.ac.be/`

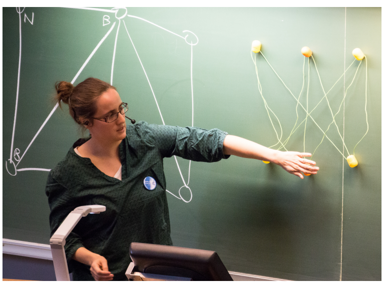


Son exposé a eu lieu juste avant la projection du film « The man who knew infinity » sur la vie du mathématicien autodidacte Srinivasa Ramanujan, célèbre pour les milliers de formules qu'il trouva sans en donner de preuve, mais dont la plupart furent démontrées par la suite. Lors de l'exposé, au delà des différents concepts de preuves illustrés, les élèves ont pu découvrir la beauté et l'intérêt d'une preuve mathématique. Ils ont également pu entrevoir les limites d'une théorie mathématique avec les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

Carrelage et mariage font parfois bon ménage ! par Aline Parreau

Dans cet exposé, nous étudions deux problèmes, l'un consistant à carreler sa cuisine et l'autre à combiner des couples pour former des mariages. Nous verrons que malgré leurs différences apparentes, ces deux problèmes peuvent être formulés dans un même cadre utilisant la théorie des graphes, ce qui permet d'ailleurs de les résoudre de manière élégante !

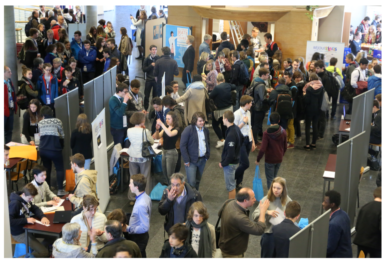
« Après des études à l'ENS Lyon en mathématiques et informatique, j'ai défendu en 2012 ma thèse en mathématiques discrètes à Grenoble sous la direction de Sylvain Gravier. J'ai ensuite passé une année à Lille puis fait un postdoctorat à Liège. Depuis septembre 2014, je suis chercheuse au CNRS à Lyon au sein du laboratoire LIRIS. Je participe activement à des activités de vulgarisation scientifique pour promouvoir la recherche en mathématique et informatique. »
`https://liris.cnrs.fr/~aparreau/`



Cet exposé de clôture faisait écho à l'exposé d'ouverture de Mickaël Launay. Les deux problèmes proposés par Aline Parreau, bien que très différents au premier abord, trouvaient des solutions similaires une fois exprimés dans un même langage.

Les exposés et le forum

Les 62 exposés d'élèves ont été répartis sur deux demi-journées et une journée complète, en parallèle dans 4 auditoires de grande taille : 304, 204, 94 et 74 places (le programme détaillé se trouve ci-après). Les exposés étaient en général de très bonne qualité. Les séances de questions-réponses étaient prises au sérieux, et de nombreux commentaires y ont été soulevés. Le rôle de chair.wo.men a été endossé par des élèves participant au congrès et ceux-ci ont pris leur rôle très à cœur, notamment en posant des questions pour lancer les discussions.



Le forum a compté 57 stands dont la liste détaillée se trouve ci-après. Les élèves des différents ateliers y ont présenté leurs travaux sous forme de posters. De nombreux groupes avaient également prévu des animations (jeux, robots, simulations sur ordinateur,...). Tous les stands étaient répartis dans le hall principal donnant accès aux différents auditoires. Deux tranches horaires ont été consacrées à l'occupation et l'animation du forum, ce qui a permis de ne pas surcharger l'espace et de donner la possibilité aux élèves de s'intéresser aux travaux de leurs condisciples. En particulier, les jeunes ont eu la chance d'accueillir un public important pendant toute la durée du forum. L'animation des stands a également été un moment privilégié d'échange entre les élèves et les chercheurs.

Vendredi 28 avril 2017

13h30-14h00 Accueil dans le hall de l'Amphithéâtre de l'Europe (Bât. B4)

Session 1 - 14h00-15h40	Local 304	Local 204	Local s94	Local s74
14h10-14h30 Présentations jumelées 30 minutes	*Le carreleur à grands carrés* **Collège Camille Claudel (Paris)** **Collège du Moulin des Prés (Paris)**	*Cryptographie* **Collège les Hauts de Blémont (Metz)** **Collège Rabelais (Metz)**	*Awalé mathématique* **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** **Lycée Louis Lapicque (Epinal)**	*Les ascenseurs* Présentation simple (20 min) à 14h20 **Athénée Royal Liège 1**
14h40-15h00	*Approximation de π par des polygones* **Collège Camille Claudel (Paris)**	*Pancakes party* **Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)**	*Mathémagie* **Collège Sainte-Véronique (Liège)**	*Le tas de billes* **Lycée Saint-Jacques (Liège)**
15h00-15h20	*Le pays dont on ne s'échappe jamais* **Collège Chepfer (Villers lès Nancy)**	*La pile de disques* **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)**	*Le jeu des échelles et des serpents* **Lycée classique de Diekirch**	*Flexagone* **Lycée Loritz (Nancy)**
15h20-15h40	*Attrapez-les tous (1e partie simulation)* **Collège Saint Dominique (Nancy)**		*Par quoi divise-t-on ?* **Collège Sainte Véronique (Liège)**	*Coloriage de la carte du monde* **DIC Collège (Liège)**

Pause (10 min.)

