



Université  
de Liège

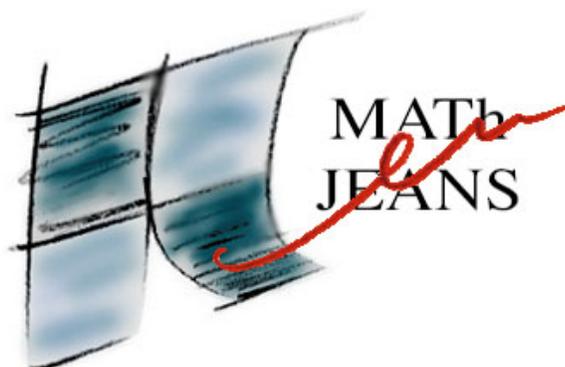


# Géométrie Robotique

---

Victor DUBART, Bruno DULAR, Boris MARTIN,  
Lucas MICHEL, Guillaume NEUTTIENS,  
avec l'aide de Julien JEUNECHAMPS et Julien RASKIN de l'ULg

2016 - 2017





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Présentation du problème . . . . .	4
1.2	Formalisation . . . . .	5
1.3	Isométries de la géométrie robotique . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Lieux géométriques</b>	<b>8</b>
2.1	Rappels . . . . .	8
2.2	Lieux géométriques robotiques . . . . .	8
2.3	Cercle robotique . . . . .	8
2.4	Médiatrice robotique . . . . .	11
2.5	Inscriptibilité d'un triangle dans un cercle . . . . .	13
2.6	Ellipse robotique . . . . .	17
2.7	Hyperbole robotique . . . . .	21
2.8	Parabole robotique . . . . .	24
2.9	Remarque générale . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Trigonométrie et angles robotiques</b>	<b>28</b>
3.1	Valeur de $\pi$ robotique . . . . .	28
3.2	Mesure de l'amplitude d'un angle robotique . . . . .	28
3.3	Fonctions trigonométriques robotiques . . . . .	34
3.4	Analyse des fonctions trigonométriques robotiques . . . . .	35
3.5	Angles associés et identités trigonométriques . . . . .	38
3.6	Théorème de conservation de l'angle droit . . . . .	44
3.7	Amplitude robotique d'un angle non-axé . . . . .	44
3.8	Propriétés des angles . . . . .	45
3.9	Fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle axé . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Conversion des distances</b>	<b>49</b>
4.1	Relations liant les distances robotiques et euclidiennes . . . . .	49
4.2	Définition de la norme robotique . . . . .	50
4.3	Transformation du plan . . . . .	51
4.4	Visualisation de la transformation $f$ . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Remerciements</b>	<b>54</b>



# 1 Introduction

## 1.1 Présentation du problème

Imaginons un robot, appelons le Norbert, qui ne sait se déplacer que parallèlement aux axes coordonnés orthonormés. Du point de vue de Norbert, la distance entre deux points est ainsi égale à la somme de la distance horizontale ( $\|OX$ ) et de la distance verticale ( $\|OY$ ) qu'il doit parcourir (voir Fig.2).

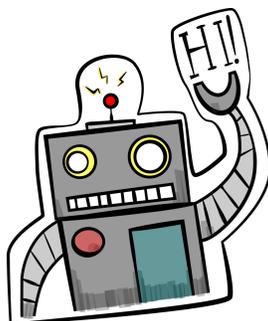


FIGURE 1 – Norbert le robot

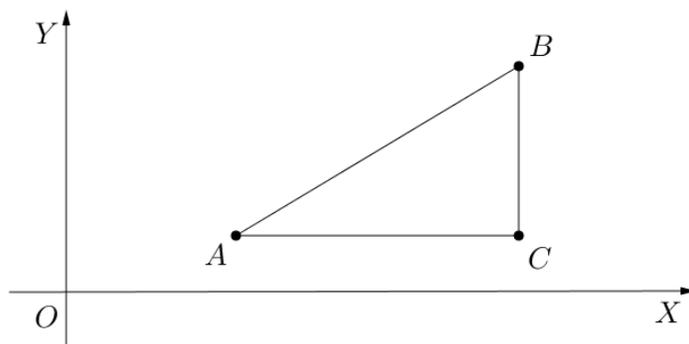


FIGURE 2 –  $d_R(A, B) = d_E(A, C) + d_E(C, B)$

Nous allons vite nous rendre compte que Norbert perçoit le monde d'une manière bien particulière. Que deviendra un cercle dans sa géométrie ? Ou encore, une ellipse ?

Notons que si Norbert ne se déplace que parallèlement aux axes, il n'est pas muni d'un moteur pas à pas mais qu'il évolue de façon continue.

Oubliez toutes vos notions de géométrie, tout ce qu'on a tenté de vous enseigner à l'école, et immergez-vous dans le monde de la GÉOMÉTRIE ROBOTIQUE<sup>1</sup>.

---

1. Dans cet article, nous opposerons souvent « Géométrie Euclidienne » et « Géométrie Robotique »

## 1.2 Formalisation

### 1.2.1 Notion de distance

Une fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une distance ssi, pour  $x, y, z \in X$ , elle satisfait ces conditions :

1.  $d(x, y) \geq 0$  (Non-négativité)
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Indiscernabilité)
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symétrie)
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Inégalité triangulaire)

### 1.2.2 Distance euclidienne

En géométrie euclidienne, la fonction distance associe à tout couple de points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  une valeur réelle qui correspond à la longueur du segment qui relie ces deux points.

$$d_E : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : d_E(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad (1)$$

Cette fonction est bien une distance.

### 1.2.3 Distance robotique

Norbert mesure la distance entre deux points en faisant la somme de la distance horizontale et de la distance verticale qu'il doit parcourir (Fig.3). Cette distance est robotiquement parlant minimale, mais son trajet n'est pas unique. La fonction distance robotique, notée  $d_R$ , associe donc à tout couple de points une valeur réelle qui correspond à la somme de la distance horizontale et de la distance verticale entre ces deux points.

$$d_R : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : d_R(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

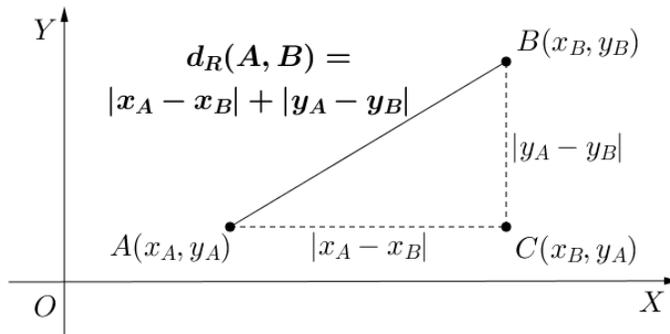


FIGURE 3 – Distance robotique

La fonction distance robotique  $d_R$  est donc bien une distance puisque :

1.  $d_R(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \geq 0$
2.  $d_R(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x_A - x_B| = 0 \\ |y_A - y_B| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow A = B$
3.  $d_R(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = d_R(B, A)$
4.  $d_R(A, C) \leq d_R(A, B) + d_R(B, C) \Leftrightarrow |x_A - x_C| + |y_A - y_C| \leq |x_A - x_B| + |y_A - y_B| + |x_B - x_C| + |y_B - y_C|$  car  $|r - s| = |(r - t) + (t - s)| \leq |r - t| + |t - s|$

### 1.2.4 Points « axés »

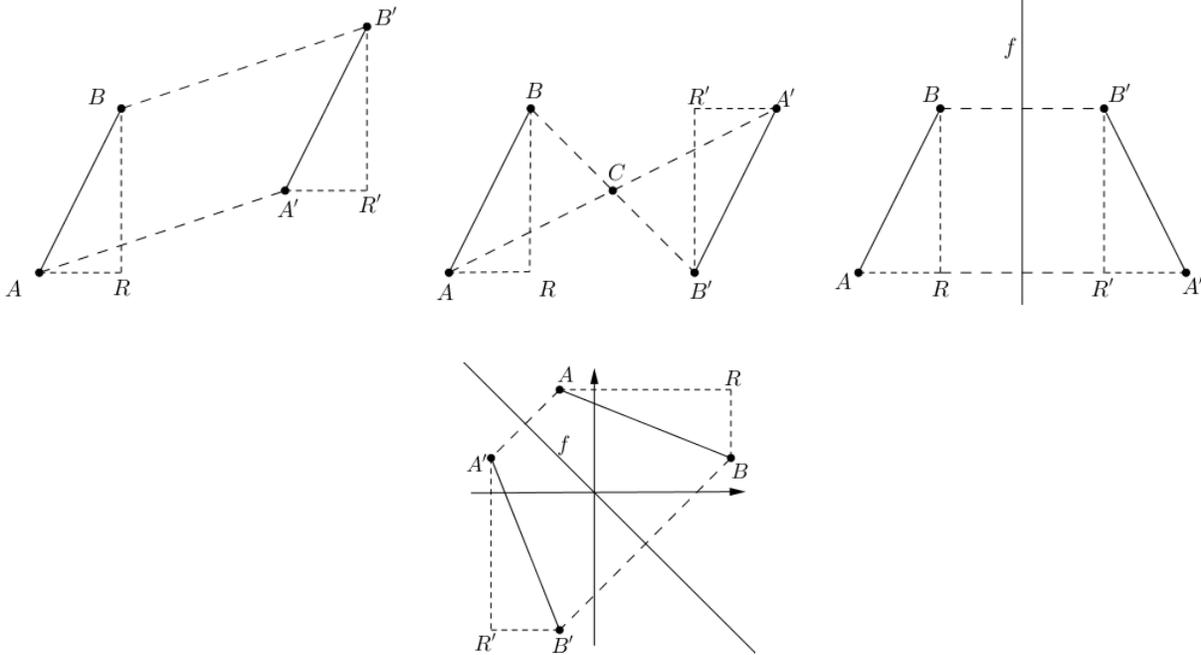
**Définition.** Deux points  $A$  et  $B$  sont axés ssi  $AB \parallel OX$  ou  $AB \parallel OY$ .

$A$  et  $B$  axés  $\Leftrightarrow A$  et  $B$  ont la même abscisse ou la même ordonnée.

$\Leftrightarrow d_R(A, B) = d_E(A, B)$  (noté alors  $AB$ )

## 1.3 Isométries de la géométrie robotique

**Théorème 1.1.** La translation, la symétrie centrale, la symétrie d'axe horizontal, vertical ou de pente  $\pm 1$  sont des isométries.



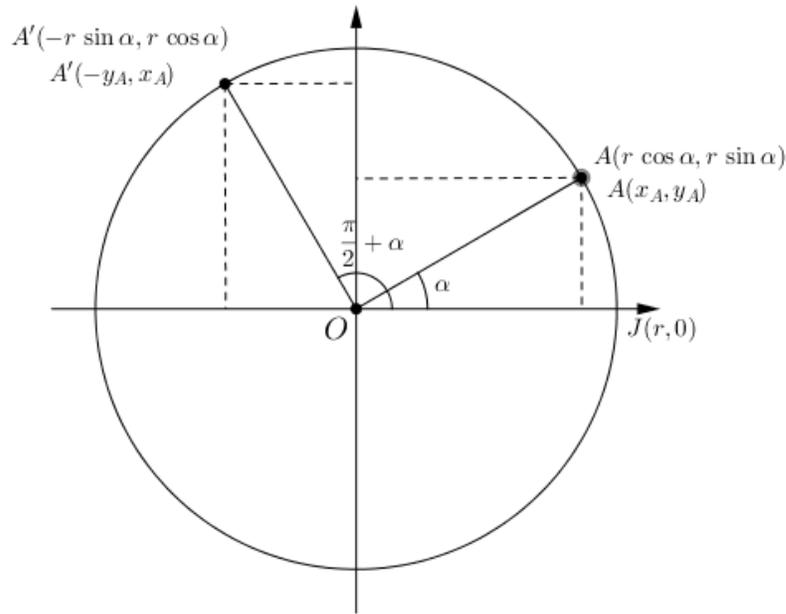
*Démonstration.* Dans les quatre cas, on a  $\triangle BAR = \triangle B'A'R'$  comme images l'un de l'autre par une isométrie euclidienne. Donc,

$$d_R(A, B) = d_E(A, R) + d_E(R, B) = d_E(A', R') + d_E(R', B') = d_R(A', B').$$

□

**Théorème 1.2.** *La rotation de  $\pm 90^\circ$  est une isométrie.*

*Démonstration.* Démontrons ce théorème pour une rotation de  $+90^\circ$ , l'autre cas est similaire. Supposons deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ . Sans perte de généralité, au prix d'une translation, nous choisissons un repère ayant pour origine le centre de rotation. Par analogie avec les angles anticomplémentaires, la rotation  $R_{O,+90^\circ}$  associe au point  $A$  son image  $A' = R_{O,+90^\circ}(A)$  de coordonnées  $A'(-y_A, x_A)$  et au point  $B$  son image  $B' = R_{O,+90^\circ}(B)$  de coordonnées  $B'(-y_B, x_B)$ .



Ainsi, nous avons

$$d_R(A', B') = |(-y_A) - (-y_B)| + |x_A - x_B| = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = d_R(A, B).$$

□

## 2 Lieux géométriques

### 2.1 Rappels

Un lieu géométrique est l'ensemble des points satisfaisant certaines conditions.

Par exemple, en géométrie euclidienne, le lieu des points situés à une distance  $r$  d'un point donné  $C(x_C, y_C)$  est appelé cercle.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_E &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : d_E(S, C) = r\} \\ &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2} = r\}\end{aligned}$$

Ainsi, l'écriture plus connue de l'équation cartésienne du cercle de centre  $C$  et de rayon  $r$  est :

$$\mathcal{C}_E \equiv (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

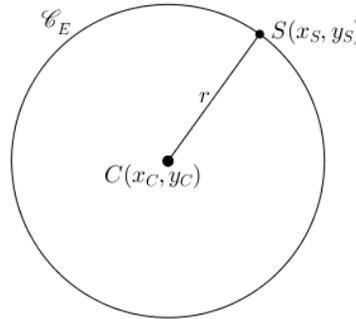


FIGURE 4 – Cercle euclidien

### 2.2 Lieux géométriques robotiques

Pour Norbert, le lieu des points situés à une distance  $r$  d'un point  $O$  ne sera pas le même. En effet, les lieux géométriques font intervenir la notion de distance, qui n'est pas partagée par Norbert et ses cousins euclidiens. Dans cette section, nous regarderons de plus près ce que deviennent les lieux géométriques les plus célèbres (cercle, médiatrice, ellipse, hyperbole, parabole) en géométrie robotique.

