

Géométrie Robotique

Victor DUBART, Bruno DULAR, Boris MARTIN,
Lucas MICHEL, Guillaume NEUTTIENS, Loïck SALMON,
avec l'aide de Julien JEUNECHAMPS et Julien RASKIN de l'ULg

2016 - 2017

Ceci est la version abrégée d'un article plus complet, contenant plus de démonstrations et de détails techniques. Nous encourageons les lecteurs enthousiastes à le consulter pour en découvrir encore plus sur la géométrie robotique.

Dans un espace à deux dimensions, Norbert le robot ne peut se déplacer que parallèlement aux axes. Quel monde étrange va prendre forme sous ses yeux ? A quelles lois répond cette nouvelle géométrie ?

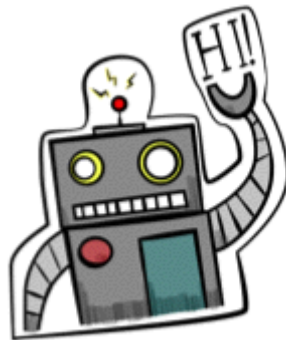


FIGURE 1 – Entrez dans le Monde de Norbert

1 Introduction à la distance robotique

Imaginons que Norbert, du point de coordonnées $(0,0)$ décide d'aller recharger ses batteries au point $B(x,y)$. Plusieurs chemins lui sont possibles.

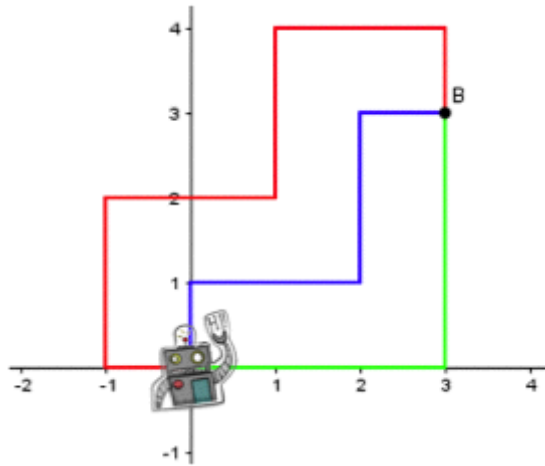


FIGURE 2 – Trajets robotiques

La "distance robotique" sera définie comme la longueur du chemin le plus court pour Norbert entre deux points. Intuitivement, cela signifie que les chemins ne peuvent pas faire "demi tour" comme le chemin en rouge. En revanche, les chemins bleu et vert sont tous deux valides, et ont la même longueur. On constate donc que le chemin le plus court n'est pas unique, mais que tous ont la même longueur : somme des longueurs verticales + somme des longueurs horizontales

Plus rigoureusement, la formule de la distance robotique entre un point $A(x_A, y_A)$ et un point $B(x_B, y_B)$ sera ainsi définie par

$$d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

Sur l'exemple ci-dessus, la distance entre Norbert et le point B vaut 6.

1.1 Une géométrie étrange

Si cette nouvelle distance vous paraît encore anodine et sans effet, jetez donc un oeil à la figure suivante.

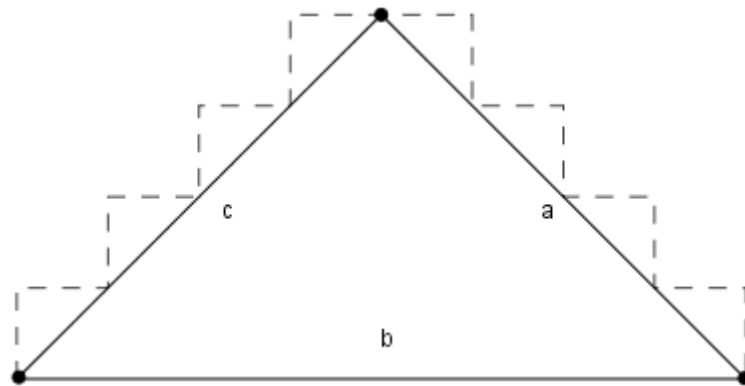


FIGURE 3 – Le triangle impossible

L'hypoténuse b est de longueur 8. Mais en appliquant la nouvelle notion de distance robotique, on trouve que les côtés a et c sont eux aussi de longueur 8! Dans le monde de Norbert, il existe donc des triangles RECTANGLES et EQUILATERAUX, chose qui est tout simplement impossible dans notre géométrie usuelle.

2 Le cercle robotique : quand ça ne tourne plus rond...

Maintenant que nous sommes convaincus que cette nouvelle géométrie réserve bien des surprises, intéressons nous à une figure simple : le cercle.

Le cercle est défini comme "l'ensemble des points à égale distance du centre". Mais pour Norbert, cette distance n'est plus du tout la même. Que devient le cercle en géométrie robotique ? Le résultat est surprenant : un carré. Plus exactement, un carré sur la pointe dont les diagonales sont parallèles aux axes.

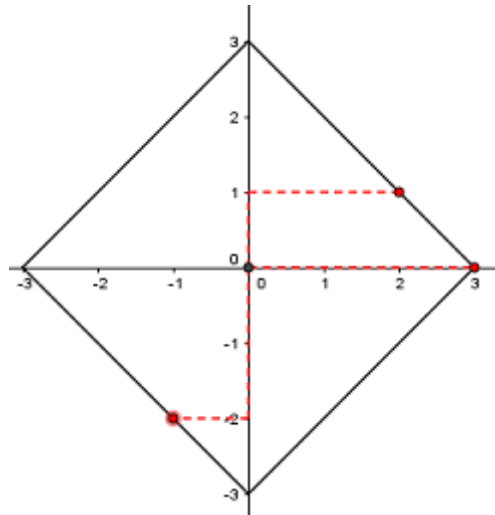


FIGURE 4 – Cercle robotique de rayon 3

2.1 Démonstration synthétique

Prouvons que tout point E du segment [AB] est à égale distance robotique du centre O.

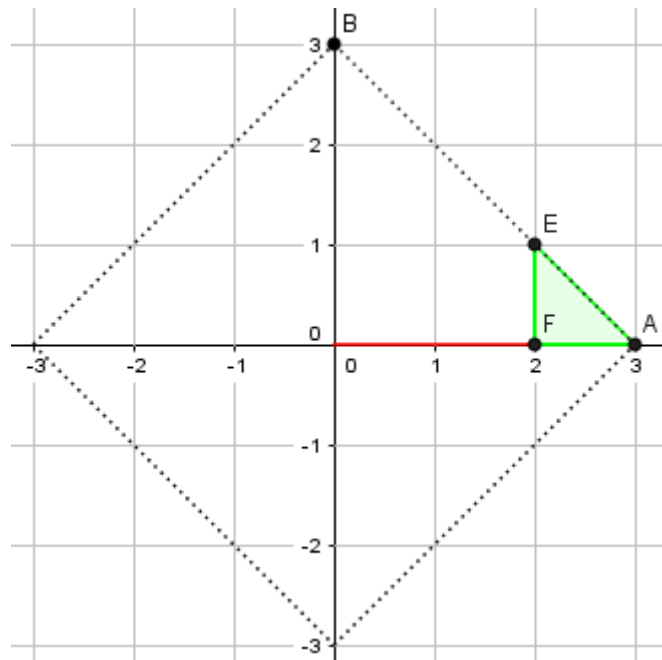


FIGURE 5 – démonstration

On place A sur Ox tel que $r = |AO|$ et on considère le triangle AFE rectangle en F. La droite AB forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses, donc $|\widehat{FAE}| = 45^\circ$. Puisque AFE rectangle en F et $|\widehat{FAE}| = 45^\circ$, AFE est isocèle en F et $|FE| = |FA|$.