Session 2 – 15h50-16h50	Local 304	Local 204	Local s94	Local s74
15h50-16h10	*Le tour du monde en 80 jours* **Collège Saint Dominique (Nancy)**	*CARRE(lages)* **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)**	*n carrés* **Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)**	*Tas de cailloux* **Lycée Saint-Jacques (Liège)**
16h10-16h30	*Les tours de Hanoï* **Collège Pilâtre de Rozier (Ars sur Moselle)**	*Décomposer un nombre à l'aide de la suite de Fibonacci* **Lycée Bichat (Luneville)**	*Le solitaire bulgare* **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)**	*Les fractions égyptiennes* **Athénée Royal Liège 1**
16h30-16h50	*Ricochets* **Collège Sainte Véronique (Liège)**	*Bip bip et Coyotte* **Lycée Loritz (Nancy)**	*Créons des routes* **Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)**	*Le blackjack* **Institut Saint-Michel (Verviers)**

Collège français ou secondaire inférieur **Lycée français ou secondaire supérieur**

Pause (30 min.)

17h20-18h45	Local 604 Ouverture officielle Séance plénière (Mickaël Launay *- Mic Math*)

19h00 Repas chaud au B62

Samedi 29 avril 2017

Session 3 - 08h30-10h00	Local 304	Local 204	Local s94	Local s74
08h30-09h00 Présentations jumelées 30 minutes	*Le carreleur de pentagone* **Collège Camille Claudel (Paris)** **Collège du Moulin des Prés (Paris)**	*Alors les nombres … qui est premier ?* **Collège les Hauts de Blémont (Metz)** **Collège Rabelais (Metz)**	*La géométrie dans le monde de Packman* **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** **Lycée Louis Lapicque (Epinal)**	*Un ascenseur contrariant* **Collège Sainte Véronique (Liège)** **Institut du Sacré Cœur (Visé)**
09h00-09h20	*Attrapez-les tous 2e partie* **Collège Saint Dominique (Nancy)**	*Plaquage au sol* **Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)**	*Critères de divisibilité* **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)**	*Ricochets* **Lycée Saint-Jacques (Liège)**
09h20-09h40	*Le puzzle qui rend fou* **Collège Chepfer (Villers lès Nancy)**	*Un peu d'ordre s'il vous plaît !* **Lycée Vauban (Luxembourg)**	*Flocon de Koch* **Athénée Royal Air Pur (Seraing)**	*Approximation du nombre* π **Institut Saint Michel (Verviers)**
09h40-10h00	*Conditions d'une perspective harmonieuse* **Collège Camille Claudel (Paris)**	*Kayla et son fiancé* **Collège Kieffer (Bitche)**	*Cinémath* **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)**	*Le problème du directeur du LCD* **Lycée classique de Diekirch**

Pause (30 min.) – photo de groupe (dans le hall d'entrée)

10h30-12h30	Hall d'entrée STANDS (partie 1)	Rencontre Professeurs - Chercheurs

Repas sandwichs sur place

13h30-15h30	Hall d'entrée STANDS (partie 2)	

Session 4 – 15h45-16h25	Local 304	Local 204	Local s94	Local s74
15h45-16h05	*Erathostène (le rayon de la terre)* **Collège Camille Claudel (Paris)**	*Pli…Papier…DRAGON !* **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)**	*Les critères de divisibilité (en binaire et autres bases)* **Athénée Royal Liège 1**	*Ecarts entre les nombres* **Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)**
16h05-16h25	*Qui veut se faire Cram-er ?* **Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)**	*La géométrie du savon* **Lycée Tessier (Bitche)**	*La fin d'une époque* **Institut du Sacré Cœur (Visé)**	*Le plus grand pont du monde en Kapla* **Lycée Saint Dominique (Nancy)**

Collège français ou secondaire inférieur **Lycée français ou secondaire supérieur**

Quartier libre

20h00	Salle Noppius (complexe Opéra – centre ville) Présentation de Michel Rigo suivie de la projection du film « *The man who knew infinity* »

Dimanche 30 avril 2017

Session 5 – 09h30-10h40	Local 304	Local 204	Local s94	Local s74
09h30-10h00 Présentations jumelées 30 minutes	*Les nombres infinis à droite* **Collège Camille Claudel** **Collège du Moulin des Prés**	*Multiplication en chaîne* **Collège Sainte Véronique (Liège** **Institut du Sacré Coeur**	*Le billard* **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** **Lycée Louis Lapicque (Epinal)**	*Dessin d'un seul coup de crayon* **Lycée Teyssier (Bitche)** **Collège Kieffer (Bitche)**
10h00-10h20	*Puzzles de polygones* **Collège les Hauts de Blémont (Metz)**	*Un ascenseur contrariant* **AR Air Pur Seraing**	*Une histoire de fractions* **Lycée Saint-Jacques (Liège)**	*Géométrie du robot* (30 minutes) **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)**
10h20-10h40	*Pixels* **Lycée Loritz (Nancy)**			