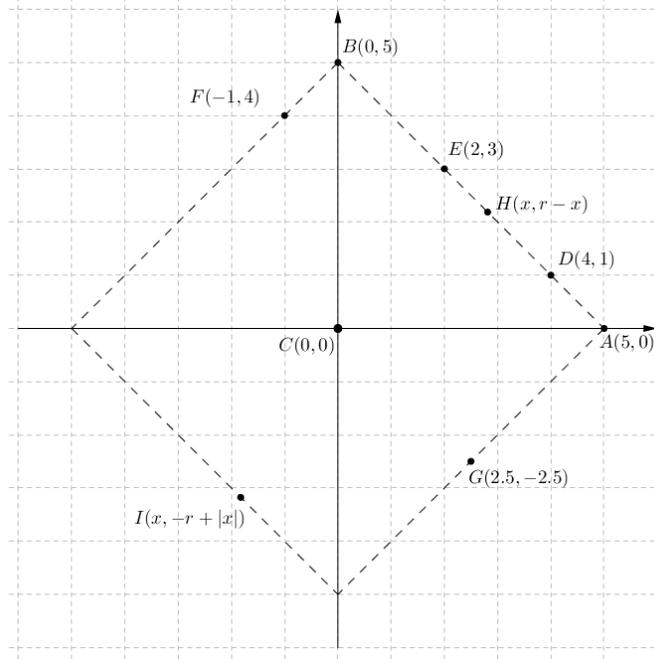
### 2.3 Cercle robotique

Comme précisé ci-dessus, le cercle  $\mathcal{C}$  est le lieu des points situés à une distance  $r$  d'un point  $C(x_C, y_C)$  appelé centre du cercle.

### 2.3.1 Approche géométrique

Si on veut construire un cercle de centre  $C(0,0)$  et de rayon  $r = 5$ , les points  $A(5,0)$  et  $B(0,5)$  sont deux premiers points triviaux. Les points  $D(4,1)$  et  $E(2,3)$  se construisent aisément, en reportant, comme pour  $H$ , l'abscisse  $x$  sur  $CA$  et  $5-x$  verticalement, de manière à respecter une distance robotique de 5. On constate que ces 5 points s'alignent sur  $AB$ , qui est de pente  $-1$ .

Le point  $F(-1,4)$  et le point  $G(2.5, -2.5)$  sont aussi à une distance robotique 5 de  $C$  et appartiennent donc aussi au cercle robotique, de même que le point  $I(x, -r + |x|)$ .



On obtient ainsi un carré en équilibre sur sa pointe, aux diagonales parallèles aux axes.

### 2.3.2 Approche analytique

Ainsi, en géométrie robotique, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_R &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : d_R(S, C) = r\} \\ &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : |(x_S - x_C)| + |(y_S - y_C)| = r\} \end{aligned}$$

L'équation cartésienne du cercle robotique est donc :

$$\mathcal{C}_R \equiv |x - x_C| + |y - y_C| = r \quad (2)$$

Notons que l'équation 2 implique  $|x - x_C| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - x_C \leq r \Leftrightarrow x \in [x_C - r, x_C + r]$ . De même,  $y \in [y_C - r, y_C + r]$ .

Cette équation possédant deux valeurs absolues, elle est définie en quatre parties :

$$\text{Si } x \geq x_C \text{ et } y \geq y_C, |x - x_C| + |y - y_C| = r \Leftrightarrow x - x_C + y - y_C = r \Leftrightarrow x + y = r + x_C + y_C \quad (3a)$$

$$\text{Si } x \geq x_C \text{ et } y \leq y_C, |x - x_C| + |y - y_C| = r \Leftrightarrow x - x_C + y_C - y = r \Leftrightarrow x - y = r + x_C - y_C \quad (3b)$$

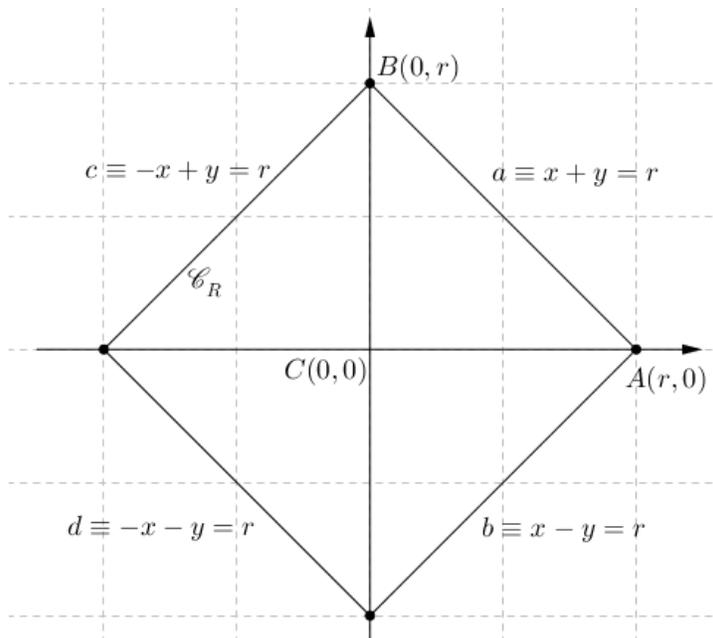
$$\text{Si } x \leq x_C \text{ et } y \geq y_C, |x - x_C| + |y - y_C| = r \Leftrightarrow x_C - x + y - y_C = r \Leftrightarrow -x + y = r - x_C + y_C \quad (3c)$$

$$\text{Si } x \leq x_C \text{ et } y \leq y_C, |x - x_C| + |y - y_C| = r \Leftrightarrow x_C - x + y_C - y = r \Leftrightarrow -x - y = r - x_C - y_C \quad (3d)$$

Afin de simplifier les équations, nous choisissons de placer le système d'axes au centre du cercle. Ainsi, les équations 3a-d deviennent respectivement :

$$\begin{array}{ll} x + y = r & \text{(premier quadrant)} \\ x - y = r & \text{(quatrième quadrant)} \\ -x + y = r & \text{(deuxième quadrant)} \\ -x - y = r & \text{(troisième quadrant)} \end{array}$$

Si nous représentons l'ensemble des solutions de ces équations, qui sont les quatre parties constituant l'équation cartésienne du cercle, nous obtenons le graphe du cercle robotique, qui est en fait un carré posé sur sa pointe.



En considérant le demi-cercle robotique supérieur, on voit apparaître, oh surprise, un TRIANGLE RECTANGLE ÉQUILATÉRAL de côtés robotiques  $2r$ .

## 2.4 Médiatrice robotique

### 2.4.1 Définition de la médiatrice

Une médiatrice est le lieu des points situés à égale distance de deux points  $A$  et  $B$ .

$$\mathcal{M}_E = \{S \in \mathbb{R}^2 : d_E(S, A) = d_E(S, B)\}$$

Comme précédemment, la définition du lieu est la même dans les deux géométries, seule la fonction distance est modifiée. La définition de la médiatrice robotique est donc

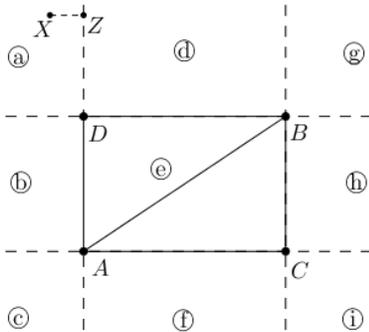
$$\mathcal{M}_R = \{S \in \mathbb{R}^2 : d_R(S, A) = d_R(S, B)\},$$

qui se traduit en l'équation cartésienne

$$\mathcal{M}_R \equiv |x - x_A| + |y - y_A| = |x - x_B| + |y - y_B|.$$

### 2.4.2 Approche géométrique de la médiatrice robotique

On considère un segment  $[AB]$  de pente dans  $]0, 1[^2$ , donc  $AD < DB$ .



$\forall x \in \textcircled{a} \cup \textcircled{b} \cup \textcircled{c}$ , on a  $d_R(X, A) < d_R(X, B)$ .

- Pour  $\textcircled{b}$  et  $\textcircled{c}$ , c'est évident.
- Pour  $X \in \textcircled{a}$ ,  $d_R(X, A) = XZ + ZD + DA < XZ + ZD + DB = d_R(X, B)$  puisque  $AD < DB$ .

De même,  $\forall Y \in \textcircled{g} \cup \textcircled{h} \cup \textcircled{i}$ ,  $d_R(Y, A) > d_R(Y, B)$ .

Il ne peut donc y avoir de solution que dans  $\textcircled{d}$ ,  $\textcircled{e}$  ou  $\textcircled{f}$ .

Dans  $\textcircled{d}$ , si  $S$  est un point du lieu, tout point de la verticale  $SK$  est aussi un point du lieu car

$$d_R(S', A) = d_R(S', S) + d_R(S, A) = d_R(S, S') + d_R(S, B) = d_R(S', B).$$

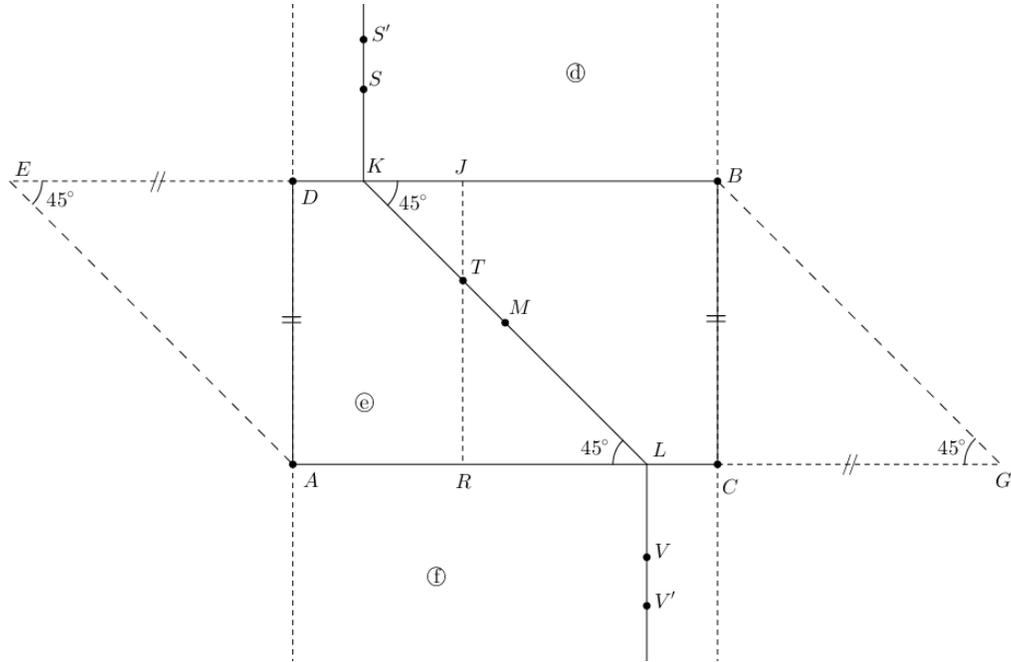
$K$  est donc le point de  $[BD]$  tel que  $d_R(K, A) = d_R(K, B)$ .  $K$  existe et est unique car si on construit  $E$  sur la droite  $BD$  et à gauche de  $D$  tel que  $DE = DA$ , alors  $K$  est le milieu de  $[EB]$  vu que  $d_R(K, B) = d_R(K, E) = d_R(K, A)$ .

Dans  $\textcircled{d}$ , la médiatrice est donc la demi-droite  $KS$  et par symétrie la demi-droite  $VL$  dans  $\textcircled{f}$ .

Par construction de  $E$  et  $G$ ,  $K$  et  $L$  sont symétriques dans le rectangle  $ACBD$ , donc le centre  $M$  de  $ACBD$  est le milieu de  $[KL]$  (et de  $[AB]$ ).

---

2. La démonstration est similaire dans les autres cas.



Cette même construction entraîne que

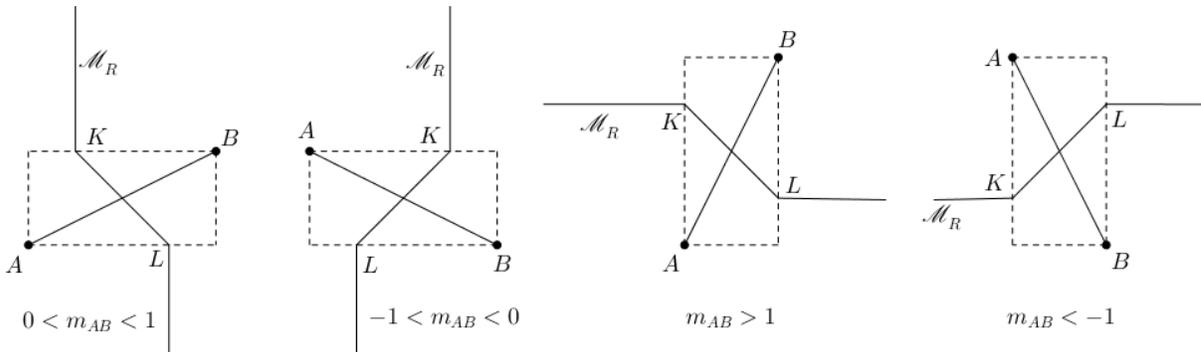
$$EK = KB = \frac{BE}{2} = \frac{AD + DB}{2} = \frac{BC + AC}{2} = \frac{AG}{2} = AL.$$

Ainsi,  $EK = AL$  et  $EK \parallel AL$ , donc  $EKLA$  est un parallélogramme. On en déduit que  $AE \parallel KL$  et comme  $\widehat{E} = 45^\circ$  ( $\triangle AED$  isocèle),  $\widehat{K} = \widehat{L} = 45^\circ$  et les triangles  $\triangle KJT$  et  $\triangle TRL$  sont rectangles isocèles.

$$T \in [KL] \Leftrightarrow d_R(T, B) = TJ + JB = KJ + JB = KB = KE = AL = AR + RT = d_R(T, A).$$

Dans  $\textcircled{c}$ , le lieu est ainsi le segment  $[KL]$  passant par le milieu  $M$  de  $[AB]$  et de pente  $-1$ .  $\square$

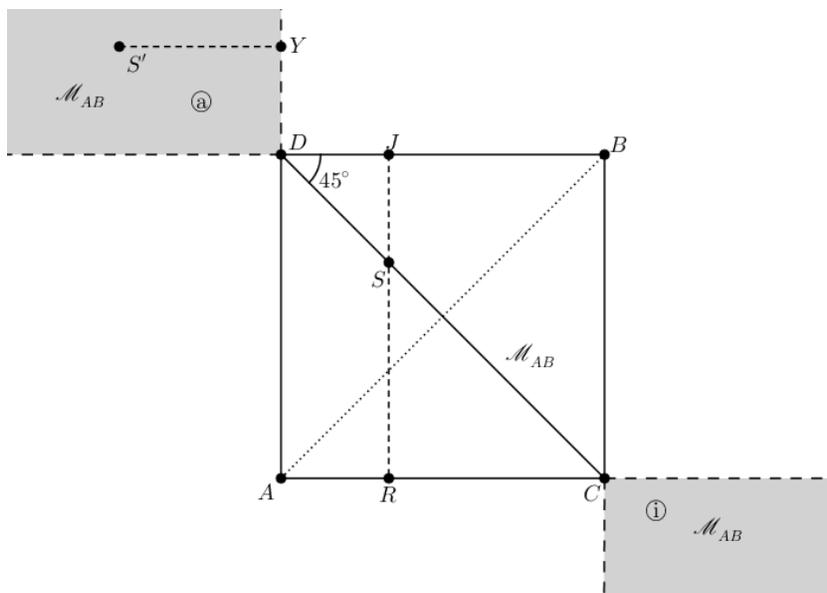
En résumé, on se retrouve devant 8 cas selon la pente de  $AB$  :



$$\text{avec } m_{AB} \cdot m_{KL} < 0.$$

Les médiatrices robotiques et euclidiennes coïncident lorsque  $AB$  est axé. Si  $|m_{AB}| = 1$ , la médiatrice devient un segment uni à deux quarts de plan.