Revenons à notre distance robotique. La longueur robotique du rayon vaut $r_R = |OF| + |FA|$ (segment rouge + segment vert) et $|OE|_R = |OF| + |FE|$. Comme $|FE| = |FA|$, on a bien $|OE|_R = |EA| = r$. Tous les points E de [AB] sont donc à une distance r du centre O. CQFD.

De plus, la réciproque est vraie puisque pour tout point d'abscisse x entre $[0, r]$ il n'existe qu'une seule ordonnée possible pour former le triangle isocèle nécessaire.

La démonstration est similaire pour les autres segments et quadrants du cercle robotique.

2.2 Démonstration analytique

Nous pouvons également démontrer ceci par la géométrie analytique :

On recherche le lieu des points $M(x_M, y_M)$ tels que $d_R(M, O) = r$

Par définition :

$$d(M, O) = |x_M| + |y_M| = r$$

Il y a 4 cas à étudier :

-si $x_M > 0$ et $y_M > 0$:

$$y_M = r - x_M$$

-si $x_M > 0$ et $y_M < 0$:

$$y_M = x_M - r$$

-si $x_M < 0$ et $y_M > 0$:

$$y_M = x_M + r$$

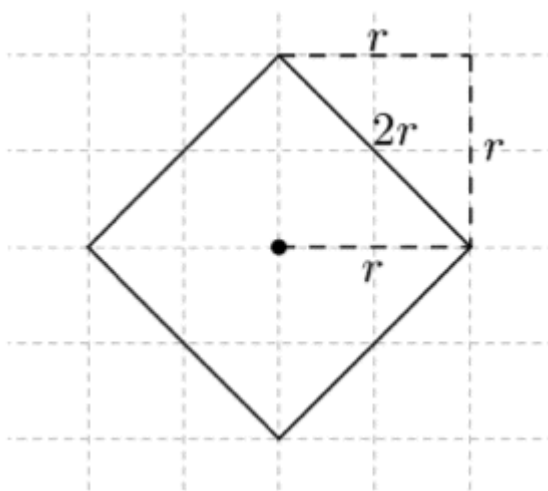
-si $x_M < 0$ et $y_M < 0$:

$$y_M = -x_M - r$$

Nous avons donc quatre équations de droites dont les segments forment bien un carré. CQFD

2.3 $2+2 = \pi$

Mémoriser les décimales de pi ? Voilà un jeu auquel bon nombre de mathématiciens se prêtent. Mais il ne serait pas intelligent de défier Norbert, puisque lui connaît TOUTES les décimales de « son » pi.



$$\pi_R = \frac{\text{Circonférence}}{\text{Diamètre}} = \frac{8r}{2r} = 4$$

FIGURE 6 – $\pi = 4$

Voyez plutôt. On définit pi par le rapport entre la circonférence et le diamètre. Soit un cercle de diamètre $2r$, de par sa forme rectiligne on peut aisément déterminer sa circonférence (robotique, bien entendu) : $8r$. Dès lors, $\pi = 4$.

Norbert devra toutefois admettre qu'il a un avantage injuste sur nous pauvres humains condamnés à vivre en compagnie d'un pi transcendant

3 Médiatrices robotiques

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est définie comme : "le lieu des points à égale distance de A et de B". En géométrie euclidienne, il s'agit d'une droite perpendiculaire au milieu du segment considéré et qui possède une propriété intéressante :

"Dans tout triangle, les médiatrices des 3 côtés sont concourantes et leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle".

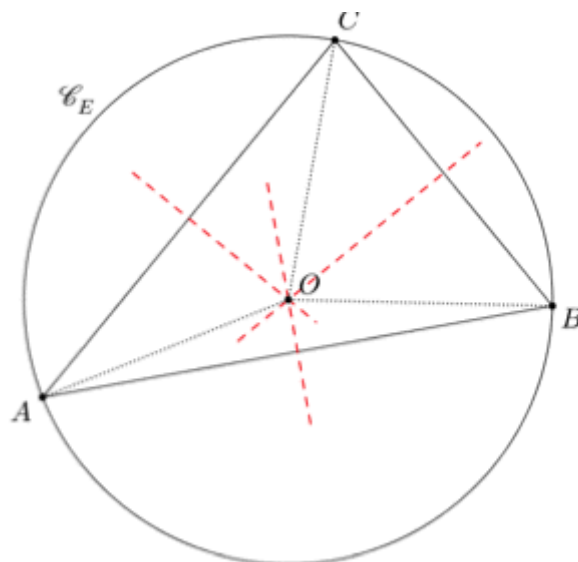


FIGURE 7 – Le point d'intersection des médiatrices et le centre du cercle circonscrit

Voyons ce que deviennent les médiatrices pour Norbert. Par définition, la médiatrice de $[AB]$ sera le lieu des points $M(x_M, y_M)$ tels que $d_R(M, A) = d_R(M, B)$, ou encore :

$$|x_M - x_A| + |y_M - y_A| = |x_M - x_B| + |y_M - y_B| \quad (1)$$

La résolution complète de cette équation, longue et fastidieuse, est disponible dans la version complète de cet article. Nous nous contenterons ici de présenter les différents résultats. La forme de la médiatrice dépend du coefficient angulaire (le pente) de la droite AB :

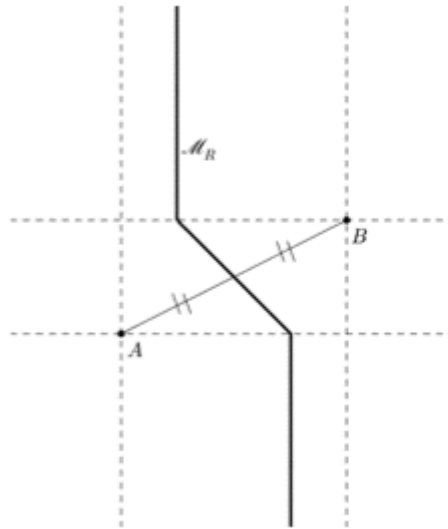


FIGURE 8 – Lorsque la pente appartient à $]-1, 1[$, la médiatrice est un 'zigzag' vertical