Collège français ou secondaire inférieur **Lycée français ou secondaire supérieur**

Pause (20 min.) – collation

11h00-12h00	Local 604 Séance plénière (Aline Parreau)

12h15 Repas chaud au B62

Résumés par session

Session 1 local 304	Session 1 local 204
Le carreleur à grands carrés - Daraputh, Daravann, Pierre Collège Camille Claudel (Paris) - Aissatou, Chaima, Perceval, Raphael, Théodore, Zelman Collège du Moulin des Prés (Paris) Partager un rectangle, uniquement à l'aide de carrés.	*Cryptographie* - Cécile, Ikram, Kerim, Mustafa, Océane Collège les Hauts de Blémont (Metz) - Agathe, Annabelle, Camille, Cécile, Erine, Estelle, Marie, Perrine, Valentin, Younes Collège Rabelais (Metz) Petit historique de la cryptographie avec codages et décodages. Ce premier sujet consiste à développer des cryptogrammes basés sur un ou plusieurs systèmes de numération en s'inspirant d'activités de cryptographie proposées
Approximation de π par des polygones - Alexis, Cedric, David Collège Camille Claudel (Paris)	*Pancakes party* - Emilie, Juliette, Mathurin, Vinciane Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy) On dispose d'une pile de pancakes de différentes tailles qu'on souhaite trier du plus petit au plus grand. Plusieurs méthodes de tri ont permis d'identifier le nombre d'opérations nécessaires.
Le pays dont on ne s'échappe jamais - Adèle, Claire, Clara, Izaline, Lorraine, Lyla Collège Chepfer (Villers lès Nancy) Dans un certain pays en forme de carré, il est impossible de s'échapper ! Lorsqu'on essaie de s'échapper au Nord par un point A, on est immédiatement envoyé au point B qui est tout en dessous, plein Sud ! De même, si on veut s'échapper par le Sud, on est envoyé au Nord. Et si on veut s'échapper par l'Ouest, on est envoyé au point qui est à la même hauteur, mais tout à l'Est. De même, si on veut s'échapper par l'Est, on est envoyé à l'Ouest. Dans ce drôle de pays, quel est le plus court chemin pour aller d'un certain point M à un point N ? Quel est le plus long ?	*La pile de disques* - Claire, Gilles Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège) Le jeu consiste à déplacer des disques de diamètres différents d'un pic de départ à un pic d'arrivée en passant par un pic intermédiaire. Le but est de déplacer tous les disques en un nombre minimum de coups en respectant les règles suivantes : – on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois ; – on ne peut déplacer un disque que sur un disque plus grand, ou sur un emplacement vide. Quelle stratégie adopter pour gagner ? En fonction du nombre de disques, quel est le nombre minimum de coups nécessaires pour parvenir à déplacer tous les disques ?
Attrapez-les tous (1e partie : simulation) - Clément, Nathan Collège Saint Dominique (Nancy) Combien faut-il acheter de paquets de cartes Pokémon pour obtenir la collection complète ? Approche via des simulations.	

Session 1 local s94	Session 1 local s74
Awalé mathématique - Achille, Gauthier, Jeanne, Lucas, Sarah **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** - Naïs **Lycée Louis Lapicque (Epinal)** Proche de l'awalé mais sur une suite de cavités en ligne, on place des graines dans des cavités. Puis on vide une cavité pour la répartir dans les autres. Peut-on prévoir l'évolution de la répartition des graines dans les cavités ?	*Les ascenseurs* - Alexandre, Louise, Louise, Olivier, Yassine **Athénée Royal Liège 1** Un hôtel a un nombre infini d'étages, mais son ascenseur ne permet de monter ou de descendre les étages que par 5 ou 7. Peut-on accéder à tous les étages ? Et si le nombre d'étages est fini ? Et si on remplace 5 et 7 par d'autres nombre ?
Mathémagie - Adrien, Annelyse, Louis **Collège Sainte-Véronique (Liège)** Avec un jeu de 21 cartes : Etape 1: Posez les cartes, face visible, les unes après les autres sur trois tas A, puis B, puis C, puis A, puis B… Demandez à votre interlocuteur dans quel paquet se trouve la carte qu'il a choisie. Rassemblez-les en trois paquets, en mettant le paquet indiqué au milieu des deux autres. Etape 2: refaire l'étape 1. Etape 3: refaire l'étape 1 (éventuellement sans recomposer le paquet de 21 cartes). A l'issue de l'étape 3, la carte choisie sera toujours la quatrième du paquet indiqué, ou la onzième du paquet recomposé. Comprendre le fonctionnement du jeu. Que se passe-t-il si on prend un nombre différent de cartes? Si on fait 4 tas au lieu de 3?	*Le tas de billes* - Florence, Laurie, Margaryta, Sophie, Sophie **Lycée Saint-Jacques (Liège)** Deux joueurs sont devant un tas de billes. Tour à tour, chaque joueur doit retirer une, deux ou trois billes du tas. Le joueur gagnant est celui qui peut jouer en dernier et le perdant est celui qui ne peut plus jouer. Il faut trouver une stratégie gagnante. Ensuite, généraliser ce résultat à une variante, par exemple si on change les règles (le nombre de billes qu'un joueur peut retirer), soit, si on ajoute un troisième joueur.
Le jeu des échelles et des serpents - Marc, Nathan, Sven **Lycée classique de Diekirch** Considérons une version simplifiée du jeu de société populaire « Echelles et serpents » avec seulement neuf cases. Les joueurs démarrent de la case 1. A chaque tour, ils lancent une pièce, puis ils avancent ou bien d'une case ou bien de deux cases en fonction du résultat du lancer. Si un joueur atteint le pied d'une échelle, il monte directement en haut de celle-ci. S'il atteint la tête d'un serpent, il glisse sur celui-ci jusqu'à sa queue. Question : Combien de coups faut-il en moyenne à un joueur pour terminer la partie ? Le but du projet est de comprendre le problème et de le formaliser à l'aide d'outils mathématiques.	*Flexagone* - Dorine, Pierre, Raphaël, Victor **Lycée Loritz (Nancy)** Etude des flexagones. Construction et graphes.