Nous démontrons le cas  $m_{AB} = 1$ .  $ACBD$  devient un carré et



$$\begin{aligned} S \in [CD] \Leftrightarrow d_R(S, B) &= SJ + JB = DJ + JB = BD \\ &= AC = AR + RC = AR + RS = d_R(A, S). \end{aligned}$$

Le segment  $[CD]$  est donc une partie du lieu.

En se référant à la recherche de solutions dans  $\textcircled{a}, \dots, \textcircled{i}$ , il ne peut y avoir de solutions que dans  $\textcircled{a}$  ou  $\textcircled{i}$ .

$$\forall S' \in \textcircled{a}, d_R(S', A) = S'Y + YD + DA = S'Y + YD + DB = d_R(S', B)$$

Ces points  $S'$  fournissent un quart de plan comme solution avec l'équivalent en  $\textcircled{i}$ .

## 2.5 Inscriptibilité d'un triangle dans un cercle

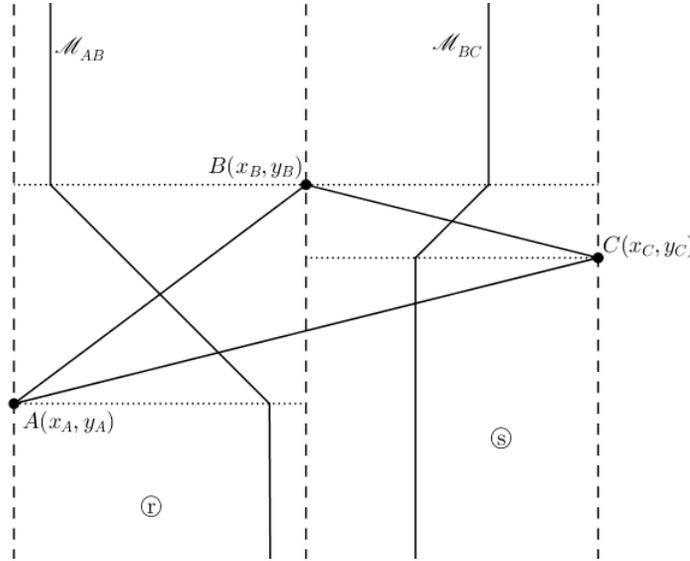
Un triangle est inscriptible dans un cercle ssi ses médiatrices ont au moins un point commun. En effet, la médiatrice de deux points étant l'ensemble des points équidistants de ces deux points, si les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, le point de concours est équidistant des trois sommets du triangle. Ce point est donc le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle.

**Théorème 2.1.** *Un triangle est non-inscriptible si il a trois côtés de pente  $< 1$  en valeur absolue ou les trois côtés de pente  $> 1$  en valeur absolue.*

*Démonstration.* Soit un triangle  $ABC$  de sommets  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  et  $C(x_C, y_C)$ , avec  $|m_{AB}| < 1$ ,  $|m_{AC}| < 1$ ,  $|m_{BC}| < 1$ <sup>3</sup>. Vu les pentes, les médiatrices sont d'allure verticale. Ainsi,  $\mathcal{M}_{AB}$  est contenue strictement dans la bande de plan délimitée par  $x = x_A$  et  $x = x_B$ ,  $\mathcal{M}_{AC}$  par  $x = x_A$  et  $x = x_C$  et  $\mathcal{M}_{BC}$  par  $x = x_B$  et  $x = x_C$ . De l'hypothèse sur les pentes, nous pouvons toujours ordonner les valeurs d'abscisse  $x_A, x_B, x_C$  d'une de ces  $3! = 6$  manières :

$$\begin{array}{lll} x_A < x_B < x_C & \text{ou} & x_A < x_C < x_B & \text{ou} & x_B < x_A < x_C \\ x_B < x_C < x_A & \text{ou} & x_C < x_A < x_B & \text{ou} & x_C < x_B < x_A, \end{array}$$

car  $x_A \neq x_B$ ,  $x_A \neq x_C$  et  $x_B \neq x_C$ , sinon, les côtés seraient de pente infinie.



Supposons que nous soyons dans le premier cas (voir figure ci-dessus), où  $x_A < x_B < x_C$ . La bande (R) incluant  $\mathcal{M}_{AB}$  et la bande (S) incluant  $\mathcal{M}_{BC}$  n'ayant pas de point commun, ces deux médiatrices n'en ont pas non plus, c'est à dire  $\mathcal{M}_{AB} \cap \mathcal{M}_{BC} = \emptyset$ .

Si  $\mathcal{M}_{AB} \cap \mathcal{M}_{AC} = \{X\}$ , alors

$$d_R(A, X) = d_R(C, X) = d_R(B, X),$$

donc  $X \in \mathcal{M}_{BC}$ , ce qui donne  $X \in \mathcal{M}_{AB} \cap \mathcal{M}_{BC}$  qui est impossible.

Donc,  $\mathcal{M}_{AB} \cap \mathcal{M}_{AC} = \emptyset$  et, de la même manière,  $\mathcal{M}_{BC} \cap \mathcal{M}_{AC} = \emptyset$ .

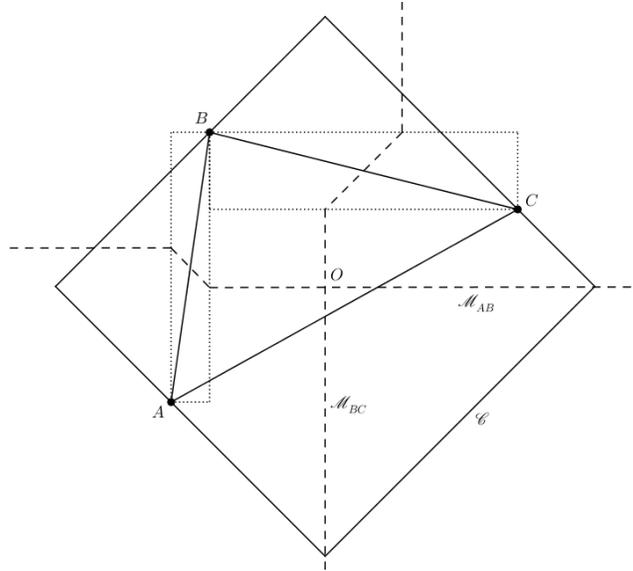
Les trois médiatrices n'ont pas de point commun et le triangle n'est pas inscriptible.  $\square$

---

3. Les autres cas se démontrent de manière similaire.

**Théorème 2.2.** *Un triangle est inscriptible si un de ses côtés a une pente dans  $[-1, 1]$  et un autre pas.*

*Démonstration.* Soit le triangle  $ABC$  où  $|m_{AB}| > 1$  et  $|m_{BC}| \in [-1, 1]$ .



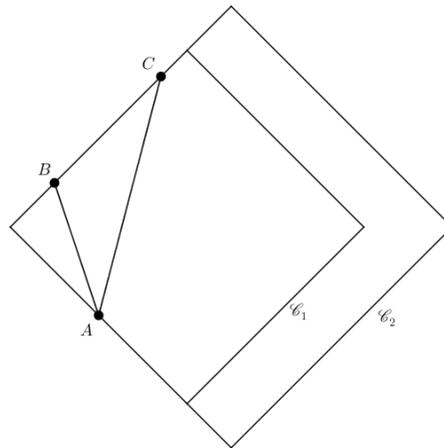
$\mathcal{M}_{AB}$  est alors horizontale et  $\mathcal{M}_{BC}$  verticale. Elles ont donc un point commun  $O$ , ce qui donne

$$d_R(A, O) = d_R(B, O) = d_R(C, O),$$

qui implique que  $O \in \mathcal{M}_{AC}$  et le triangle  $ABC$  est inscriptible.  $\square$

### 2.5.1 Remarque

Quand il existe, ce cercle n'est pas toujours unique. Si un des côtés est de pente  $\pm 1$ , il peut y avoir une infinité de cercles circonscrits.



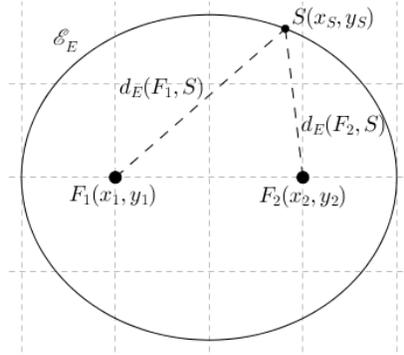


## 2.6 Ellipse robotique

### 2.6.1 Ellipse euclidienne

Une ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points donnés  $F_1(x_1, y_1)$  et  $F_2(x_2, y_2)$ , appelés foyers, est constante. La constante est notée  $2a$  et  $2a > d_E(F_1, F_2)$ . Pour rappel, voici l'équation ainsi que le graphe d'une ellipse euclidienne.

$$\mathcal{E}_E = \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : d_E(S, F_1) + d_E(S, F_2) = 2a\}$$



### 2.6.2 Analyse de l'ellipse robotique

Nous avons d'abord approché le problème de manière géométrique, relativement simple mais longue à expliciter. Nous avons donc choisi une rédaction algébrique.

Comme dans le cas du cercle, la définition du lieu est la même, seule l'expression de la formule de la distance est modifiée.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : d_R(S, F_1) + d_R(S, F_2) = 2a\} \\ &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : |x_S - x_1| + |y_S - y_1| + |x_S - x_2| + |y_S - y_2| = 2a\} \end{aligned}$$

avec  $2a > d_R(F_1, F_2) \Leftrightarrow 2a > |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . L'équation cartésienne de l'ellipse robotique est donc :

$$\mathcal{E}_R \equiv |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \quad (4)$$

Appliquons maintenant le même raisonnement à l'équation 4 que celui appliqué à l'équation 2 du cercle. Afin de simplifier les équations, nous décidons de placer l'origine  $O(0, 0)$  au centre de l'ellipse qui est le milieu des deux foyers. Ainsi,  $F_1(x_1, y_1)$  et  $F_2(x_2, y_2)$  sont images l'un de l'autre par symétrie de centre  $O$ . Il en résulte que  $x_2 = -x_1$  et  $y_2 = -y_1$ . Sans perte de généralité au vu de la symétrie des résultats, nous choisissons que  $x_2$  et  $y_2$  sont positifs. Ainsi, nous restreignons le nombre de cas à discuter.

La Fig.5 nous permet de visualiser à quelles parties du plan correspondent les différents cas.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \geq x_1, x \geq x_2, y \geq y_1, y \geq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x - x_1 + y - y_1 + x - x_2 + y - y_2 = 2a \\
& \Leftrightarrow x + y = a
\end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \geq x_1, x \geq x_2, y \geq y_1, y \leq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x - x_1 + y - y_1 + x - x_2 + y_2 - y = 2a \\
& \Leftrightarrow x = a - y_2
\end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \geq x_1, x \geq x_2, y \leq y_1, y \leq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x - x_1 + y_1 - y + x - x_2 + y_2 - y = 2a \\
& \Leftrightarrow x - y = a
\end{aligned} \tag{5c}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \geq x_1, x \leq x_2, y \leq y_1, y \leq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x - x_1 + y_1 - y + x_2 - x + y_2 - y = 2a \\
& \Leftrightarrow -y = a - x_2
\end{aligned} \tag{5d}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \leq x_1, x \leq x_2, y \leq y_1, y \leq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x_1 - x + y_1 - y + x_2 - x + y_2 - y = 2a \\
& \Leftrightarrow -x - y = a
\end{aligned} \tag{5e}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \leq x_1, x \leq x_2, y \geq y_1, y \leq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x_1 - x + y - y_1 + x_2 - x + y_2 - y = 2a \\
& \Leftrightarrow -x = a - y_2
\end{aligned} \tag{5f}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \leq x_1, x \leq x_2, y \geq y_1, y \geq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x_1 - x + y - y_1 + x_2 - x + y - y_2 = 2a \\
& \Leftrightarrow -x + y = a
\end{aligned} \tag{5g}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \geq x_1, x \leq x_2, y \geq y_1, y \geq y_2, \quad & |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \\
& \Leftrightarrow x - x_1 + y - y_1 + x_2 - x + y - y_2 = 2a \\
& \Leftrightarrow y = a - x_2
\end{aligned} \tag{5h}$$

Parmi ces huit droites<sup>4</sup> qui deviendront des segments vu les restrictions, on en distingue deux de pente verticale ( $\textcircled{b}$  et  $\textcircled{f}$ ), deux de pente horizontale ( $\textcircled{d}$  et  $\textcircled{h}$ ), deux de pente égale à 1 ( $\textcircled{c}$  et  $\textcircled{g}$ ) ainsi que deux morceaux de pente égale à  $-1$  ( $\textcircled{a}$  et  $\textcircled{e}$ ). En représentant ces différents segments, on obtient enfin le graphe de l'ellipse robotique (Fig.6), qui est en fait un octogone.

---

4. Le cas avec  $x \geq x_1, x < x_2, y \geq y_1, y < y_2$  n'est pas mentionné car l'équation qui en résulte n'a pas de solution.