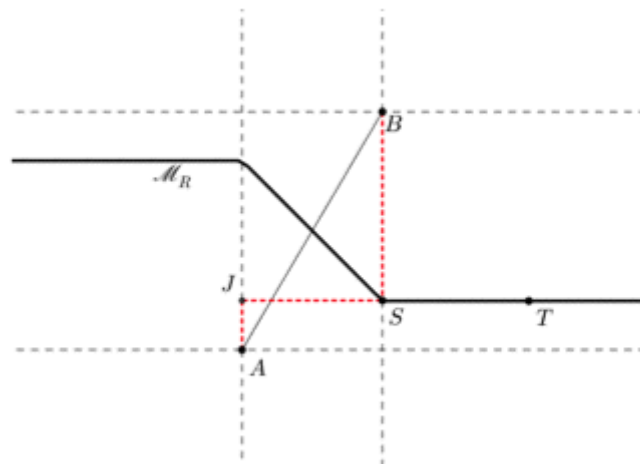


FIGURE 9 – Lorsque la pente appartient à $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, la médiatrice est un zigzag horizontal

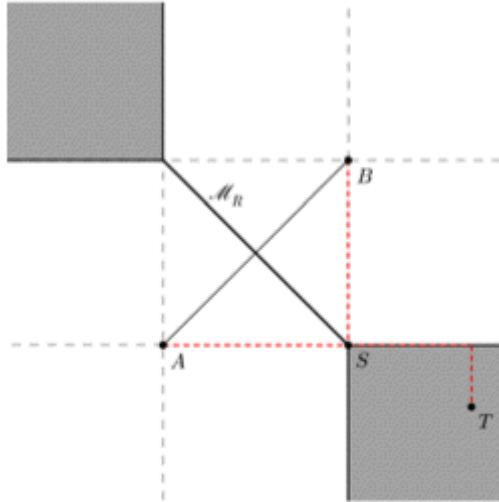


FIGURE 10 – Lorsque la pente vaut -1 ou 1, la médiatrice est... étrange...

3.1 Pourquoi des quarts de plan ?

Le dernier cas semble plutôt intrigant : lorsque la pente vaut 1 (ou -1) la médiatrice, plutôt qu'être une ligne brisée, devient une portion entière de plan. Tentons d'expliquer ce résultat surprenant : de par la définition de la distance robotique, lorsqu'un point T est dans une zone grisée, on peut écrire :

$$d_R(T, A) = d_R(T, S) + d_R(S, A) \text{ et } d_R(T, B) = d_R(T, S) + d_R(S, B)$$

Comme S appartient au lieu, on a $d_R(S, A) = d_R(S, B)$

$$\text{donc } d_R(T, A) = d_R(T, B)$$

N'importe quel point T de la zone grisée vérifie donc l'équation de la médiatrice.

4 Cercles circonscrits

"Le point de concours des médiatrices d'un triangle est le centre de l'unique cercle circonscrit à ce triangle". Ceci est vrai pour tout triangle en géométrie euclidienne. Mais en robotique... Essayons plutôt.

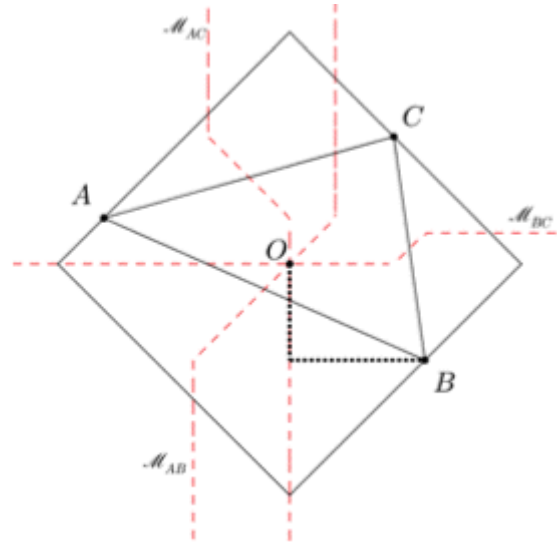


FIGURE 11 – A première vue, tout semble normal...

Mais si nous essayons un triangle plus "particulier", on trouve des triangles qui ne s'inscrivent dans aucun cercle...

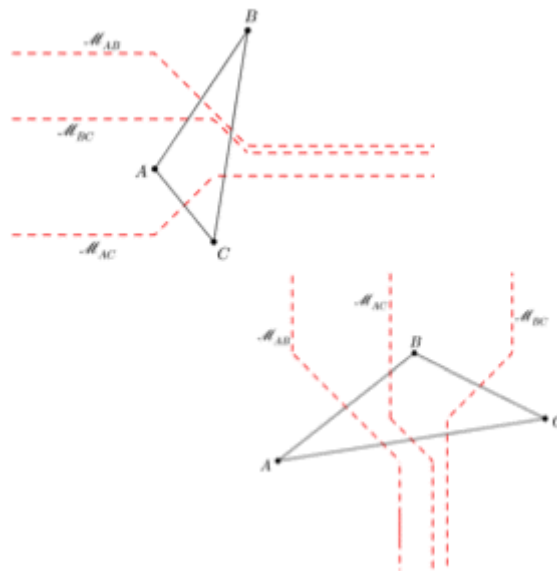


FIGURE 12 – Raté

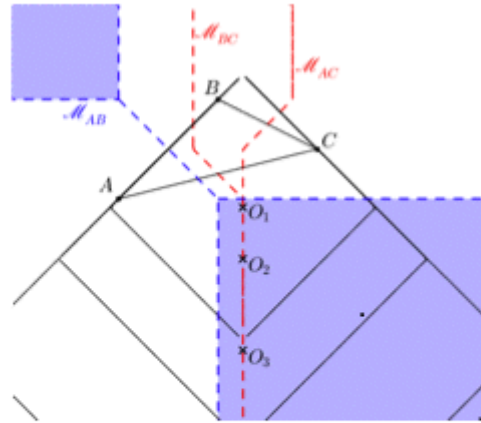


FIGURE 13 – Ou dans une infinité!

Les médiatrices robotiques sont parfois sécantes, parfois parallèles et parfois confondues!

Heureusement, le splendide critère d'inscriptibilité robotique va nous permettre d'y voir plus clair.

4.1 Critère d'inscriptibilité : le théorème du boulon

Pourquoi théorème du boulon? Tout simplement parce que Norbert aime les boulons. Trêve de plaisanteries et place à la rigueur mathématique.

Ce critère fait intervenir les pentes des côtés des triangles. Par facilité, nous appellerons "pente horizontale" une pente comprise dans $]-1, 1[$ et "pente verticale" une pente comprise dans $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

A noter qu'une pente horizontale induit une médiatrice verticale et vice-versa (cfr ci-dessus).

Théorème 1 (Théorème du boulon). *Un triangle est inscriptible dans un et un seul cercle robotique ssi un il possède un côté de pente verticale et un autre de pente horizontale.*

Condition suffisante : Tout triangle qui possède un côté de pente horizontale et un autre de pente verticale est inscriptible dans un et un seul cercle.

Evident puisqu'une des médiatrices sera verticale et l'autre horizontale. Elles se coupent donc en 1 et un seul point, centre de l'unique cercle circonscrit.

Condition nécessaire : Tout triangle dont les côtés sont soit tous de pente verticale soit tous de pente horizontale n'est pas inscriptible.

Nous démontrerons le cas où les trois côtés sont de pente horizontale. Le cas où les trois pentes sont verticales se démontre de manière similaire.