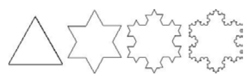
Par quoi divise-t-on ? - Bruno, Sarah **Collège Sainte Véronique (Liège)** D'où viennent les critères de divisibilité bien connus en base 10 ? Que deviennent-ils si on change de base ?	*Coloriage de la carte du monde* - Coralie, Fiona, Justine, Odile, Yani **DIC Collège (Liège)**

Session 2 local 304	Session 2 local 204
Le tour du monde en 80 jours - Hugo, Raphaël **Collège Saint Dominique (Nancy)** Dans le célèbre roman de Jules Verne, Phileas Fogg fait le pari de faire le tour du monde en 80 jours. A son retour, il croit arriver quelques minutes trop tard et voit son rêve anéanti. Cependant, le lendemain, son fidèle serviteur passepartout, se rend compte qu'ils se sont trompés d'un jour et que le pari a été réussi ! Expliquez ce paradoxe.	*CARRE(lages)* - Adrien, Arnaud, Endymion, Grégoire, Thomas, Thomas **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)** CARRE(lages) est une société de pavages spécialisée dans la disposition de pavés carrés dans des pièces carrées. Est-il toujours possible de paver avec un nombre de carrés choisi par le client ? Découvrirez-vous la méthode secrète utilisée par cette société ? Cette méthode est-elle applicable avec des triangles équilatéraux ? A vous de le découvrir...
Les tours de Hanoï - Alexi, Axel, Gauthier, Paul **Collège Pilâtre de Rozier (Ars sur Moselle)** 1. Trouver une solution pour le déplacement de 3;4;5;6;7;8 tours. 2. Trouver le nombre de coups minimum pour 3;4;5;6;7;8 tours. 3. Comment trouver le nombre minimum de déplacements pour 12; 20 ou n tours ? 4. Construire le robot et concevoir et construire à l'imprimante 3D les éléments nécessaires pour faire déplacer les tours au robot. 5. Programmer le déplacement des tours sous scratch, puis programmer le robot.	*Décomposer un nombre à l'aide de la suite de Fibonacci* - Benjamin, Chloé, Emilie, Liz, Loïc, Maeva, Morgane, Selin, Serifie **Lycée Bichat (Luneville)** On peut décomposer les entiers naturels selon les puissances de 2 : on écrit alors l'entier en base 2. Peut-on décomposer les entiers naturels en utilisant les termes consécutifs de la suite de Fibonacci ? La décomposition est-elle unique ?
Ricochets - Eloise, Mana, Tom **Collège Sainte Véronique (Liège)** Un robot se déplace sur la grille $[0,n]^2$ de N^2 en ligne droite horizontale ou verticale. A chaque obstacle ou bord de la grille, il peut soit faire demi-tour, soit tourner d'1/4 de tour vers la gauche ou vers la droite. Quel est le nombre minimum d'obstacles à placer sur la grille pour que le robot puisse visiter tous les points de la grille? Et si on change les dimensions de la grille?	*Bip bip et Coyotte* - Charlotte, Jérémy, Pauline, Timéo **Lycée Loritz (Nancy)** Coyote a enfermé Bip bip dans un cercle de mélasse. Coyote court quatre fois plus vite que Bip bip autour du cercle. Trouver une ou plusieurs stratégies de sortie.