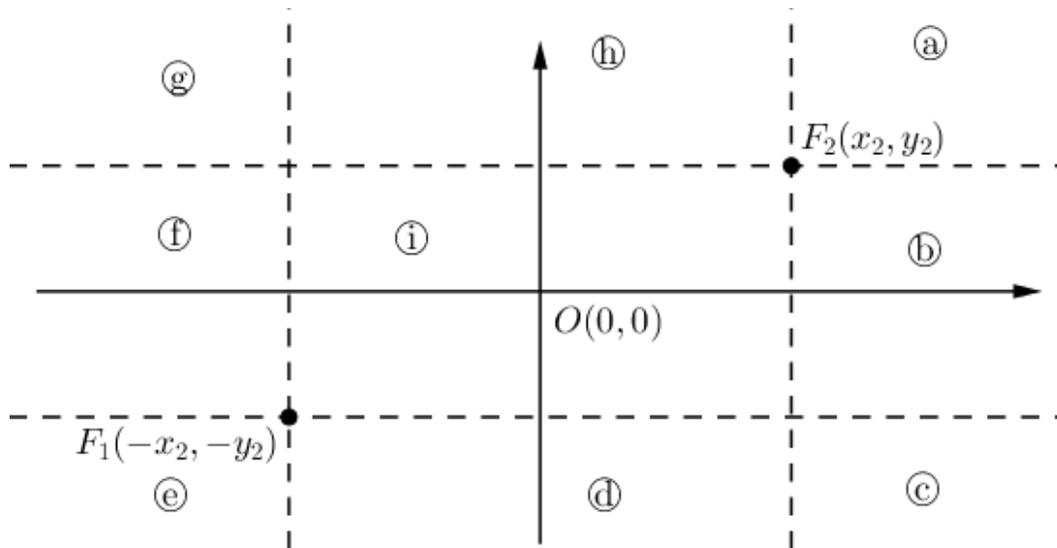


FIGURE 5 – Visualisation des différents zones

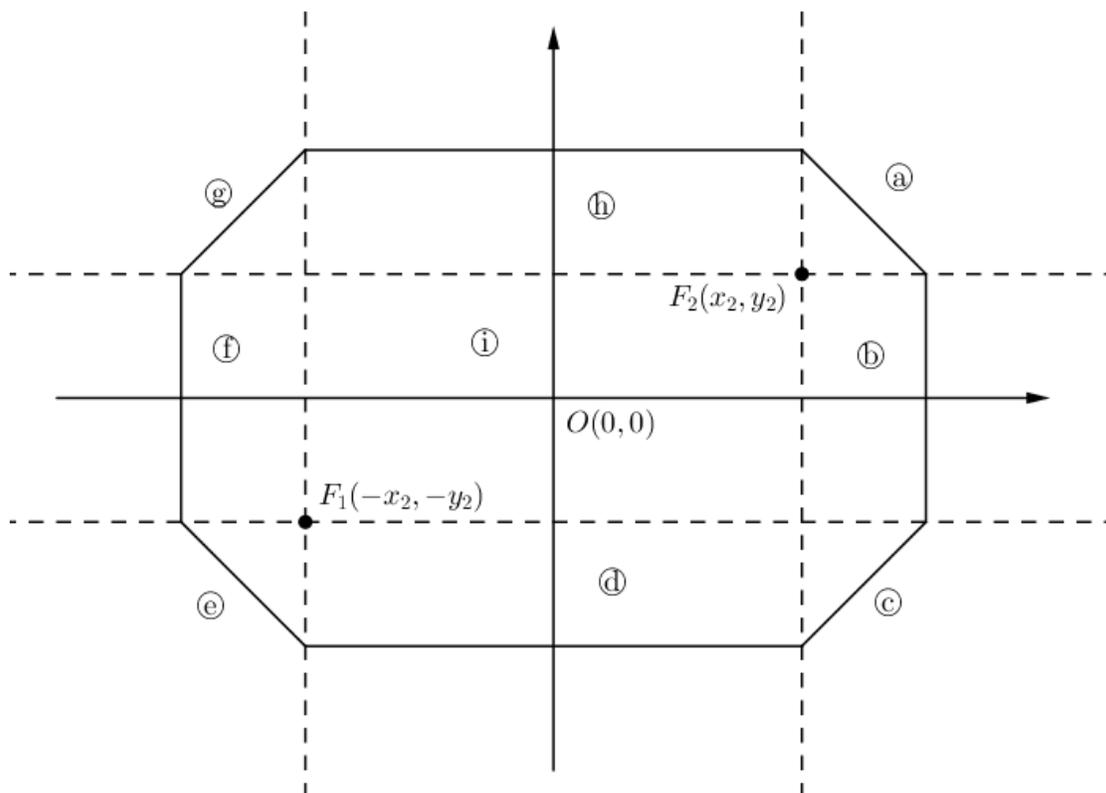


FIGURE 6 – Ellipse robotique

Si les deux foyers  $F_1$  et  $F_2$  sont axés, nous avons  $x_1 = x_2$  ou  $y_1 = y_2$ . Dans le premier cas, les morceaux ④ et ⑥ disparaissent et l'octogone devient hexagone (« vertical », voir Fig.7, à gauche). Le second cas est similaire, mais l'hexagone obtenu est orienté différemment (« horizontal », voir Fig.7, à droite).

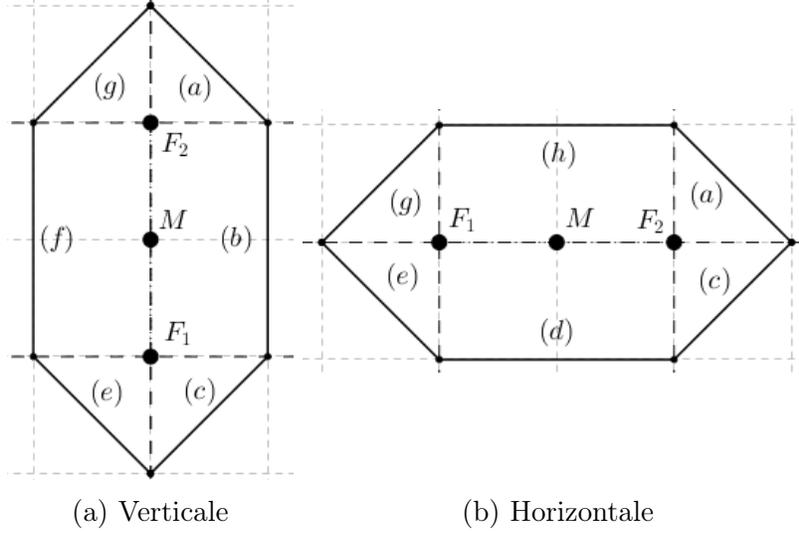


FIGURE 7 – Ellipses robotiques avec deux cotés opposés de longueur nulle

Si  $F_1 = F_2$ , l'ellipse devient un cercle, comme en géométrie euclidienne.

### 2.6.3 Remarques

L'ellipse robotique est symétrique par rapport aux axes  $x = \frac{x_1+x_2}{2}$  et  $y = \frac{y_1+y_2}{2}$ , et par rapport au centre  $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ . Cela peut être déduit directement des équations des différents morceaux de l'ellipse.

De cette propriété de l'ellipse robotique, il découle que les ellipses de foyers  $F_1(x_1, y_1)$ ,  $F_2(x_2, y_2)$  et de foyers  $F'_1(x_1, y_2)$ ,  $F'_2(x_2, y_1)$  sont confondues<sup>5</sup>.

5. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous n'avons analysé que le cas où  $F_2$  est « plus en haut à droite » que  $F_1$ , car le cas où  $F_2$  est « plus en bas à droite » que  $F_1$  peut être ramené au premier cas aisément en utilisant cette propriété.

## 2.7 Hyperbole robotique

### 2.7.1 Hyperbole euclidienne

Une hyperbole est le lieu des points dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points donnés  $F_1(x_1, y_1)$  et  $F_2(x_2, y_2)$ , appelés foyers, est constante (ici aussi appelée  $2a$ ). En voici la définition et la représentation graphique d'une hyperbole euclidienne (Fig.8).

$$\mathcal{H}_E = \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : |d_E(S, F_1) - d_E(S, F_2)| = 2a\}$$

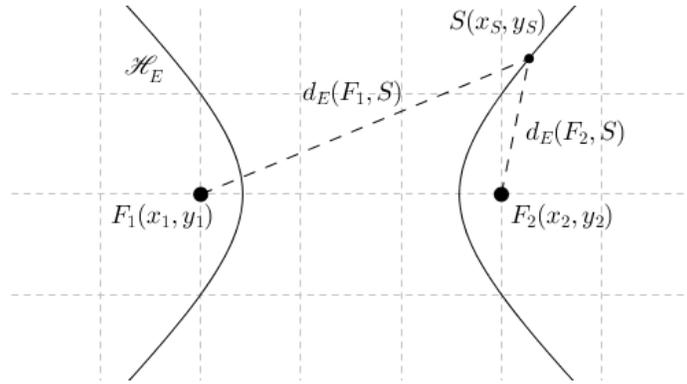


FIGURE 8 – Hyperbole euclidienne

### 2.7.2 Analyse de l'hyperbole robotique

Après une approche géométrique difficilement rédigeable, nous avons encore opté pour une rédaction algébrique. Comme dans le cas de l'ellipse robotique, la définition de l'hyperbole robotique reste la même, seule la définition de la distance est modifiée.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : |d_R(S, F_1) - d_R(S, F_2)| = 2a\} \\ &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : |(|x_S - x_1| + |y_S - y_1|) - (|x_S - x_2| + |y_S - y_2|)| = 2a\} \end{aligned}$$

L'équation cartésienne de l'hyperbole robotique est donc

$$\mathcal{H}_R \equiv |(|x - x_1| + |y - y_1|) - (|x - x_2| + |y - y_2|)| = 2a, \quad (6)$$

avec la condition

$$2a \leq d_R(F_1, F_2) \Leftrightarrow 2a \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (7)$$

Comme pour le cercle et l'ellipse, nous plaçons l'origine  $O(0, 0)$  du repère au milieu des deux foyers  $F_1(x_1, y_1)$  et  $F_2(x_2, y_2)$ . Ainsi,  $F_1(x_1, y_1)$  et  $F_2(x_2, y_2)$  sont images l'un de l'autre par

symétrie de centre  $O$ . Il en résulte que  $x_2 = -x_1$  et  $y_2 = -y_1$ . Nous nommons les deux foyers  $F_1(-x_2, -y_2)$  et  $F_2(x_2, y_2)$  de telle sorte que  $x_2, y_2 \geq 0$ <sup>6</sup>. L'équation 6 devient alors :

$$\mathcal{H}_R \equiv (|x + x_2| + |y + y_2|) - (|x - x_2| + |y - y_2|) = 2a \quad (8)$$

Développons les deux cas résultant de la valeur absolue de l'équation 8.

$$\begin{aligned} \text{Si } (|x + x_2| + |y + y_2|) &\geq (|x - x_2| + |y - y_2|), \\ \mathcal{H}_R^+ &\equiv (|x + x_2| + |y + y_2|) - (|x - x_2| + |y - y_2|) = 2a \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } (|x + x_2| + |y + y_2|) &< (|x - x_2| + |y - y_2|), \\ \mathcal{H}_R^- &\equiv (|x - x_2| + |y - y_2|) - (|x + x_2| + |y + y_2|) = 2a \end{aligned} \quad (9b)$$

Les équations 9a et 9b sont en fait images l'une de l'autre par symétrie centrale de centre  $O$ . En effet,

$$\begin{aligned} S_O(\mathcal{H}_R^-) &\equiv (|-x - x_2| + |-y - y_2|) - (|-x + x_2| + |-y + y_2|) = 2a \\ &\Leftrightarrow S_O(\mathcal{H}_R^-) \equiv (|xx_2| + |yy_2|) - (|x - x_2| + |y - y_2|) = 2a \\ &\Leftrightarrow S_O(\mathcal{H}_R^-) \equiv \mathcal{H}_R^+ \end{aligned} \quad (10)$$

Vu l'équivalence 10, il nous suffit d'analyser  $\mathcal{H}_R^+$ .  $\mathcal{H}_R^-$  sera obtenu en effectuant  $S_O(\mathcal{H}_R^+)$ . Développons maintenant les neuf cas issus de l'équation 9a (voir Fig.9).

$$\text{Si } x \geq x_2, x \geq -x_2, y \geq y_2, y \geq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv 0 = a - x_2 - y_2 \quad (11a)$$

$$\text{Si } x \geq x_2, x \geq -x_2, y \leq y_2, y \geq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv y = a - x_2 \quad (11b)$$

$$\text{Si } x \geq x_2, x \geq -x_2, y \leq y_2, y \leq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv 0 = a - x_2 + y_2 \quad (11c)$$

$$\text{Si } x \leq x_2, x \geq -x_2, y \geq y_2, y \geq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv x = a - y_2 \quad (11d)$$

$$\text{Si } x \leq x_2, x \geq -x_2, y \leq y_2, y \geq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv x + y = a \quad (11e)$$

$$\text{Si } x \leq x_2, x \geq -x_2, y \leq y_2, y \leq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv x = a + y_2 \quad (11f)$$

$$\text{Si } x \leq x_2, x \leq -x_2, y \geq y_2, y \geq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv 0 = a + x_2 - y_2 \quad (11g)$$

$$\text{Si } x \leq x_2, x \leq -x_2, y \leq y_2, y \geq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv y = a + x_2 \quad (11h)$$

$$\text{Si } x \leq x_2, x \leq -x_2, y \leq y_2, y \leq -y_2, \quad \mathcal{H}_R^+ \equiv 0 = a + x_2 + y_2 \quad (11i)$$

Notons aussi qu'en supposant  $x_2 \geq 0$  et  $y_2 \geq 0$ , dans le système d'axes centré au milieu des deux foyers, la condition. 7 devient

$$0 \leq 2a \leq 2x_2 + 2y_2 \Leftrightarrow a - x_2 - y_2 \leq 0. \quad (12)$$

Nous pouvons maintenant entreprendre la tâche fastidieuse qui est d'analyser les équations 11a-i, afin de pouvoir représenter l'ensemble des solutions de l'équation cartésienne de l'hyperbole.

---

6. Les cas où  $y_2 < 0$  ne sont pas développés ici, mais s'obtiennent par symétrie d'axe  $y = 0$  du premier cas.

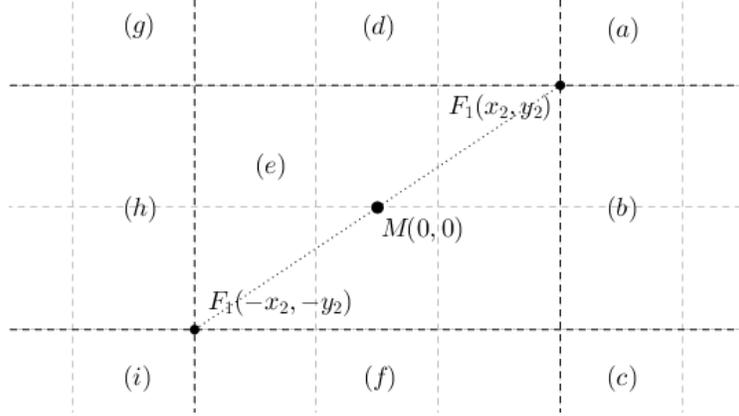


FIGURE 9 – Visualisation des différentes parties de l'hyperbole

**Dans (a) :**  $0 = a - x_2 - y_2$ . Vu la condition 12,  $S = \mathbb{R}^2$  si  $a = x_2 + y_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (b) :**  $y = a - x_2$ . Vu les bornes,  $-y_2 \leq y \Leftrightarrow a - x_2 + y_2 \geq 0$  et  $a - x_2 \leq y_2$  (trivial vu la condition sur a). Ainsi,  $S \equiv y = a - x_2$  si  $a \geq x_2 - y_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (c) :**  $0 = a - x_2 + y_2 \Leftrightarrow a = x_2 - y_2$ ,  $a$  étant positif, cela n'est possible que pour  $y_2 \leq x_2$ , donc  $S = \mathbb{R}^2$  si  $a = x_2 - y_2$  avec  $y_2 \leq x_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (d) :**  $x = a - y_2$ . Raisonement analogue que pour (b),  $S \equiv x = a - y_2$  si  $a \geq y_2 - x_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (e) :**  $x + y = a \Rightarrow S \equiv y = -x + a$ .