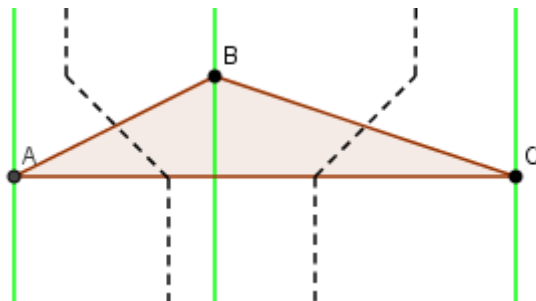


FIGURE 14 – Théorème du boulon

Comme toutes les pentes sont horizontales, on peut facilement ordonner les sommets (les classer de droite à gauche). Nous divisons le plan en deux sections limitées par les droites verticales (en vert) issues de chacun des sommets.

Les pentes sont horizontales, donc les médiatrices sont verticales. Vu ci-dessus, les abscisses des points de la médiatrice de gauche (resp droite) sont strictement comprises entre celles de A et B (resp B et C). Dès lors, chaque médiatrice est limitée à sa portion de plan. Elles n'ont donc aucune intersection et le triangle n'est pas inscriptible. CQFD

4.2 Cas particulier : la médiatrice plan.

Nous avons vu qu'une pente de $+1$ induisait une étrange médiatrice-plan. Par conséquent, les médiatrices d'un triangle dont un côté est de pente $+1$ auront une infinité d'intersections et seront inscriptibles dans une infinité de cercles. (cfr fig.13)

5 Les coniques

Pour clore la géométrie analytique robotique, nous présentons ici les "coniques robotiques". Les démonstrations sont similaires à celle du cercle, mais sont trop longues et fastidieuses pour cet article. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article complet sur le site Math En Jeans. Nous nous contenterons de présenter les différents résultats.

5.1 L'ellipse

"Lieu des points dont le somme des distances à deux points nommés "foyers" est constant.

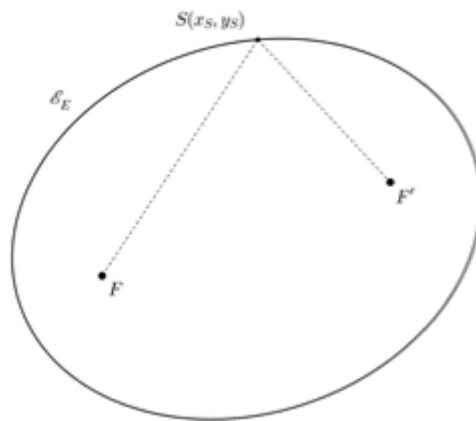


FIGURE 15 – Ellipse euclidienne

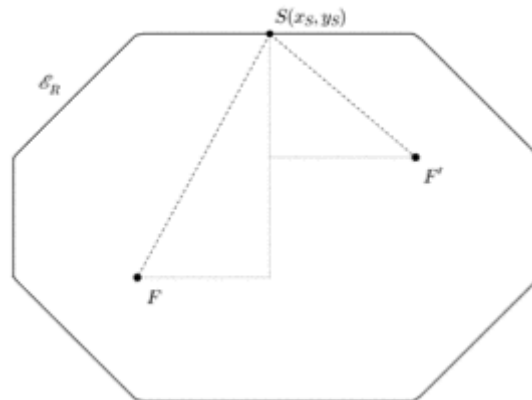


FIGURE 16 – Ellipse robotique

5.2 L'hyperbole

"Lieu des points dont la différence (en valeur absolue) des distances à deux points nommés foyers est une constante"

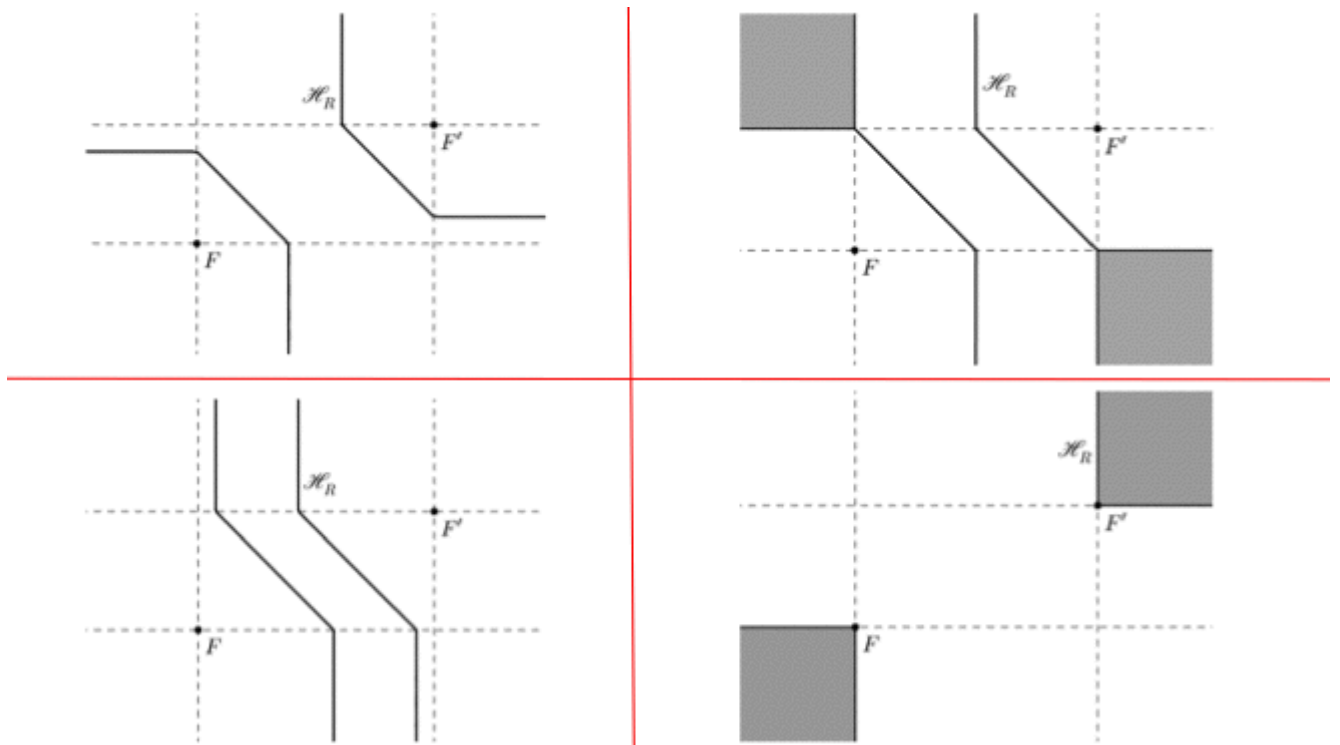


FIGURE 17 – Hyperbole robotique

Ci-dessus, le forme de l'hyperbole dépend de la valeur de la constante k . En particulier, lorsque k vaut le double de la distance robotique entre les foyers, on retrouve des quarts de plan semblables aux médiatrices.