Session 2 local s94	Session 2 local s74
n carrés - Lucas, Sam **Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)** Combien peut-on former d'objets en empilant n carrés ?	*Tas de cailloux* - Adrian, William **Lycée Saint-Jacques (Liège)** On part d'un tas de n cailloux. On sépare ce tas en deux sous-tas, on multiplie les nombres de cailloux de ces 2 tas et on note le résultat obtenu. Ensuite, on répète l'opération pour chaque sous-tas ayant au moins 2 cailloux, et on continue ainsi de suite jusqu'à n'avoir que des tas d'un seul caillou. Enfin, on additionne tous les nombres obtenus précédemment. En fonction du cheminement choisi, quelles sont les sommes que l'on peut obtenir ? Pourquoi ?
Le solitaire bulgare - Callune, Camille, Emilie, Maud, Océane, Solène **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** Proche de l'awalé, mais avec une ligne infinie de cavités: le jeu consiste à prendre une graine dans chaque cavité pour les déposer dans une cavité vide. Peut-on prévoir l'évolution de la répartition des graines dans les cavités ?	*Les fractions égyptiennes* - Laura, Thelma, Zoé **Athénée Royal Liège 1** Peut-on toujours écrire une fraction inférieure à 1 comme une somme de fractions distinctes dont les numérateurs sont tous égaux à 1 ? Cette décomposition est-elle unique ? Peut- on déterminer le nombre minimum de fractions de la décomposition ?
Créons des routes - Adem, Guillaume, Quesie, Victoria **Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)** Il était une fois une ville comptant 10 maisons mais aucune route. Il était fort difficile de se déplacer par temps de pluie car les voitures avaient une fâcheuse tendance à s'embourber. Après de nombreuses plaintes des habitants, le bourgmestre se décide enfin à faire construire des routes et demande donc à des experts de préparer un plan de ville sur base de 2 principes simples et sains : 1) il faut que n'importe quelle paire de maisons soit joignable par la route; 2) il faut que cela coûte le moins possible.	*Le blackjack* - Adrilong, Eva, Justine, Yannick **Institut Saint-Michel (Verviers)**

Session 3 local 304	Session 3 local 204
Le carreleur de pentagone - Emy, Hélène, Marie **Collège Camille Claudel (Paris)** - Agathe, Clara, Lina, Manon, Micha **Collège du Moulin des Prés (Paris)** On partage un pentagone à l'aide de ses diagonales.	*Alors les nombres … qui est premier ?* - Beysa, Sema Nur **Collège les Hauts de Blémont (Metz)** - Djanaé, Line, Wafa, Wahiba **Collège Rabelais (Metz)** Qu'est-ce qu'un nombre premier ? Retrouvez tous les nombres premiers inférieurs à 200 en expliquant la (les) méthode(s) utilisée(s). Euler et Gauss, deux des plus grands mathématiciens de tous les temps, avaient bien compris l'importance des nombres premiers, ainsi que leur mystère. Les nombres premiers ont une importance centrale en arithmétique, car tout nombre se décompose de façon unique en produit d'un ou de plusieurs facteurs premiers. Donnez quelques exemples. Vous pouvez vous amuser à demander à un tiers de donner un nombre quelconque et vous le décomposerez en un produit de facteurs premiers. Quelle est la fréquence de ces nombres entre 0 et 200 ? Des propriétés additives étonnantes. Additionnez deux nombres premiers et regardez les valeurs obtenues (de 2 à 37). Et la différence entre deux nombres premiers consécutifs ?
Attrapez-les tous 2^{e} partie - Angus, Brillac, Gauthier, Rahoul, Remy **Collège Saint Dominique (Nancy)** Combien faut-il acheter de paquets de cartes Pokémon pour obtenir la collection complète ? Approche probabiliste.	*Plaquage au sol* - Anaelle, Eline, Lucine, Mathis **Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)** Il existe 17 façons de recouvrir le sol (et donc le plan) à l'aide d'une figure. Comment faire ? Et avec quelle(s) forme(s) ?

Le puzzle qui rend fou - Achille, Alix, Amélie, Gabriel, Gwendal, Heddie, Paul Loup, Thomas, Yann **Collège Chepfer (Villers lès Nancy)** Un puzzle est composé de 9 pièces carrées. Sur chaque arrête d'une pièce, il y a une queue ou une tête de tortue. Les têtes et les queues sont coloriées de quatre couleurs différentes. Il s'agit d'assembler les pièces pour former un carré (3x3) en respectant les couleurs et les formes des tortues. On ne peut pas assembler deux têtes ou deux queues de tortues, deux couleurs différentes. Cela semble tout simple, et pourtant, ce puzzle est redoutablement difficile ! Le but de ce sujet est de mieux comprendre pourquoi.	*Un peu d'ordre s'il vous plaît !* - Cécile, Mateo, Mathias, Rachel, Tristan, Victoire **Lycée Vauban (Luxembourg)** Drago Malefoy dispose de jetons numérotés. Il les mélange sur une ligne face à Harry Potter, face cachée Harry Potter doit les remettre dans l'ordre Pour cela, Harry peut faire seulement deux choses : - Harry peut montrer deux jetons à Drago, et lui demander lequel est le plus petit; - Harry peut demander à Drago d'échanger deux jetons. Vous devez donc aider Harry à remettre les jetons dans l'ordre avec le moins possible de comparaisons. A la fin de la manche les joueurs changent de rôle. Vous devez donc aider Harry à les cacher de telle sorte qu'il faille beaucoup de comparaisons à Drago pour les remettre dans l'ordre.
Conditions d'une perspective harmonieuse - Cholticha, Kelly, Monique, Sokeïna **Collège Camille Claudel (Paris)**	*Kayla et son fiancé* - Alexia, Aurore, Dorian, Marc, Mathilde, Mathias, Maxime, Sarah **Collège Kieffer (Bitche)** Matam et Kayar sont deux villages africains voisins. Non loin de là, coule une rivière. Kayla est une jeune fille qui habite à Matam avec ses parents. Elle est amoureuse d'Oko, un jeune guerrier qui habite à Kayar. Kayla est pressée de retrouver Oko. Voulez-vous l'aider ?