**Dans (f) :**  $x = a + y_2$ . Raisonement analogue que pour (b),  $S \equiv x = a + y_2$  si  $a \leq x_2 - y_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (g) :**  $0 = a + x_2 - y_2$ . Raisonement analogue que pour (c),  $S = \mathbb{R}^2$  si  $a = y_2 - x_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (h) :**  $y = a + x_2$ . Vu les bornes,  $-y_2 \leq y \Leftrightarrow a + x_2 + y_2 \geq 0$  (trivial vu la condition sur a) et  $a + x_2 \leq y_2 \Leftrightarrow a \leq y_2 - x_2$ . Ainsi,  $S \equiv y = a + x_2$  si  $a \leq y_2 - x_2$ ,  $S = \{\emptyset\}$  sinon.

**Dans (i) :**  $0 = a + x_2 + y_2$ , impossible car  $a, x_2, y_2 \geq 0$ , donc  $S = \{\emptyset\}$ .

En distinguant les différents cas possibles, et en appliquant une symétrie centrale à  $\mathcal{H}_R^+$  pour obtenir  $\mathcal{H}_R^-$ , nous pouvons enfin représenter les différents graphes possibles de l'hyperbole robotique en fonction de la constante  $a$  (voir Fig.10a-10d).

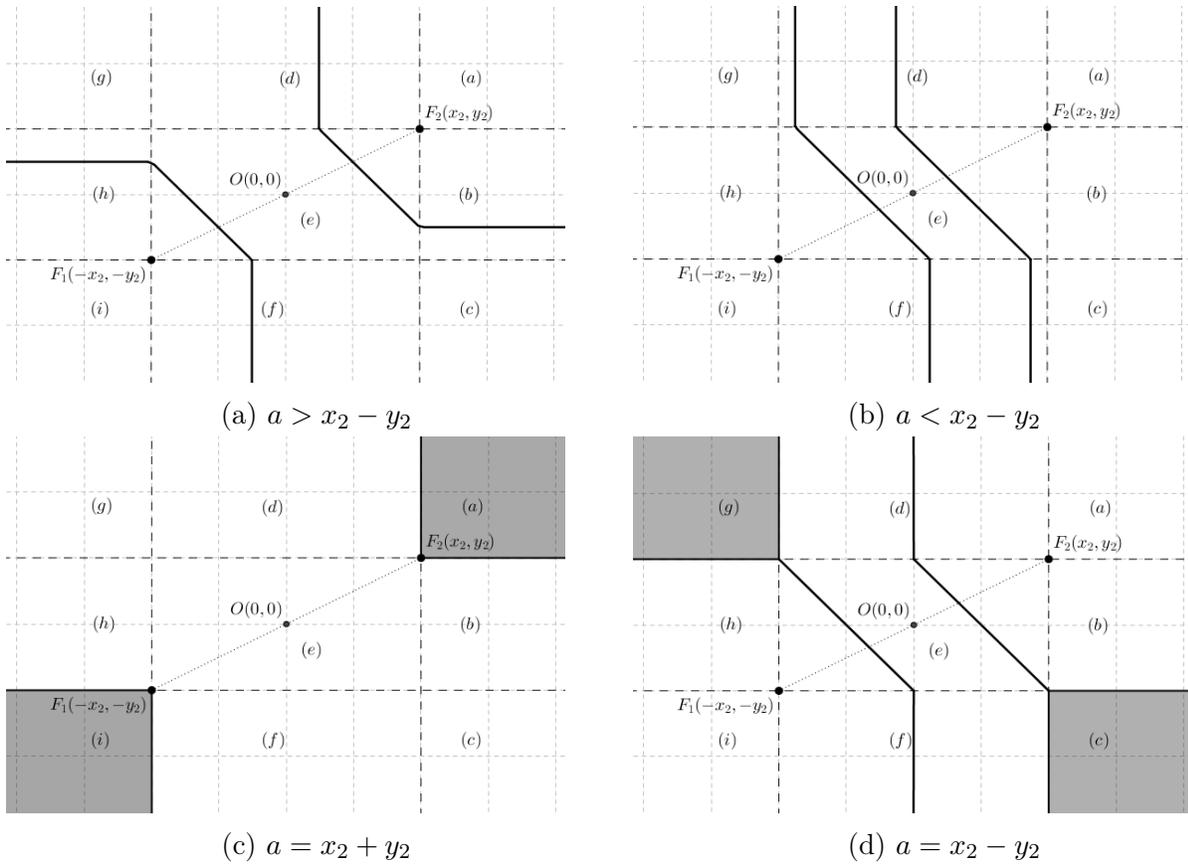


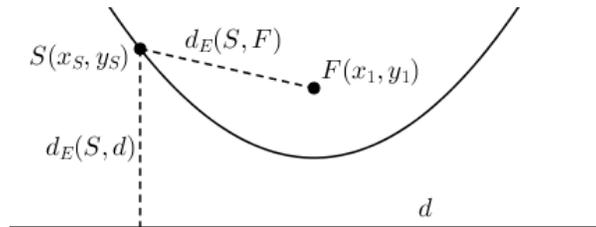
FIGURE 10 – Hyperboles robotiques

## 2.8 Parabole robotique

### 2.8.1 Parabole euclidienne

Une parabole est le lieu des points situés à égale distance d'une droite  $d$  appelée directrice et d'un point  $F(x_1, y_1)$  appelé foyer (voir Fig.??).

$$\mathcal{P}_E = \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : d_E(S, F) = d_E(S, d)\}$$



### 2.8.2 Distance d'un point à une droite

Pour étudier le comportement des paraboles robotiques, nous devons d'abord introduire la notion de distance entre un point  $P$  et une droite  $e$ . En géométrie euclidienne, nous le rappelons, la distance entre un point  $P$  et une droite  $e$  est égale à la longueur du segment issu du point et perpendiculaire à la droite et c'est la plus courte distance entre  $P$  et un point de  $e$ . En géométrie robotique, pour conserver l'idée d'une distance minimale, nous définissons la distance entre un point  $P$  et une droite  $e$  comme étant égale à la longueur robotique du plus court segment joignant  $P$  à un point de  $e$ . Nous avons donc comme formule

$$d_R(P, e) = \min(d_R(P, T) | T \in e) \Leftrightarrow d_R(P, e) = \min(d_H(P, e), d_V(P, e)), \quad (13)$$

où  $d_H$  et  $d_V$  désignent respectivement distance horizontale et distance verticale,  $d_H$  et  $d_V$ , en supposant  $P(x_P, y_P)$  et  $e \equiv ax + by + c = 0$ , deviennent (voir Fig.11)

$$d_H(P, e) = \left| x_P - \frac{-by_P - c}{a} \right|, \quad (14a)$$

$$d_V(P, e) = \left| y_P - \frac{-ay_P - c}{b} \right|. \quad (14b)$$

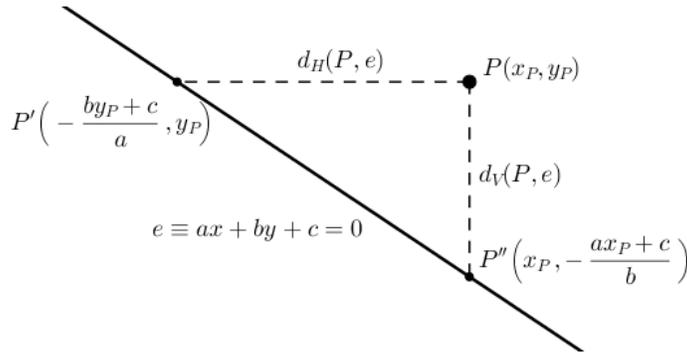


FIGURE 11 – Distance d'un point  $P$  et une droite  $e$

Ainsi, la formule 13 devient

$$d_R(P, e) = \min \left( \left| x_P - \frac{-by_P - c}{a} \right|, \left| y_P - \frac{-ay_P - c}{b} \right| \right) \quad (15)$$

Précisons<sup>7</sup> que

$$d_R(P, e) = \min(d_H(P, e), d_V(P, e)) = d_H(P, e) \quad \text{si } m_e \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty] \quad (16)$$

$$= d_V(P, e) \quad \text{si } m_e \in [-1, 1]. \quad (17)$$

7. Nous remarquons que  $d_R(P, e) = d_H(P, e) = d_V(P, e)$  si  $m_e = \pm 1$ ,  $m_e$  étant la pente de la droite  $e$ .

### 2.8.3 Analyse de la parabole robotique

Une parabole robotique est le lieu des points situés à égale distance d'une droite  $d \equiv ax + by + c = 0$  appelée directrice et d'un point  $F(x_1, y_1)$  appelé foyer.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_R &= \{S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : d_R(S, F) = d_R(S, d)\} \\ &= \left\{ S(x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2 : |x_S - x_1| + |y_S - y_1| = \min \left( \left| x_S - \frac{-by_S - c}{a} \right|, \left| y_S - \frac{-ay_S - c}{b} \right| \right) \right\} \end{aligned}$$

L'équation cartésienne de la parabole robotique est donc

$$\mathcal{P}_R \equiv |x - x_1| + |y - y_1| = \min \left( \left| x + \frac{by + c}{a} \right|, \left| y + \frac{ay + c}{b} \right| \right). \quad (18)$$

Afin de simplifier l'analyse des cas, limitons-nous à celui où  $m_d (= \frac{-a}{b}) \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$ . Nous choisissons de travailler dans un repère centré au milieu du segment le plus court, robotiquement parlant, joignant le foyer et la directrice. Le foyer a alors comme coordonnées  $F(x_1, 0)$ . Aussi, nous pouvons géométriquement remarquer qu'aucun point situé du côté opposé du foyer  $F$  par rapport à la droite  $d$  ne satisfait la condition pour appartenir au lieu, et donc que, en supposant que  $F$  est « à droite » de la droite  $d^8$ , les points  $S(x_S, y_S) \in \mathcal{P}_R$  satisfont à  $x_S \geq \frac{-by_S - c}{a}$ . Ces conditions posées, l'équation 18 devient

$$\mathcal{P}_R \equiv |x - x_1| + |y| = x + \frac{by + c}{a}. \quad (19)$$

L'équation 19 étant constituée de deux valeurs absolues, nous pouvons distinguer quatre cas :

$$\text{Si } x \geq x_1 \text{ et } y \geq 0, \quad x - x_1 + y = x + \frac{by + c}{a} \Leftrightarrow y \frac{a - b}{a} = x_1 + \frac{c}{a} \quad (20a)$$

$$\text{Si } x \geq x_1 \text{ et } y \leq 0, \quad x - x_1 + y = x + \frac{by + c}{a} \Leftrightarrow y \frac{a + b}{a} = -x_1 - \frac{c}{a} \quad (20b)$$

$$\text{Si } x \leq x_1 \text{ et } y \geq 0, \quad x - x_1 + y = x + \frac{by + c}{a} \Leftrightarrow -2x + y \frac{a - b}{a} = -x_1 + \frac{c}{a} \quad (20c)$$

$$\text{Si } x \leq x_1 \text{ et } y \leq 0, \quad x - x_1 + y = x + \frac{by + c}{a} \Leftrightarrow 2x + y \frac{a + b}{a} = x_1 - \frac{c}{a} \quad (20d)$$

En représentant ces équations de droites sur le plan, nous obtenons le graphe de la parabole robotique (voir Fig.12). Si  $m_d = \pm 1$ , nous obtenons un cas particulier (voir Fig.13).

---

8. Le cas où  $F$  est « à gauche » de  $d$  est similaire, et ne sera pas analysé.

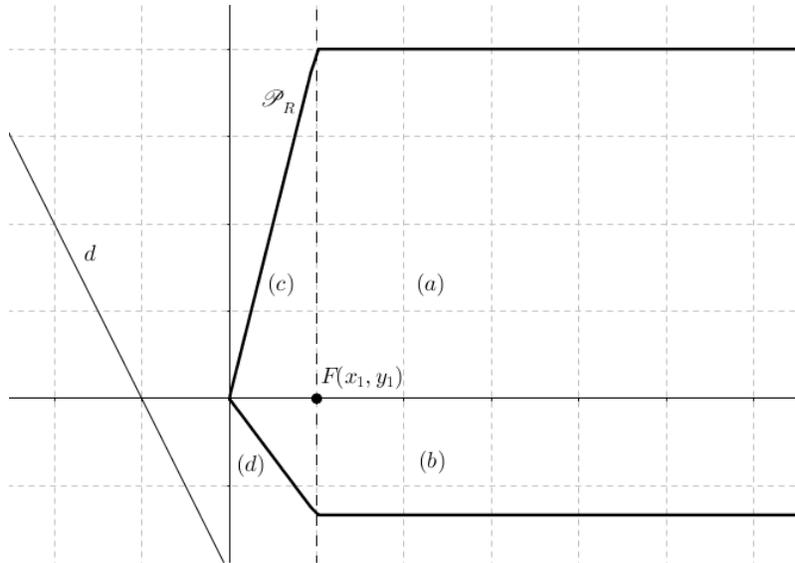


FIGURE 12 – Parabole robotique généralisée,  $m_d < -1$

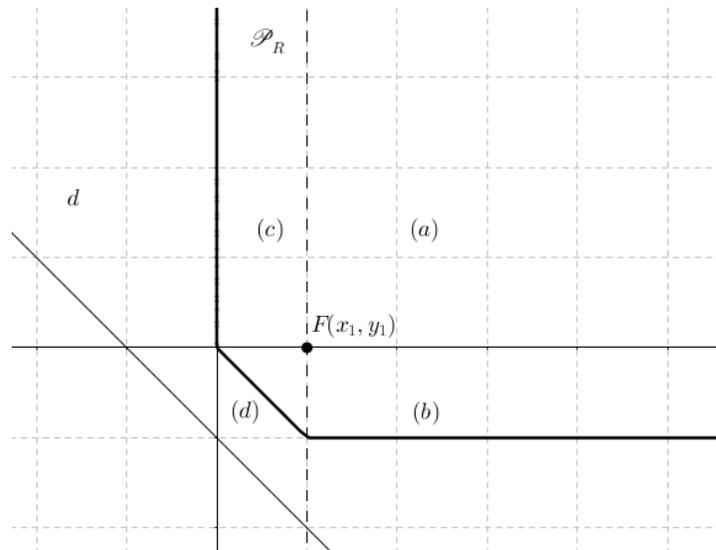


FIGURE 13 – Parabole robotique avec  $m_d = -1$

## 2.9 Remarque générale

Toutes les coniques robotiques peuvent se construire géométriquement à partir des données focales et des constantes.

Nous avons étudié les bissectrices robotiques, mais le développement est fastidieux et sans résultats spéciaux. Il est cependant intéressant de noter que tout triangle admet un cercle robotique inscrit.