5.3 La parabole

"Lieu des points dont la distance à une droite d (directrice) est égale à la distance à un point F (foyer)"

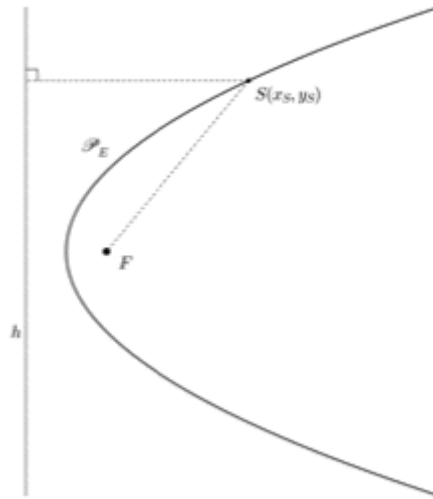


FIGURE 18 – Parabole euclidienne

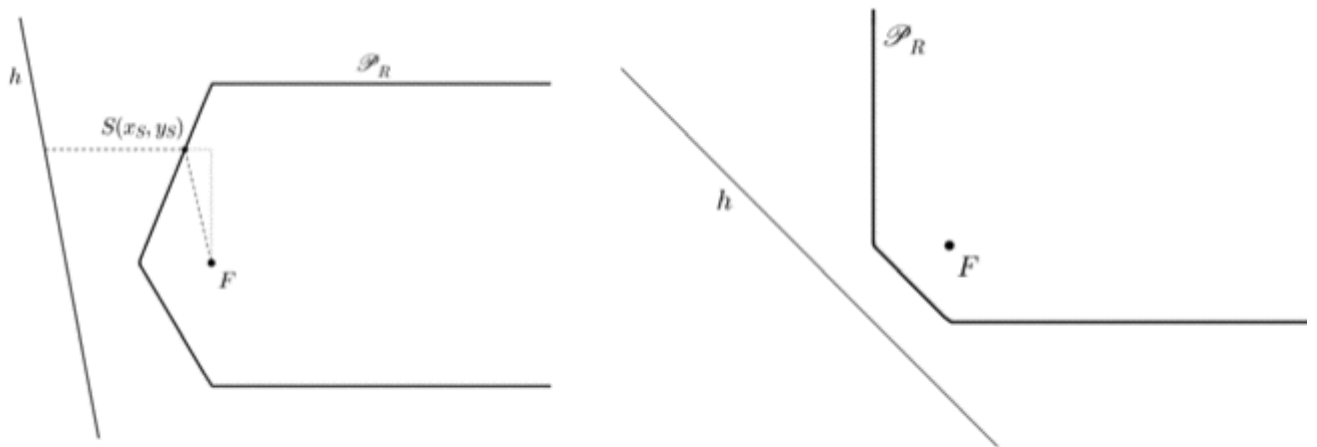


FIGURE 19 – Parabole "générale" et cas particulier avec une pente de -1 ou 1

6 Angles robotiques

Vous pensiez qu'un changement de distance n'aurait aucune influence sur les angles ? A vue d'oeil, rien ne semble différent, on peut même le vérifier à l'équerre : rien ne change. A moins que notre équerre ne soit plus valide dans ce monde...

6.1 Le robian, ou comment ne pas se fier aux apparences...

Reprenons depuis le début : qu'est-ce qu'un radian ? Le radian est l'amplitude de l'angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de même longueur que le rayon.

Une minute... Qui vient de parler de cercle ! ? C'est ici que les Romains s'empoignèrent.



FIGURE 20 – Le romain Aplusbégalix empoignant Norbert pour une raison encore obscure.

Si l'unité de mesure d'un angle est définie en fonction du cercle et que la forme de celui-ci change (cfr supra), alors la définition de l'angle ne peut que changer. D'où une nouvelle unité : le *robian*

Le robian sera défini comme : l'amplitude d'un angle au centre d'un cercle robotique qui intercepte un arc de même longueur robotique que le rayon.

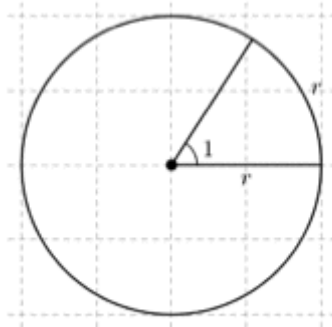


FIGURE 21 – Un radian

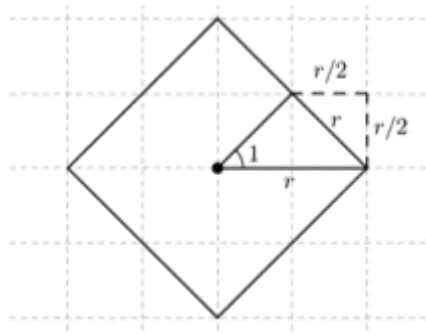


FIGURE 22 – Un robian

Les plus observateurs s'écrieront : "facile! On voit qu'un angle d'un robian vaut $\frac{\pi}{4}$ "
 Oui. Et non. Regardez plutôt le schéma suivant :

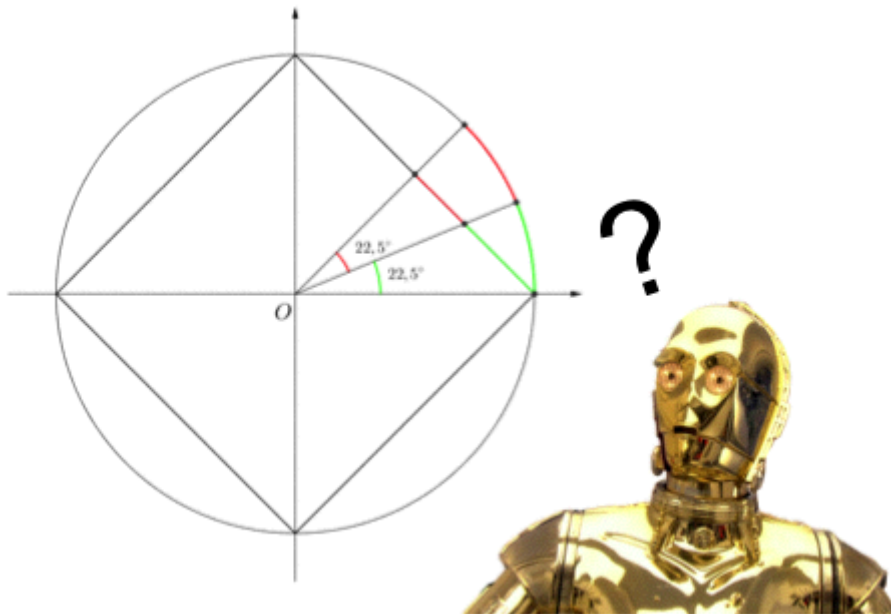


FIGURE 23 – Le cousin de Norbert, perplexe quant aux robians.

Les angles rouges et verts ont la même amplitude euclidienne : $\frac{\pi}{8}$. Pourtant, force est de constater que les arcs interceptés sur le cercle robotique ne sont pas les mêmes ! (le segment vert est plus long que le rouge)

De ceci, on peut tirer trois conclusion :

-Deux angles de même amplitude euclidienne peuvent avoir des amplitudes robotiques différentes selon leur orientation.