Session 3 local s94	Session 3 local s74
La géométrie dans le monde de Pacman - Bérénice, Clément, Corentin, Hanna, Inès, Marine **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** - Elliot, Gaëtan **Lycée Louis Lapicque (Epinal)** A quoi ressemble la trajectoire de Pacman lorsqu'on lui impulse une trajectoire rectiligne au départ ? Ou bien lorsqu'il veut prendre le plus court chemin pour aller d'un point à un autre? Qu'est-ce qu'un cercle dans le monde de Pacman ?	*Un ascenseur contrariant* - Adrien, Arthur **Collège Sainte Véronique (Liège)** - Julie, Lucas, Pierre **Institut du Sacré Cœur (Visé)** Un hôtel possède un nombre infini d'étages, mais son ascenseur ne permet de monter ou descendre les étages que par 5 ou 7. Peut-on réserver une chambre à n'importe quel étage ? Et si le nombre d'étages est fini ? Et si on remplace 5 et 7 par d'autres nombres ? Ces questions ont trouvé en grande partie leurs réponses et … ont soulevé d'autres questions. Et si de 2 nombres, on passe à 3, 4, … nombres ? et si l'on souhaite minimiser le nombre de déplacements de l'ascenseur ?
Critères de divisibilité - Augustin, Louise, Philippe **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)** Que deviennent les critères de divisibilité lorsqu'on change de base ?	*Ricochets* - Andreas, Quentin **Lycée Saint-Jacques (Liège)** Un robot se déplace sur une grille en ligne droite horizontale ou verticale. A chaque obstacle ou bord de la grille, il peut soit faire demi-tour, soit tourner d'un quart de tour vers la gauche ou vers la droite. Il faut trouver le nombre minimum d'obstacles à placer sur la grille pour que le robot puisse visiter les points de la grille. Ensuite, il faudrait généraliser pour une grille quelconque.
Flocon de Koch - Loïc, Lucie **Athénée Royal Air Pur (Seraing)** Le cristal de glace représenté ci-dessous se construit de manière itérative. Devinez-vous comment il a été construit ? Quelles sont les propriétés d'une telle figure ? Que valent son aire et son périmètre ? Peut-on construire d'autres figures avec les mêmes caractéristiques ? Ces quelques questions ont trouvé leurs solutions et nous ont ouvert d'autres voies de réflexion … 	*Approximation du nombre π* - Adin, Mazlum, Nabil **Institut Saint Michel (Verviers)**

Cinémath

- Alexandre, Aurore, François, Julien, Simon, Thibault, Thomas
  Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)

Un groupe de n écoles souhaitent se rassembler pour visionner un film. Chaque école contient n types de classes différents et propose à un seul étudiant de chaque type de classes de participer à l'évènement. La salle de cinéma contient n rangées de n sièges.
Est-il possible de placer les n^2 étudiants dans la salle de cinéma de sorte que chaque étudiant y soit et que, sur chaque rangée et chaque colonne de sièges, on ne retrouve ni deux écoles identiques, ni deux types de classes identiques ?

Le problème du directeur du LCD

- Edith, Laura, Sadat
  Lycée classique de Diekirch

Le directeur du Lycée Classique de Diekirch (LCD) désire engager des surveillants de façon à ce que toutes les salles soient supervisées pendant les pauses (le couloir compte comme salle). Or le directeur est radin et engager des surveillants coûte très cher. Dès lors, il essaie de minimiser le nombre de surveillants. D'autre part, même si les surveillants ont une vision parfaite de 360 degrés autour d'eux ils sont aussi très fainéants et ils préfèrent donc passer leurs pauses immobiles et adossés contre un coin du mur au lieu de se promener dans les couloirs.
Question : Quel est le nombre minimum de surveillants à engager et où faut-il les positionner ?
Le but est de formaliser le problème en termes mathématiques.

<table>
<tr><th>Session 4 local 304</th><th>Session 4 local 204</th></tr>
<tr><td>Erathostène (le rayon de la terre)
- Clara, Thuc Nghi, William
Collège Camille Claudel (Paris)</td><td>Pli...Papier...DRAGON !
- Benjamin, Cyrille, Guillaume, Mathieu, Maxime, Quentin
Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)

Des plis, en dépit de nos plis, dépliant tous nos plis forment un dragon plutôt qu'une plie.</td></tr>
<tr><td>Qui veut se faire Cram-er ?
- Estelle, Margot, Samia
Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)

Découvrons le jeu de Cram. Quelle(s) stratégie(s) pour gagner ?</td><td>La géométrie du savon
- Antonin, Emma, Julia, Justin, Marie, Mélanie, Vivien
Lycée Tessier (Bitche)

Comment relier trois points avec le minimum de canalisations.</td></tr>
<tr><th>Session 4 local s94</th><th>Session 4 local s74</th></tr>
<tr><td>Les critères de divisibilité (en binaire et autres bases)
- Christophe, Guillaume, Guillaume
Athénée Royal Liège 1