## 3 Trigonométrie et angles robotiques

### 3.1 Valeur de $\pi$ robotique

En géométrie euclidienne, la célèbre constante  $\pi$  est définie comme étant le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre :  $L_{\mathcal{C}} = \pi D = 2\pi r$ . Circonférence et diamètre d'un cercle font appel à la notion de longueur, et donc de distance, qui n'est pas la même en géométrie robotique qu'en géométrie euclidienne. Que vaut  $\pi$ , ou plutôt son cousin, noté  $\pi_R$  ?

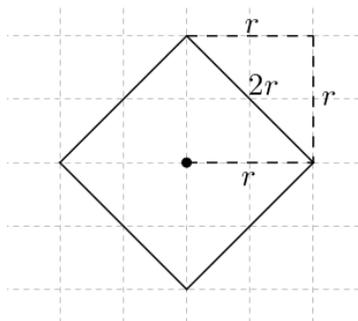


FIGURE 14 – Cercle robotique

Comme nous l'avons dit ci-dessus,  $\pi$  est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Donc,  $\pi_R$  est le rapport de la longueur de la circonférence robotique à son diamètre robotique. Le diamètre  $D_R$  d'un cercle de rayon  $r$  est égal à  $2r$ , et sa circonférence  $L_R$  est égale à  $4 \times 2r = 8r$  (voir Fig.14). Nous obtenons donc

$$\boxed{\pi_R = \frac{L_R}{D_R} = \frac{8r}{2r} = 4} \quad (21)$$

### 3.2 Mesure de l'amplitude d'un angle robotique

#### 3.2.1 Amplitude d'un angle en géométrie euclidienne

En géométrie euclidienne, l'amplitude d'un angle est souvent exprimée en radians. Un angle d'une amplitude de un radian (noté  $1 \text{ rad}_E$ ) est un angle qui intercepte, sur un cercle

centré au sommet de l'angle, un arc dont la longueur vaut le rayon du cercle (voir Fig.15). La mesure d'un angle en radians est donc indépendante du rayon du cercle que l'on choisit.

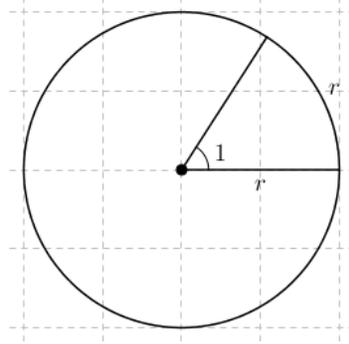


FIGURE 15 – Angle de  $1 \text{ rad}_E$

Par exemple, un angle d'amplitude  $\frac{\pi}{2}$ <sup>9</sup> est un angle droit, car il intercepte un arc d'une longueur de  $\frac{\pi}{2}r$  d'un cercle dont la circonférence vaut  $2\pi r$ , et intercepte donc un quart du cercle complet.

### 3.2.2 Amplitude d'un angle en géométrie robotique

En géométrie robotique, un angle d'un radian robotique, noté  $1 \text{ rad}_R$ , est alors un angle qui intercepte un arc de cercle robotique de la longueur robotique du rayon (voir Fig.16). Par convention, nous travaillerons sur le cercle robotique unitaire, c'est-à-dire de rayon égal à 1.

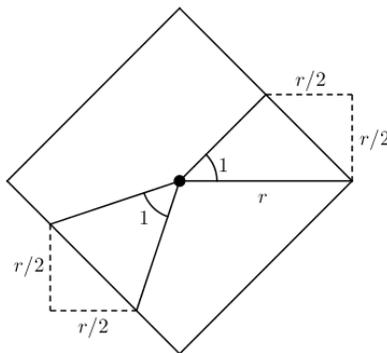


FIGURE 16 – Angle de  $1 \text{ rad}_R$

Nous remarquons sur la figure ci-dessus ainsi qu'un angle d'amplitude robotique  $1 \text{ rad}_R$  correspond à un angle d'amplitude euclidienne  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}_E$ , ce qui est cohérent avec la valeur de

---

9. Quand un angle est exprimé comme une fraction de  $\pi$ , nous omettons souvent *rad*.

$\pi_R$  que nous avons trouvée car  $\frac{\pi_R}{4} = 1$ . Par analogie, un angle droit est un angle d'amplitude  $\frac{\pi_R}{2} = 2$  et un angle plat est un angle d'amplitude  $\pi_R = 4$ . Ces cas particuliers laisseraient penser que les amplitudes robotiques et les amplitudes euclidiennes d'un angle sont proportionnelles, ce qui s'avère faux. Mais il y a moyen de calculer l'amplitude robotique d'un angle connaissant son amplitude euclidienne.

**Définition.** Un angle axé est un angle dont un des côtés est axé.

**Théorème 3.1.** Soit  $\alpha$  l'amplitude euclidienne d'un angle  $\widehat{AOB}$  axé. L'amplitude robotique de l'angle  $\widehat{AOB}$ , notée  $\tilde{\alpha}$ , est donnée par la fonction<sup>10</sup>

$$\psi(\alpha) = 2 \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{\pi}{2} \lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \rfloor)}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{2} \lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \rfloor)}.$$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{C}_R$  le cercle unitaire robotique de centre  $O$  et  $\widehat{AOB}$  un angle axé d'amplitude euclidienne  $\alpha$  (voir Fig.17).

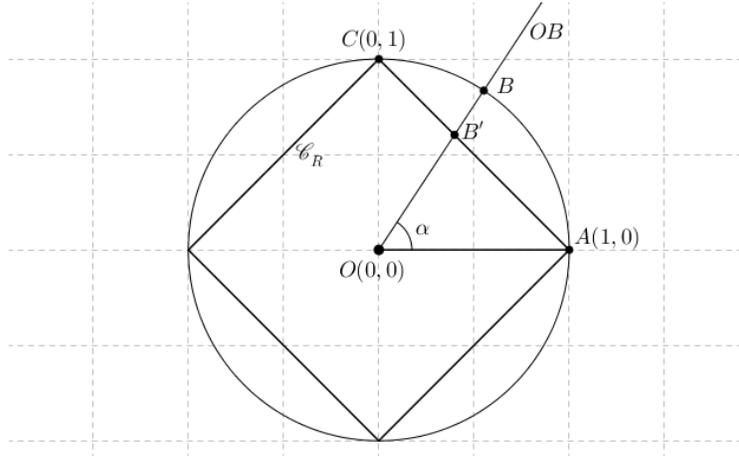


FIGURE 17 – Cercle unitaire et angle  $\widehat{AOB}$

L'amplitude robotique de l'angle  $\widehat{AOB}$  est la longueur de l'arc qu'il intercepte sur le cercle robotique unitaire  $\mathcal{C}_R$ . Si  $\widehat{AOB} \in Q_I$ , cette longueur est égale à la distance entre le point  $A(1,0)$  et le point  $B' = OB \cap \mathcal{C}_R$ . Pour calculer cette distance, il nous faut connaître les coordonnées du point  $B'$ . Sachant que  $OB \equiv y = x \tan \alpha$  et  $\mathcal{C}_R \equiv y = -x + 1$  dans le premier quadrant ( $QI$ ),

$$\begin{aligned} B' = OB \cap \mathcal{C}_R &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ x(\tan \alpha + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \\ x = \frac{1}{1 + \tan \alpha} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow B' = \left( \frac{1}{1 + \tan \alpha}, \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right). \end{aligned}$$

10.  $[a]$  désigne la partie entière de  $a$ . Pour rappel,  $[-1/2] = -1$ .

La longueur de l'arc intercepté par  $\widehat{AOB} \in Q_I$  est donc égale à

$$d_R(A, B') = \left| 1 - \frac{1}{1 + \tan \alpha} \right| + \left| 0 - \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right| = 1 - \frac{1}{1 + \tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}. \quad (22)$$

Si  $\widehat{AOB} \in Q_{II}$ , la longueur robotique de l'arc intercepté par  $\widehat{AOB}$  est égale à la somme des distances entre  $A(1, 0)$  et  $C(0, 1)$  et entre  $C(0, 1)$  et  $B'' = OB \cap \mathcal{C}_R$ .

Sachant que  $\mathcal{C}_R \equiv y = x + 1$  dans le deuxième quadrant,

$$\begin{aligned} B'' = OB \cap \mathcal{C}_R &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \tan \alpha \\ x(\tan \alpha - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} \\ x = \frac{1}{\tan \alpha - 1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow B'' = \left( \frac{1}{\tan \alpha - 1}, \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} \right). \end{aligned}$$

La longueur de l'arc intercepté par  $\widehat{AOB} \in Q_{II}$  est donc égale à

$$\begin{aligned} d_R(A, C) + d_R(C, B'') &= 2 + \left| 0 - \frac{1}{\tan \alpha - 1} \right| + \left| 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} \right| \\ &= 2 + \frac{-1}{\tan \alpha - 1} + 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} = 2 + \frac{2}{1 - \tan \alpha}, \end{aligned}$$

car  $\tan \alpha < 0$ . Sachant que  $\tan \alpha = \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{-1}{\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}$ , il vient

$$d_R(A, C) + d_R(C, B'') = 2 + \frac{2}{1 - \tan \alpha} = 2 + \frac{2}{1 - \frac{-1}{\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}} = 2 + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}. \quad (23)$$

Par un raisonnement similaire, la longueur de l'arc intercepté par  $\widehat{AOB} \in Q_{III}$  est égale à

$$4 + \frac{2 \tan(\alpha - \pi)}{1 + \tan(\alpha - \pi)}, \quad (24)$$

et la longueur de l'arc intercepté par  $\widehat{AOB} \in Q_{IV}$  est égale à

$$6 + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})}{1 + \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})}. \quad (25)$$

Nous remarquons que les formules 22-25, permettant de calculer l'amplitude robotique d'un angle appartenant respectivement aux quadrants  $I - IV$ , peuvent être généralisées par la fonction

$$\psi(\alpha) = 2 \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor + \frac{2 \tan(\alpha - \frac{\pi}{2} \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor)}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{2} \left\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \right\rfloor)},$$

qui donne l'amplitude robotique d'un angle axé  $\widehat{AOB}$  en fonction de son amplitude euclidienne  $\alpha$  peu importe le quadrant auquel il appartient.  $\square$

Avant d'aller plus loin, il faut bien comprendre comment la fonction  $\psi(\alpha)$  fonctionne. Le premier terme,  $2 \lfloor \frac{\alpha}{\pi/2} \rfloor$ , « regarde » dans quel quadrant se trouve  $\alpha$ . En effet,  $\lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \rfloor = \lfloor \frac{\alpha}{\pi/2} \rfloor = q - 1$ , où  $q$  désigne le numéro du quadrant auquel appartient  $\alpha$ . La « taille » d'un quadrant robotique n'étant plus  $\frac{\pi}{2}$  mais 2, le premier terme effectue  $2 \times (q - 1)$ . Cela est visible dans les formules 22-25. Le second terme « regarde » où est  $\alpha$  au sein de son quadrant. En effet,  $\alpha - \frac{\pi}{2} \lfloor \frac{2\alpha}{\pi} \rfloor$  ramène l'angle  $\alpha$  au premier quadrant et convertit son amplitude euclidienne, au sein de son quadrant, en robotique.

**Lemme 3.1.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{\pi}{2} \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \tan^{-1} \left( \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \right)}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} MD^{11} &= \left\lfloor \frac{\frac{\pi}{2} \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \tan^{-1} \left( \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \right)}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{\tan^{-1} \left( \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \right)}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \quad \text{ssi} \quad 0 \leq \frac{\tan^{-1} \left( \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \right)}{\frac{\pi}{2}} < 1 \end{aligned}$$

Si cette condition est satisfaite  $\forall x$ , alors la thèse est démontrée. La première inégalité est toujours vérifiée, car

$$\frac{\tan^{-1} \left( \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \right)}{\frac{\pi}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow \tan^{-1} \left( \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \geq 0.$$

Comme  $x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$  n'est qu'une autre manière d'écrire  $x \bmod 2$ ,  $(x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor) \in [0, 2[$ . Ainsi,

$$\forall x, \frac{x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2 - (x - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)} \geq 0.$$

La seconde inégalité est également toujours vérifiée, car  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan^{-1}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . □

**Théorème 3.2.** Soit  $\tilde{\alpha}$  l'amplitude robotique d'un angle axé  $\widehat{AOB}$ , avec  $A(1, 0)$ . L'amplitude euclidienne de l'angle  $\widehat{AOB}$ , notée  $\alpha$ , est donnée par la fonction réciproque de  $\psi(\alpha)$

$$\psi^{-1}(\tilde{\alpha}) = \frac{\pi}{2} \left\lfloor \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right\rfloor + \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{\alpha} - 2 \lfloor \frac{\tilde{\alpha}}{2} \rfloor}{2 - \tilde{\alpha} + 2 \lfloor \frac{\tilde{\alpha}}{2} \rfloor} \right).$$

*Démonstration.* Pour prouver que les fonctions  $\psi$  et  $\psi^{-1}$  sont des fonctions réciproques, comme elles sont bijectives, il suffit de prouver que  $\psi(\psi^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{x}$ .

$$\begin{aligned}
\psi(\psi^{-1}(\tilde{x})) &= 2 \left[ \frac{2\psi^{-1}(\tilde{x})}{\pi} \right] + \frac{2 \tan \left( \psi^{-1}(\tilde{x}) - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\psi^{-1}(\tilde{x})}{\pi} \right] \right)}{1 + \tan \left( \psi^{-1}(\tilde{x}) - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\psi^{-1}(\tilde{x})}{\pi} \right] \right)} \\
&= 2 \left[ \frac{\frac{\pi}{2} \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - \tilde{x} + 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]} \right)}{\frac{\pi}{2}} \right] \\
&\quad + \frac{2 \tan \left( \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - \tilde{x} + 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]} \right) - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\frac{\pi}{2} \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - \tilde{x} + 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]} \right)}{\frac{\pi}{2}} \right]}{1 + \tan \left( \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - \tilde{x} + 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]} \right) - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\frac{\pi}{2} \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - \tilde{x} + 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]} \right)}{\frac{\pi}{2}} \right]} \right)}
\end{aligned}$$

Vu le lemme 3.1, cela devient

$$\begin{aligned}
\psi(\psi^{-1}(\tilde{x})) &= 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \frac{2 \tan \left( \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - (\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right])} \right) \right)}{1 + \tan \left( \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - (\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right])} \right) \right)} \\
&= 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \frac{2 \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - (\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right])}}{1 + \frac{\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2 - (\tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right])}} \\
&= 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \frac{2\tilde{x} - 4 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right]}{2} = 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] + \tilde{x} - 2 \left[ \frac{\tilde{x}}{2} \right] \\
&= \tilde{x}.
\end{aligned}$$

La fonction  $\psi^{-1}$  est donc bien la réciproque de  $\psi$ . Cette dernière donnant l'amplitude robotique d'un angle axé en fonction de son amplitude euclidienne, la fonction  $\psi^{-1}$  donne l'amplitude euclidienne d'un angle en fonction de son amplitude robotique.  $\square$