-La conversion radian-robian n'est pas linéaire (proportionnelle).

-On peut remercier le Créateur d'avoir fait le monde euclidien. Parce que bon, on n'a pas tous un cerveau de robot et Norbert commence à compliquer sérieusement...

6.2 Bonus : l'équerre robotique

Pour te remercier de ton assiduité, lecteur, et pour te préparer au déluge de formules qui va s'abattre sur toi, nous te remettons cette splendide équerre en robians qui te permettra de mesurer comme un vrai robot.

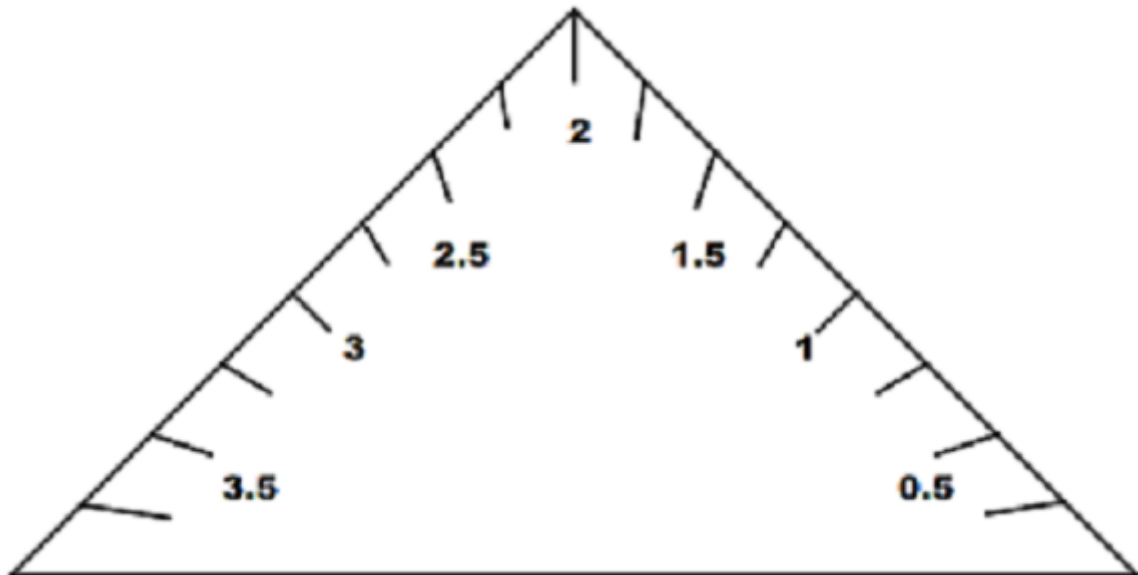


FIGURE 24 – Equerre en robians, graduations de 0,25 robians

6.3 La fonction ψ

La conversion n'étant pas linéaire, il a fallu créer une nouvelle méthode : la fonction ψ . Il s'agit d'une fonction telle que :

$$\psi(\alpha) = \alpha_R$$

où α est un angle en radians et α_R son amplitude en robians.

Mais comment exprimer cette fonction ? Ci-dessous, nous allons établir le raisonnement pour un angle du premier quadrant.

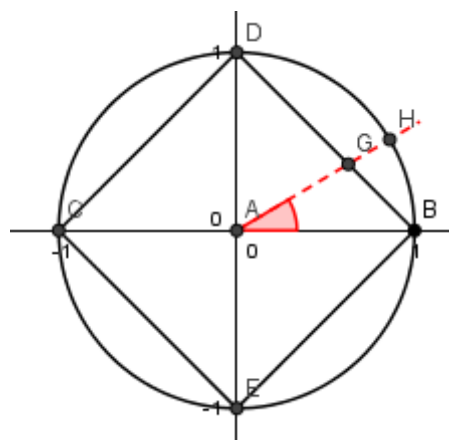


FIGURE 25 – La fonction ϕ

L'amplitude robotique d'un angle est la longueur robotique de l'arc qu'il intercepte sur le cercle robotique.

Soit un angle α (en rouge ci-dessus) axé au centre d'un cercle de rayon 1. L'amplitude robotique sera la longueur $|GB|$ tandis que l'amplitude euclidienne sera la longueur de l'arc $|HB|$

Nous devons déterminer les coordonnées de G. Or, G est l'intersection de AH avec DB. Sachant que $AH \equiv y = x \tan \alpha$ et $DB \equiv y = -x + 1$ dans le premier quadrant.

$$G = AH \cap DB \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ x(\tan \alpha + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \\ x = \frac{1}{1 + \tan \alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow G = \left(\frac{1}{1 + \tan \alpha}, \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right).$$

La longueur de l'arc robotique intercepté par $\widehat{AOB} \in Q_I$ est, par la définition de la distance robotique, égale à :

$$d_R(A, G) = \left| 1 - \frac{1}{1 + \tan \alpha} \right| + \left| 0 - \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right| = 1 - \frac{1}{1 + \tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}.$$

Dès lors,

$$\psi(\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

Par un raisonnement similaire, on trouve les formules pour les autres quadrants :

Si $\widehat{AOB} \in Q_{II}$ on a :

$$2 + \frac{2}{1 - \tan \alpha} = 2 + \frac{2}{1 - \frac{-1}{\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}} = 2 + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}.$$

Si $\widehat{AOB} \in Q_{III}$ on a :

$$4 + \frac{2 \tan(\alpha - \pi)}{1 + \tan(\alpha - \pi)},$$

Si $\widehat{AOB} \in Q_{IV}$ on a :

$$6 + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})}{1 + \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})}.$$

Toutes ces formules peuvent se combiner en une seule fonction certes assez douloureuse mais concluante :

$$\psi(\alpha) = 2 \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{\pi}{2} \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor)}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{2} \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor)}.$$

NB : $\lfloor x \rfloor$ signifie "partie entière de x". Par exemple, $\lfloor 3,7 \rfloor = 3$

6.4 Précisions sur $\psi(\alpha)$

- La fonction $\psi(\alpha)$ est une formule clé de la géométrie robotique.
- Elle convertit un angle euclidien α en un angle robotique $\psi(\alpha)$.
- Elle n'est pas linéaire : si l'amplitude euclidienne double, il n'en est pas de même pour l'amplitude robotique correspondante.
- Elle ne fonctionne que pour des angles axés (dont un des côtés forme un angle de 0 radian avec Ox). Toutefois, n'importe quel angle peut être décomposé en deux angles axés, dont il suffit de soustraire les amplitudes.
- $\psi(\pi) = 4$. Logique, puisque π robotique vaut 4 (cfr supra).
- Les parties entières ne sont qu'un formalisme pour considérer tous les quadrants en une seule formule. En fait, elles indiquent à la fonction dans quel quadrant se trouve l'angle considéré.

7 Tri-robo-métrie

Nous disposons maintenant du nécessaire pour déterminer les fonctions trigonométriques, que nous définirons de la même manière qu'en géométrie euclidienne.