Vous connaissez les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5 ... pour des nombres écrits en base 10. Que deviennent ces critères si on travaille dans une autre base ?</td><td>Ecarts entre les nombres
- Andrew, Benoît, Quentin, Yacine
Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)

On dispose d'une suite d'au moins 3 nombres dont on calcule les écarts. On recommence en calculant les écarts de ces derniers et on continue ainsi de suite tant qu'on n'a pas obtenu que des écarts nuls. Arrive-t-on à une ligne de 0 ? Que se passe-t-il si on a 2,4,... nombres ?</td></tr>
<tr><td>La fin d'une époque
- Jean-François, Kevin, Quentin
Institut du Sacré Cœur (Visé)</td><td>Le plus grand pont du monde en Kapla
- Arthur, Mai Linh, Nicolas
Lycée Saint Dominique (Nancy)

En empilant simplement des planchettes de Kapla (sans renfort), quelle est la longueur maximale du pont que l'on peut réaliser ? Existe-t-il une longueur impossible à dépasser ?</td></tr>
</table>

Session 5 local 304	Session 5 local 204
Les nombres infinis à droite - Quentin, Xuan Long **Collège Camille Claudel (Paris)** - Antoine, Baptiste, Enzo, Hippolyte, Nathan **Collège du Moulin des Prés (Paris)**	*Multiplication en chaîne* - Davan, Eloi **Collège Sainte Véronique (Liège)** - Chistelle, Kyllian, Shania **Institut du Sacré Cœur** On considère un nombre et on multiple ces chiffres pour obtenir un nouveau nombre. On recommence le procédé jusqu'à obtenir un nombre avec un unique chiffre que l'on appelle point final. Le nombre d'étapes nécessaires pour que le procédé aboutisse à un point final, peut-il être infini ? Peut-il être majoré en fonction du nombre de chiffres ? Peut-il valeur n'importe quel entier ?
Puzzles de polygones - Benjamin, Camélia, Océane **Collège les Hauts de Blémont (Metz)** Peut-on réaliser par découpage la quadrature de n'importe quel polygone ? Il vous faudra tout d'abord expliquer ce qu'est la quadrature d'un polygone. Peut-on découper un triangle pour obtenir un rectangle ? Si oui, expliquez comment, si non dire pourquoi. Peut-on découper un polygone de plus de 3 côtés (sauf rectangle et carré) pour obtenir un triangle ? puis un rectangle ? Peut-on découper un rectangle pour obtenir un carré ? Vous pourrez proposer un puzzle de votre création.	*Un ascenseur contrariant* - Ali, Arthur, Bastien **AR Air Pur Seraing** Un hôtel possède un nombre infini d'étages, mais son ascenseur ne permet de monter ou descendre les étages que par 5 ou 7. Peut-on réserver une chambre à n'importe quel étage ? Et si le nombre d'étages est fini ? Et si on remplace 5 et 7 par d'autres nombres ? Ces questions ont trouvé en grande partie leurs réponses et … ont soulevé d'autres questions. Et si de 2 nombres, on passe à 3, 4, … nombres ? et si l'on souhaite minimiser le nombre de déplacements de l'ascenseur ?
Pixels - Laurent, Léo, Maxime, Maxime **Lycée Loritz (Nancy)** On considère une image où chaque pixel est codé sur une valeur de 0 (noir) à 256 (blanc). On part d'un dessin quelconque où chaque point est soit rouge soit bleu. Prouver (ou prouver son contraire) qu'on peut reproduire l'image avec les règles suivantes : on ne peut noircir que des rectangles si et seulement si les quatre coins sont de la même couleur (rouge ou bleue).	

Session 5 local s94	Session 5 local s74
Le billard - Adrien, Andy, Charly, Maël, Vadim **Lycée Pierre Mendes-France (Epinal)** - Charles, Emeline, Manon, Nolan, Teddy **Lycée Louis Lapicque (Epinal)** En rebondissant sur les côtés d'un billard, une balle peut-elle toucher les côtés dans n'importe quel ordre ? Peut-on trouver une trajectoire correspondant à un « mot » donné ?	*Dessin d'un seul coup de crayon* - Célestine, Charlotte, Laure, Lucie **Lycée Teyssier (Bitche)** - Adrien, Clémentine, Enzo, Jasmin, Julie, Lorenzo, Nora, Quentin **Collège Kieffer (Bitche)** Pablo Picasso était un célèbre peintre. Il aimait dessiner d'un seul trait (c'est-à-dire sans lever le crayon). Observez sa technique, essayez de reproduire ses dessins, inventez-en vous aussi...
Une histoire de fractions - Clarisse, Fanny **Lycée Saint-Jacques (Liège)** On essaye de répondre à la question suivante. « Pour n'importe quels naturels p et q, peut-on toujours écrire $p/q=1/m+1/n+1/l+....$ avec m,n,l... différents »	*Géométrie du robot* - Boris, Bruno, Guillaume, Loïck, Lucas, Victor **Collège Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)** Norbert le robot a son monde bien à lui : il ne peut se déplacer que dans deux directions perpendiculaires. Cependant, Norbert a bien étudié ses mathématiques, et ses résultats s'avèrent particuliers...