### 3.3 Fonctions trigonométriques robotiques

#### 3.3.1 Fonctions trigonométriques dans le cercle trirobométrique

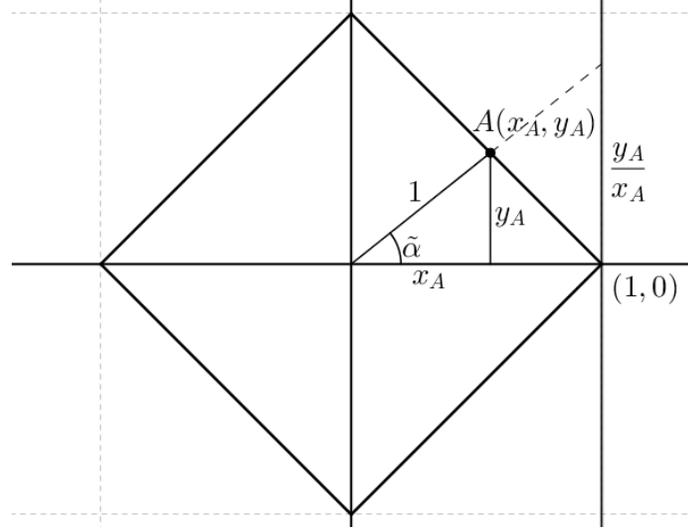


FIGURE 18 – Cercle trigonométrique robotique

En géométrie robotique tout comme en géométrie euclidienne, si  $(x_A, y_A)$  est un point du cercle trirobométrique, par définition,

$$\sin_R \tilde{\alpha} = y_A$$

$$\cos_R \tilde{\alpha} = x_A$$

$$\tan_R \tilde{\alpha} = \frac{\sin_R \tilde{\alpha}}{\cos_R \tilde{\alpha}} = \frac{y_A}{x_A} \quad (A \notin OY \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \neq 2 + 4k, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot_R \tilde{\alpha} = \frac{\cos_R \tilde{\alpha}}{\sin_R \tilde{\alpha}} = \frac{x_A}{y_A} \quad (A \notin OX \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \neq 4k, k \in \mathbb{Z})$$

L'équation cartésienne du cercle trigonométrique étant  $|x| + |y| = 1$ , il en découle l'identité trigonométrique fondamentale

$$|\sin_R \tilde{\alpha}| + |\cos_R \tilde{\alpha}| = 1. \quad (26)$$

## 3.4 Analyse des fonctions trigonométriques robotiques

### 3.4.1 Sinus robotique

La fonction  $f(\tilde{x}) = \sin_R \tilde{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , d'ensemble image  $[-1, 1]$  et de période  $2\pi_R = 8$  (Fig.19). C'est une fonction impaire. Elle peut être définie simplement en fonction du quadrant auquel appartient  $x$  :

$$\begin{aligned} \text{Si } \tilde{x} \in [-2, 2], \quad \sin_R \tilde{x} &= \frac{\tilde{x}}{2}, \\ \text{Si } \tilde{x} \in [2, 6], \quad \sin_R \tilde{x} &= -\frac{\tilde{x}}{2} + 2, \\ \text{Si } \tilde{x} \in [6, 10], \quad \sin_R \tilde{x} &= \frac{\tilde{x}}{2} - 4, \\ \text{Si } \tilde{x} \in [10, 14], \quad \sin_R \tilde{x} &= -\frac{\tilde{x}}{2} + 6. \end{aligned}$$

Ces différents cas sont généralisables en

$$\sin_R \tilde{x} = \frac{1}{2}(-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}-2}{4} \rfloor} \left( -\tilde{x} + 1 + 2 \left\lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \right\rfloor + (-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}-2}{2} \rfloor} \right). \quad (27)$$

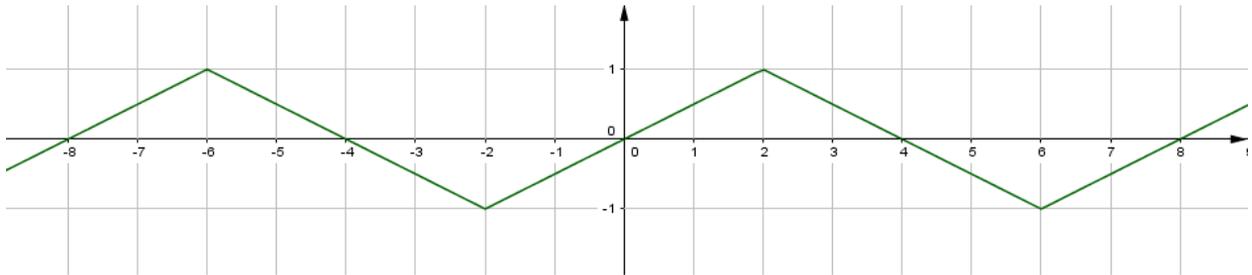


FIGURE 19 – Graphe de la fonction  $f(\tilde{x}) = \sin_R \tilde{x}$

### 3.4.2 Cosinus robotique

La fonction  $f(\tilde{x}) = \cos_R \tilde{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , d'ensemble image  $[-1, 1]$  et de période  $2\pi_R = 8$  (Fig.20). C'est une fonction paire. Elle peut être définie simplement en fonction du quadrant auquel appartient  $\tilde{x}$  :

$$\begin{aligned} \text{Si } \tilde{x} \in [0, 4], & \quad \cos_R \tilde{x} = -\frac{\tilde{x}}{2} + 1, \\ \text{Si } \tilde{x} \in [4, 8], & \quad \cos_R \tilde{x} = \frac{\tilde{x}}{2} - 3, \\ \text{Si } \tilde{x} \in [8, 12], & \quad \cos_R \tilde{x} = -\frac{\tilde{x}}{2} + 5, \\ \text{Si } \tilde{x} \in [12, 16], & \quad \cos_R \tilde{x} = \frac{\tilde{x}}{2} - 7. \end{aligned}$$

Ces différents cas sont généralisables en

$$\cos_R \tilde{x} = \frac{1}{2}(-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}}{4} \rfloor} \left( -\tilde{x} + 1 + 2 \left\lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \right\rfloor + (-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \rfloor} \right). \quad (28)$$

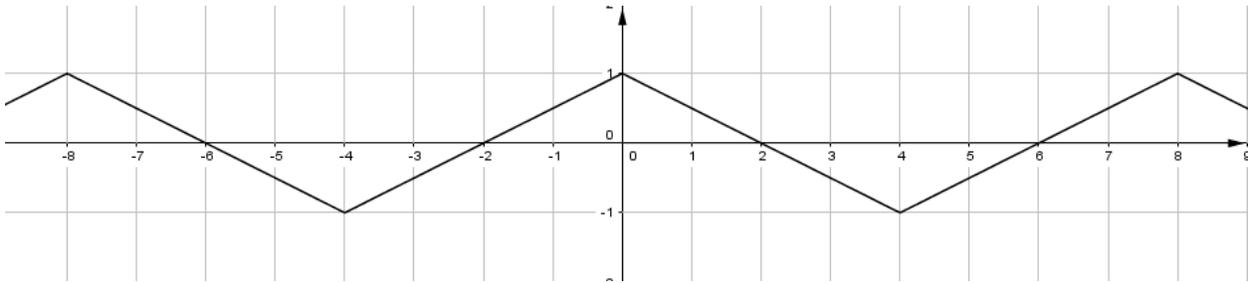


FIGURE 20 – Graphe de la fonction  $f(\tilde{x}) = \cos_R \tilde{x}$

### 3.4.3 Tangente robotique

La fonction  $f(\tilde{x}) = \tan_R \tilde{x}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2 + 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ , d'ensemble image  $\mathbb{R}$  et de période  $\pi_R = 4$  (Fig.21). C'est une fonction impaire. Son expression algébrique est

$$\tan_R \tilde{x} = \frac{\sin_R \tilde{x}}{\cos_R \tilde{x}} = (-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \rfloor} \left( \frac{2(-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \rfloor}}{-\tilde{x} + 1 + 2 \lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \rfloor + (-1)^{\lfloor \frac{\tilde{x}}{2} \rfloor}} - 1 \right). \quad (29)$$

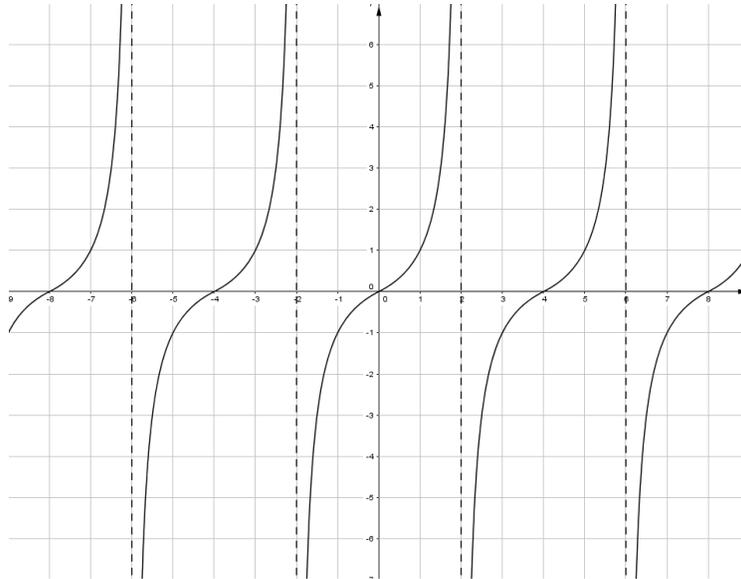


FIGURE 21 – Graphe de la fonction  $f(\tilde{x}) = \tan_R \tilde{x}$

Contrairement à ce que les apparences laisseraient penser, le graphe de  $\tan_R \tilde{x}$  est différent de celui de  $\tan x$ .

## 3.5 Angles associés et identités trigonométriques

### 3.5.1 Angles associés

Des fonctions  $\sin_R$ ,  $\cos_R$  et  $\tan_R$ , nous pouvons directement déduire plusieurs relations qui concernent les angles associés<sup>12</sup>. Ainsi, toutes les relations qui existent en géométrie euclidienne concernant des angles associés sont aussi valables en géométrie robotique. Nous obtenons donc les relations visibles sur la table 1, qui sont démontrables de manière triviale par les expressions algébriques des fonctions trigonométriques.

$$\begin{array}{lll} \sin_R(-\tilde{\alpha}) = -\sin_R(\tilde{\alpha}) & \cos_R(-\tilde{\alpha}) = \cos_R(\tilde{\alpha}) & \tan_R(-\tilde{\alpha}) = -\tan_R(\tilde{\alpha}) \\ \sin_R(2 - \tilde{\alpha}) = \cos_R(\tilde{\alpha}) & \cos_R(2 - \tilde{\alpha}) = \sin_R(\tilde{\alpha}) & \tan_R(2 - \tilde{\alpha}) = \cot_R(\tilde{\alpha}) \\ \sin_R(4 - \tilde{\alpha}) = \sin_R(\tilde{\alpha}) & \cos_R(4 - \tilde{\alpha}) = -\cos_R(\tilde{\alpha}) & \tan_R(4 - \tilde{\alpha}) = -\tan_R(\tilde{\alpha}) \\ \sin_R(2 + \tilde{\alpha}) = \cos_R(\tilde{\alpha}) & \cos_R(2 + \tilde{\alpha}) = -\sin_R(\tilde{\alpha}) & \tan_R(2 + \tilde{\alpha}) = -\cot_R(\tilde{\alpha}) \\ \sin_R(4 + \tilde{\alpha}) = -\sin_R(\tilde{\alpha}) & \cos_R(4 + \tilde{\alpha}) = -\cos_R(\tilde{\alpha}) & \tan_R(4 + \tilde{\alpha}) = \tan_R(\tilde{\alpha}) \end{array}$$

TABLE 1 – Relations entre les angles associés

### 3.5.2 Sinus et cosinus robotiques d'une somme ou d'une différence d'angles

**Théorème 3.3.** *Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles situés du même côté de l'axe  $Ox$  dans le cercle trigonométrique,*

$$\cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = -1 + |\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}|.$$

*Démonstration.* Précisons que deux cas sont possibles. Soit les deux angles sont tous deux au-dessus de l'axe  $Ox$ , soit ils sont tous deux en-dessous. Nous n'allons démontrer que le cas où ils sont tous deux au-dessus. Le second cas se démontre de manière analogue.

Pour démontrer ce théorème, il faut imaginer qu'on « déroule » à partir de  $J(1, 0)$  le cercle robotique sur la droite graduée  $d = JE$ . Cela se fait au moyen de l'application  $f$  définie par

$$f : \mathcal{C}_R \mapsto d : S \mapsto S' : d_R(J, S') = \text{longueur robotique de l'arc robotique } \widehat{JS}.$$

Si  $A, B, C$  sont les points représentant sur le cercle  $\mathcal{C}_R$  les angles  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$  et si  $A', B', C'$  sont leurs images par  $f$ , on a

$$d_R(J, B') = \widehat{JEB}, \quad d_R(J, C') = \widehat{JEKC'}, \quad d_R(B', C') = \widehat{BKC'} = d_R(J, A') \quad (30)$$

Vu les hypothèses,  $A, B \in Q_I \cup Q_{II}$ ,  $C \in \mathcal{C}_R$ .

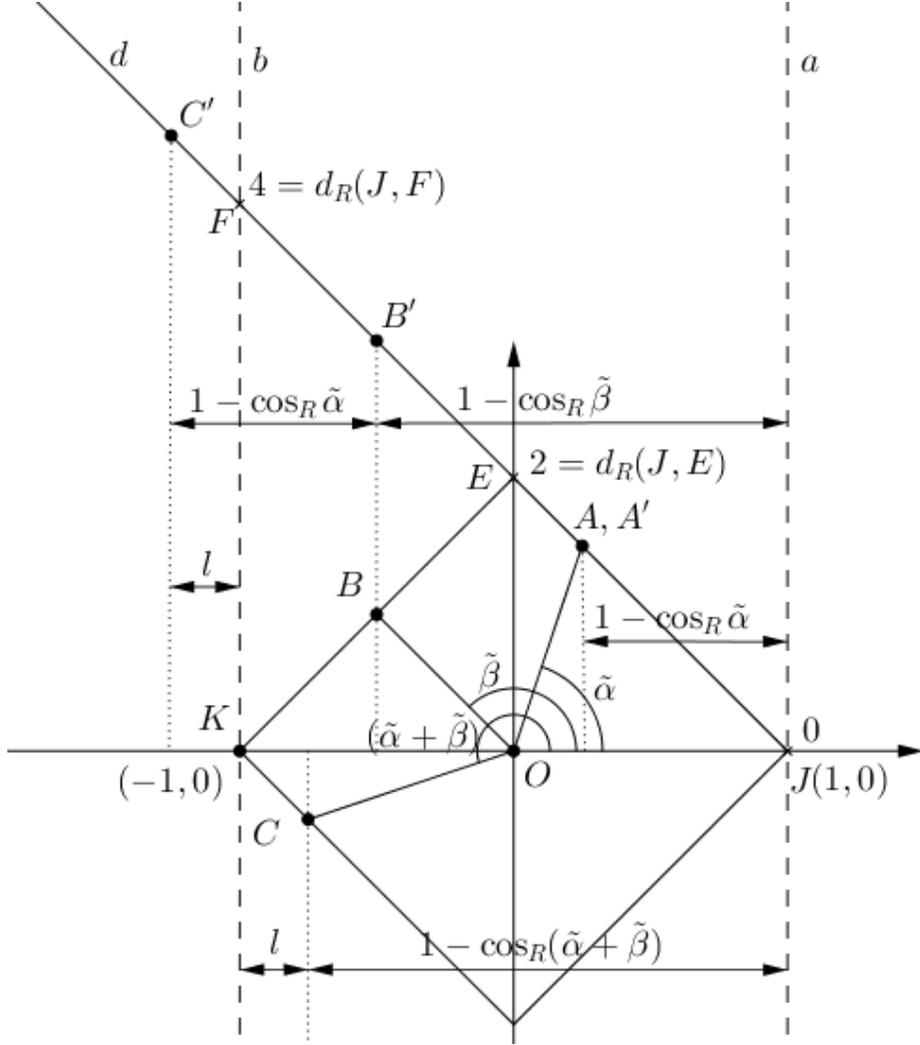
On appelle  $a$  et  $b$  les verticales passant par  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

On appelle  $d_H(A, B)$  la distance horizontale de  $A$  à  $B$ , soit  $d_H(A, B) = |x_A - x_B|$ .