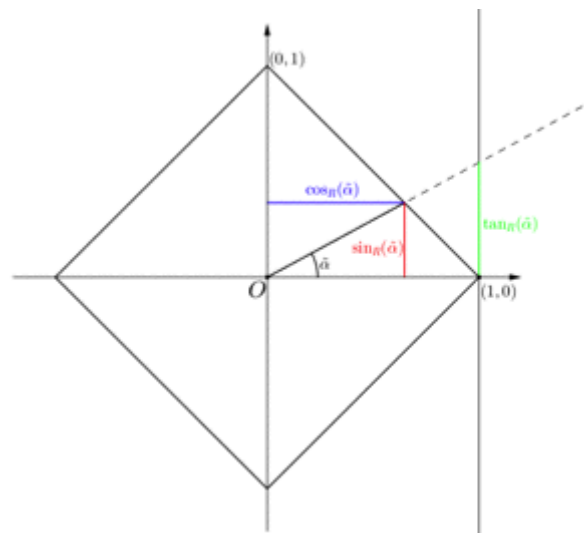


FIGURE 26 – Les fonctions sir et cor

Le raisonnement complet est disponible dans la version détaillée de l'article sur le site Math En Jeans. Néanmoins, on peut intuitivement comprendre l'allure des fonctions "siRus sir" et "cosiRus cor" suivantes :

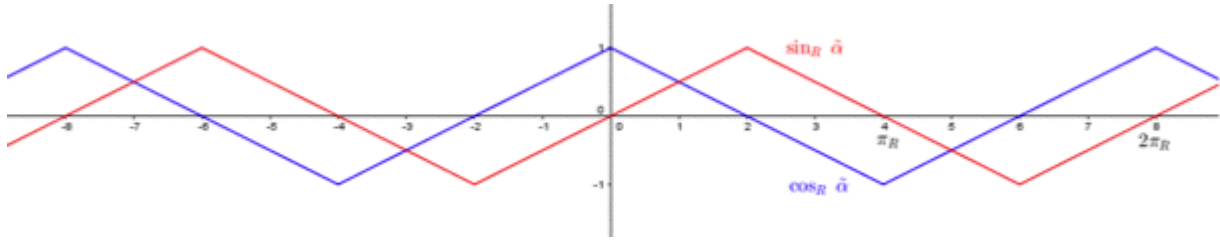


FIGURE 27 – Les fonctions *sir* et *cor*

7.1 Formules tri-robo-métriques : Norbert se simplifie la vie

Si la géométrie robotique et ses conversions d'angles peuvent sembler abominablement complexes, les additions d'arcs se révèlent d'une étonnante simplicité. Tout d'abord, de la définition de la distance robotique, il découle tout naturellement que la formule fondamentale de tri-robo-métrie est : $|sir + cor| = 1$

7.2 Formules d'addition

Pour ceux d'entre nous qui rechignent à étudier les insipides formules d'additions trigonométriques euclidiennes, voici un petit rappel :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

Etonnamment, les additions d'arcs se révèlent plus simples en géométrie robotique :
Si α et β sont situés du même côté de l'axe Ox

$$cor(\alpha + \beta) = -1 + |cor\alpha + cor\beta|.$$

Si α et β sont situés de part et d'autre de l'axe Ox

$$cor(\alpha + \beta) = 1 - |cor\alpha + cor\beta|$$

Mieux encore, si les deux angles et leur somme sont dans le premier quadrant, on obtient une formule qui ferait cauchemarder n'importe quel professeur euclidien :

$$sir(\alpha + \beta) = sir\alpha + sir\beta$$

8 Somme des angles d'un triangle

En géométrie euclidienne, la somme des angles d'un triangle vaut π . Oui, mais pour Norbert, π vaut 4...

8.1 Théorème de la vis

Après le boulon, la vis. Démontrons donc ce splendide théorème, apothéose de nos recherches :

Théorème 2 (Théorème de la vis). *La somme des amplitudes robotiques des angles d'un triangle vaut 4*

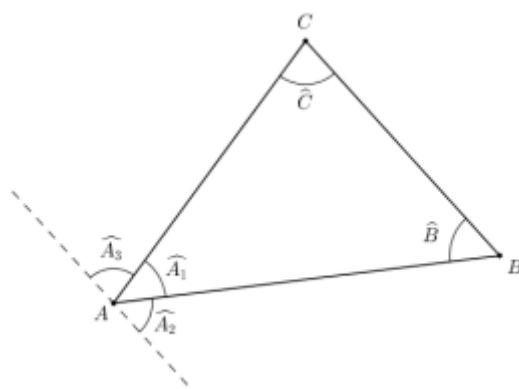


FIGURE 28 – Théorème de la vis

Démonstration. Soit un triangle ABC. Nous nommons les angles de ce triangle respectivement $\widehat{A}_1, \widehat{B}, \widehat{C}$.

Par A, on mène une droite parallèle à BC. Les angles formés par cette droite et les côtés du triangle sont \widehat{A}_2 et \widehat{A}_3

Les angles \widehat{A}_2 et \widehat{B} sont alternes internes, de même que \widehat{A}_3 et \widehat{C} . On a donc :

$$|\widehat{A}_2| = |\widehat{B}|$$

$$|\widehat{A}_3| = |\widehat{C}|$$

Les angles $\widehat{A}_3, \widehat{A}_1, \widehat{A}_2$ forment un angle plat, donc $|\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2| = \pi$ radians. Donc la somme de leurs amplitudes robotiques vaut $\psi(\pi) = 4$ robians.

$$|\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2|_R = 4$$

Par transitivité,

$$|\widehat{C} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}|_R = 4$$

□



FIGURE 29 – Norbert se voit remettre la Médaille FIELDS pour sa démonstration du "théorème de la vis"

9 Les lunettes de Norbert : déformation du plan

Cher lecteur, c'est avec regret que nous annonçons le dernier épisode du "Monde selon Norbert". Mais terminons en beauté : nous sommes maintenant en mesure de comprendre comment Norbert voit le monde et même de redessiner notre Univers selon sa vision des choses.

9.1 Une nouvelle définition de distance

Nous avons vu au début de l'article qu'un segment changeait de longueur robotique lors d'une rotation. Nous pouvons donc exprimer la distance entre un point A et l'origine O en fonction de l'angle formé par AO et l'axe Ox.