Stands samedi 29 avril de 10h30 à 12h30

Jeu Awalé Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)	*Puzzle de polygones* Collège les Hauts de Blémont (Metz)	*Tas de cailloux* Lycée Saint Jacques (Liège)
Ecarts entre les nombres Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)	*Géométrie du robot* Collège Saint Benoît Saint Servais (Liège)	*Les tours de Hanoï* Collège Pilâtre de Rozier (Ars sur Moselle)
N carrés Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)	*Critères de divisibilité* Collège Saint Benoît Saint Servais (Liège)	*Les tours de Hanoï suite* Collège Pilâtre de Rozier (Ars sur Moselle)
Créons des routes Collège Don Bosco (Woluwe-St-Lambert)	*La pile de disques* Collège Saint Benoît Saint Servais (Liège)	*Attrapez-les tous (deuxième partie)* Collège Saint Dominique (Nancy)
Le blackjack Institut Saint Michel (Verviers)	*Cinémath* Collège Saint Benoît Saint Servais (Liège)	*Le tour du monde en 80 jours* Collège Saint Dominique (Nancy)
Approximation du nombre π Institut Saint Michel (Verviers)	*Pli … papier… DRAGON !* Collège Saint Benoît Saint Servais (Liège)	*Le plus grand pont du monde en kapla* Lycée Saint Dominique (Nancy)
Alors les nombres, qui est premier ? Collège Rabelais (Metz)	*CARRE(lages)* Collège Saint Benoît Saint Servais (Liège)	*Décomposer un nombre à l'aide des termes de la suite de Fibonacci* Lycée Bichat (Luneville)
Cryptographie Collège Rabelais (Metz)	*Ricochets* Lycée Saint Jacques (Liège)	*Un peu d'ordre s'il vous plaît !* Lycée Vauban (Luxembourg)
Alors les nombres, qui est premier ? Collège les Hauts de Blémont (Metz)	*Une histoire de fractions* Lycée Saint Jacques (Liège)	*Coloriage de la carte du monde* DIC Collège (Liège)
Cryptographie Collège les Hauts de Blémont (Metz)	*Le tas de billes* Lycée Saint Jacques (Liège)	

Stands samedi 29 avril de 13h30 à 15h30

Awalé mathématique Lycée Pierre Mendes France (Epinal)	*Paveurs de pentagones* Collège du Moulin des Prés (Paris)	*Plaquage au sol* Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)
La géométrie dans le monde de Pacman Lycée Pierre Mendes France (Epinal)	*Nombres infinis à droite* Collège du Moulin des Prés (Paris)	*Qui veut se faire cram-er ?* Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)
Le solitaire bulgare Lycée Pierre Mendes France (Epinal)	*Le carreleur à grands carrés* Collège du Moulin des Prés (Paris)	*Pancakes party* Collège Edmond de Goncourt (Pulnoy)
Le billard Lycée Pierre Mendes France (Epinal)	*Le pays dont on ne s'échappe jamais* Collège Chepfer (Villers lez Nancy)	*Pixels* Lycée Loritz (Nancy)
Les nombres infinis à droite Collège Camille Claudel (Paris)	*Le puzzle qui rend fou* Collège Chepfer (Villers lez Nancy)	*Bip bip et Coyotte* Lycée Loritz (Nancy)
Le carreleur de pentagones Collège Camille Claudel (Paris)	*Multiplication en chaîne* Collège Sainte Véronique (Liège)	*Flexagone* Lycée Loritz (Nancy)
Le carreleur à grands carrés Collège Camille Claudel (Paris)	*Un ascenseur contrariant* Collège Sainte Véronique (Liège)	*Le jeu des échelles et des serpents* Lycée classique de Diekirch (Diekirch)
Conditions d'une perspective harmonieuse Collège Camille Claudel (Paris)	*Mathémagie* Collège Sainte Véronique (Liège)	*Le problème du directeur du LCD* Lycée classique de Diekirch (Diekirch)
Erathostène (le rayon de la terre) Collège Camille Claudel (Paris)	*Ricochets* Collège Sainte Véronique (Liège)	
Approximation de π par des polygones Collège Camille Claudel (Paris)	*Par quoi divise-t-on ?* Collège Sainte Véronique (Liège)	

Nos partenaires belges

Avec le soutien de la DGO6
Département du développement Technologique

Nos partenaires français

Calendrier

Avant la rentrée :

Les enseignants désireux de lancer un atelier prennent contact avec la coordination MeJ Belgique.

À la rentrée :

• Les enseignants font de la publicité pour MeJ dans leur l'école et l'initiative est proposée au plus grand nombre d'élèves possible.

• Les chercheurs viennent faire une présentation des sujets de recherche aux élèves intéressés.

• Les élèves choisissent un sujet.

• Inscription des ateliers sur www.mathenjeans.be.

Fin octobre :

Inscription au congrès et réservation des logements.

Printemps :

Le congrès.

Avant la fin de l'année scolaire :

Rédaction et soumission d'un article.

MATh.en.JEANS .be

Plus d'infos?
www.mathenjeans.be

LIÈGE université

ISBN 978-2-9601143-7-9
EAN 9782960114379