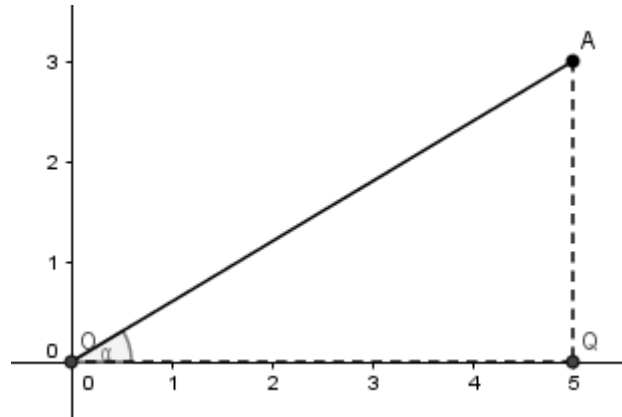


FIGURE 30 – distance "angulaire"

9.2 Déformation du plan

Soit A un point du plan, O l'origine du repère, Q la projection orthogonale de A sur Ox et α l'angle \widehat{AOQ} . Par définition,

$$d(A, O) = |x_A - x_O| + |y_A - y_O| = |OQ| + |QA|$$

Or, dans le triangle rectangle AQO,

$$|AQ| = |OA| \sin(\alpha) \text{ et } |OQ| = |OA| \cos(\alpha)$$

Dès lors,

$$d_R(O, A) = d(O, A) | \sin(\alpha) + \cos(\alpha) |$$

Pour comprendre comment Norbert voit le monde, il suffit d'appliquer à chaque point la transformation suivante :

- On mesure sa distance euclidienne à O.
- On convertit cette distance avec la formule précédente (25).
- On place le nouveau point sur notre repère.

En appliquant cette transformation à tous les points d'un repère orthonormé, on obtient un repère robotique.

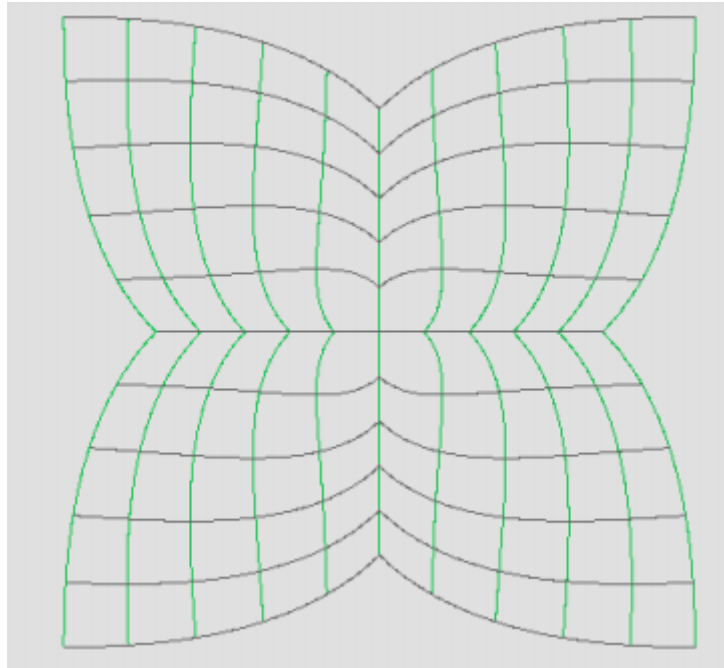


FIGURE 31 – Le repère robotique

Pour boucler la boucle, tentons de voir comment Norbert voit un carré sur la pointe (en bleu sur le schéma)

Le résultat est...

Suspense...

Un cercle. Voilà qui est rassurant !

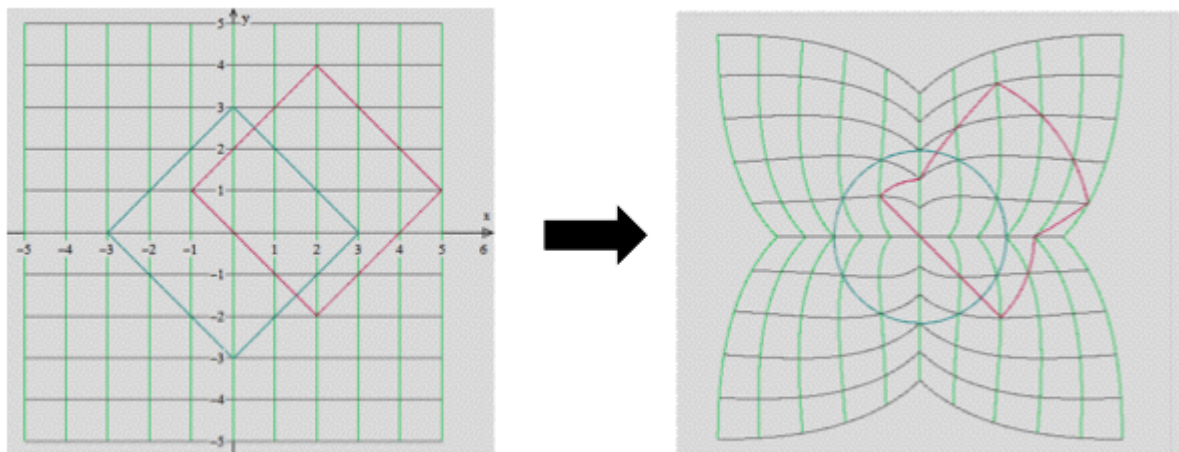


FIGURE 32 – Transformation d'un cercle centré et d'un cercle non-centré

Pour donner à notre article une teneur intellectuelle, nous pouvons signaler que cette transformation se traduit par une transformation complexe du plan de Gauss (oui, Norbert aime les mots savants) :

$$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} : z \mapsto z(|\sin \theta| + |\cos \theta|),$$

Notons que :

- Cette fonction ne traduit les distances que par rapport à l'origine, c'est donc la distance "vue" par Norbert lorsqu'il se trouve en (0,0). Sur la figure 32, le carré bleu (centré par rapport à l'origine) donne bien un cercle, mais le carré rouge non-centré ne donne qu'un étrange "tartinoïde", car son centre n'est pas l'origine du repère.

NB : Tartinoïde : nm. du latin *tartinus*. Terme inventé par les auteurs pour désigner la transformation chaotique des figures non centrées.

- Elle montre comment Norbert voit notre monde. Nous pourrions également appliquer la transformation réciproque pour voir comment, munis de lunettes robotiques, nous verrions le monde de Norbert.

- Pour être complets, nous pourrions appliquer une autre transformation qui modifierait les angles à l'aide de la fonction ψ . Néanmoins, dû au fait que $\pi=4$, ceci est impossible à représenter sur un plan (essayez de tourner un compas sur 4 radians sans que les traits ne se superposent...)

- Pour les curieux, il serait peut-être possible de le représenter sur un paraboloidé, surface qui quant à elle existe bel et bien

10 Pour aller plus loin

Norbert reviendra peut-être un jour pour résoudre l'étrange énigme de l'aire robotique, pour nous apporter un théorème de Pythagore robotisé, travailler dans un espace à 3 dimensions (et plus si affinités). Certaines de ces questions sont déjà traitées dans la version longue de notre article, disponible sur le site Math En Jeans.

Le travail présenté ici ne représente en réalité qu'une infime partie d'une notion mathématique appelée "métrique". Il existe une infinité d'autres distances qui, comme la distance robotique, nous dévoileraient une infinité d'univers étranges. Il ne tient qu'au mathématicien rêveur d'explorer ces nouveaux mondes, armé d'un crayon et de patience.

Norbert et nous-mêmes tenons particulièrement à remercier les organisateurs du congrès Math En Jeans, Mr. Sourdeau, Mr. Heeren, Mr. Raskin, Mme. Esser l'association de parents et le collège St-Benoit St-servais et, bien sûr Mr. Jeunechamps (dit J^2).



FIGURE 33 – Merci pour tout !