Il vient

$$\begin{aligned} d_R(J, C') &= d_R(J, B') + d_R(B', C') \\ &\stackrel{(30)}{=} d_R(J, B') + d_R(J, A') \\ d_H(C', a) &= d_H(B', a) + d_H(A', a) \end{aligned}$$

12. angles opposés, complémentaires, supplémentaires, anti-complémentaires et anti-supplémentaires.



et donc

$$d_H(C', a) = 1 - \cos_R \tilde{\beta} + 1 - \cos_R \tilde{\alpha} = 2 - (\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}). \quad (31)$$

De plus,

$$d_H(C, a) = 1 - \cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}). \quad (32)$$

La longueur  $l (= d_H(C, b) = d_H(C', b))$  de la figure s'exprime de deux façons différentes :

$$l = 2 - d_H(C, a) \stackrel{(32)}{=} 2 - [1 - \cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})] = 1 + \cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$$

ou

$$l = |d_H(C', a) - d_H(a, b)| \stackrel{(31)}{=} |[2 - (\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta})] - 2| = |\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}|.$$

La valeur absolue est nécessaire car  $C'$  peut se situer à droite ou à gauche de  $b$ .

D'où la thèse en égalant les deux expressions de  $l$ . □

**Théorème 3.4.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles situés de part et d'autre de l'axe  $Ox$  dans le cercle trigonométrique,

$$\cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = 1 - |\cos_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta}|.$$

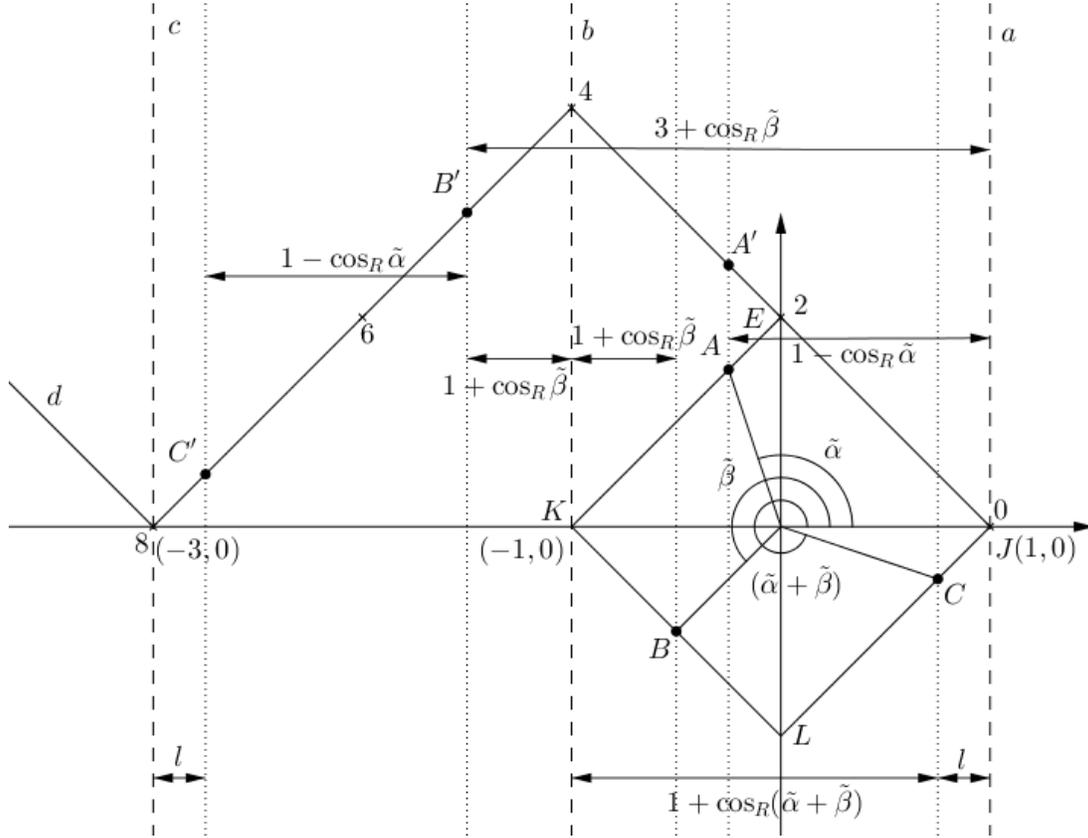
*Démonstration.* Soit  $\tilde{\alpha} \in [0, 4](Q_I \cup Q_{II})$  et  $\tilde{\beta} \in [4, 8](Q_{III} \cup Q_{IV})$ .

Ici encore, il faut imaginer qu'on déroule le cercle robotique à partir de  $J(1,0)$  sur la «dent de scie»  $d$  dont le rôle est de gagner de la place en hauteur<sup>13</sup>.

Comme au théorème précédent, cela se fait au moyen de l'application  $f$  définie par

$$f : \mathcal{C}_R \mapsto d : S \mapsto S' : d_{R_d}(J, S') = \text{longueur robotique de l'arc robotique } \widehat{JS},$$

où  $d_{R_d}$  correspond à la distance robotique mesurée en parcourant  $d$ .



Si  $A, B, C$  sont les points représentant sur le cercle  $\mathcal{C}_R$  les angles  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$  et si  $A', B', C'$  sont leurs images par  $f$ , on a

$$\begin{aligned} d_{R_d}(J, B') &= \widehat{JEB} \\ d_{R_d}(J, C') &= \widehat{JEKLC} (= 2 + 2 + 2 + \widehat{LC}) \\ d_{R_d}(B', C') &= \widehat{BLC} = \widehat{JEA} = d_{R_d}(J, A') \end{aligned} \quad (33)$$

13. Les distances horizontales sont ainsi conservées.

On appelle  $a, b, c$  les verticales passant par  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  et  $(-3, 0)$ .

$d_H$  désigne comme ci-dessus la distance horizontale.

Il vient :

$$\begin{aligned} d_{R_d}(J, C') &= d_{R_d}(J, B') + d_{R_d}(B', C') \\ &\stackrel{(33)}{=} d_{R_d}(J, B') + d_{R_d}(J, A') \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} d_H(C', a) &= d_H(J, B') + d_H(J, A') \\ &= [1 + \cos_R \tilde{\beta} + d_H(a, b)] + (1 - \cos_R \tilde{\alpha}) = 4 + \cos_R \tilde{\beta} - \cos_R \tilde{\alpha}. \end{aligned} \quad (34)$$

De plus,

$$d_H(C, b) = 1 + \cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}).$$

La longueur  $l$  de la figure s'exprime de deux manières différentes :

$$l = 2 - d_H(C, b) = 2 - [1 + \cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})] = 1 - \cos_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$$

ou

$$l = |d_H(C', a) - d_H(c, a)| \stackrel{(34)}{=} |(4 + \cos_R \tilde{\beta} - \cos_R \tilde{\alpha}) - 4| = |\cos_R \tilde{\beta} - \cos_R \tilde{\alpha}|.$$

La valeur absolue est nécessaire car  $C'$  peut se situer à gauche ou à droite de  $(-3, 0)$ .

D'où la thèse en égalant les deux expressions de  $l$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.1.**  $\cos_R(2\tilde{\alpha}) = -1 + |2 \cos_R \tilde{\alpha}|$

**Théorème 3.5.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles situés du même côté de l'axe  $Ox$  dans le cercle trigonométrique,

$$\cos_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = 1 - |\cos_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta}|.$$

*Démonstration.*

$$\cos_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R(\tilde{\alpha} + (-\tilde{\beta}))$$

Comme  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont situés du même côté de l'axe  $Ox$ ,  $\tilde{\alpha}$  et  $(-\tilde{\beta})$  sont situés de part et d'autre de l'axe  $Ox$ . Ainsi, par le théorème 3.4, nous obtenons

$$\cos_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R(\tilde{\alpha} + (-\tilde{\beta})) = 1 - |\cos_R \tilde{\alpha} - \cos_R(-\tilde{\beta})| = 1 - |\cos_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta}|$$

$\square$

**Théorème 3.6.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles situés de part et d'autre de l'axe  $Ox$  dans le cercle trigonométrique,

$$\cos_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = -1 + |\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}|.$$

*Démonstration.*

$$\cos_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R(\tilde{\alpha} + (-\tilde{\beta}))$$

Comme  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont situés de part et d'autre de l'axe  $Ox$ ,  $\tilde{\alpha}$  et  $(-\tilde{\beta})$  sont situés du même côté de l'axe  $Ox$ . Ainsi, par le théorème 3.3, nous obtenons

$$\cos_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R(\tilde{\alpha} + (-\tilde{\beta})) = -1 + |\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R(-\tilde{\beta})| = -1 + |\cos_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}|$$

□

**Théorème 3.7.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles du cercle robotique tels que  $\tilde{\beta} \in Q_I \cup Q_{II}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_I \cup Q_{IV}$  ou bien  $\tilde{\beta} \in Q_{III} \cup Q_{IV}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_{II} \cup Q_{III}$ ,

$$\sin_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = -1 + |\sin_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}|.$$

*Démonstration.* Par l'identité concernant les angles complémentaires, nous savons que

$$\sin_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R(2 - (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) + \tilde{\beta}).$$

Pour pouvoir utiliser le théorème 3.3, il faut que  $(2 - \tilde{\alpha})$  et  $\tilde{\beta}$  soient situés du même côté de l'axe  $Ox$ . C'est le cas uniquement lorsque les hypothèses sont respectées. Dans ces cas-là, nous avons donc

$$\sin_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) + \tilde{\beta}) = -1 + |\cos_R(2 - \tilde{\alpha}) + \cos_R \tilde{\beta}| = -1 + |\sin_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta}|.$$

□

**Théorème 3.8.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles du cercle robotique tels que  $\tilde{\beta} \in Q_I \cup Q_{II}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_{II} \cup Q_{III}$  ou bien  $\tilde{\beta} \in Q_{III} \cup Q_{IV}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_I \cup Q_{IV}$ ,

$$\sin_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = 1 - |\sin_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta}|.$$

*Démonstration.* Par l'identité concernant les angles complémentaires, nous savons que

$$\sin_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R(2 - (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) + \tilde{\beta}).$$

Pour pouvoir utiliser le théorème 3.4, il faut que  $(2 - \tilde{\alpha})$  et  $\tilde{\beta}$  soient situés de part et d'autre de l'axe  $Ox$ . C'est le cas uniquement lorsque les hypothèses sont respectées. Dans ces cas-là, nous avons donc

$$\sin_R(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) + \tilde{\beta}) = 1 - |\cos_R(2 - \tilde{\alpha}) - \cos_R \tilde{\beta}| = 1 - |\sin_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta}|.$$

□

**Théorème 3.9.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles du cercle robotique tels que  $\tilde{\beta} \in Q_I \cup Q_{II}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_I \cup Q_{IV}$  ou bien  $\tilde{\beta} \in Q_{III} \cup Q_{IV}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_{II} \cup Q_{III}$ ,

$$\sin_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = 1 - \left| \sin_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta} \right|.$$

*Démonstration.* Par l'identité concernant les angles complémentaires, nous savons que

$$\sin_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = \cos_R(2 - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) - \tilde{\beta}).$$

Pour pouvoir utiliser la proposition 3.5, il faut que  $(2 - \tilde{\alpha})$  et  $\tilde{\beta}$  soient situés du même côté de l'axe  $Ox$ . C'est le cas uniquement lorsque les hypothèses sont respectées. Dans ces cas-là, nous avons donc

$$\sin_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) - \tilde{\beta}) = 1 - \left| \cos_R(2 - \tilde{\alpha}) - \cos_R \tilde{\beta} \right| = 1 - \left| \sin_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta} \right|.$$

□

**Corollaire 3.9.1.** Soit  $\tilde{\alpha} \in Q_I \cup Q_{III}$ ,  $\sin_R(2\tilde{\alpha}) = 1 - \left| \sin_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\alpha} \right|$ .

**Théorème 3.10.** Soient  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  deux angles du cercle robotique tels que  $\tilde{\beta} \in Q_I \cup Q_{II}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_{II} \cup Q_{III}$  ou bien  $\tilde{\beta} \in Q_{III} \cup Q_{IV}$  et  $\tilde{\alpha} \in Q_I \cup Q_{IV}$ ,

$$\sin_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = 1 - \left| \sin_R \tilde{\alpha} - \cos_R \tilde{\beta} \right|.$$

*Démonstration.* Par l'identité concernant les angles complémentaires, nous savons que

$$\sin_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = \cos_R(2 - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) - \tilde{\beta}).$$

Pour pouvoir utiliser la proposition 3.6, il faut que  $(2 - \tilde{\alpha})$  et  $\tilde{\beta}$  soient situés de part et d'autre de l'axe  $Ox$ . C'est le cas uniquement lorsque les hypothèses sont respectées. Dans ces cas-là, nous avons donc

$$\sin_R(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) = \cos_R((2 - \tilde{\alpha}) - \tilde{\beta}) = -1 + \left| \cos_R(2 - \tilde{\alpha}) + \cos_R \tilde{\beta} \right| = -1 + \left| \sin_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\beta} \right|.$$

□

**Corollaire 3.10.1.** Soit  $\tilde{\alpha} \in Q_{II} \cup Q_{IV}$ ,  $\sin_R(2\tilde{\alpha}) = -1 + \left| \sin_R \tilde{\alpha} + \cos_R \tilde{\alpha} \right|$ .

### 3.6 Théorème de conservation de l'angle droit

En géométrie robotique, la rotation n'est pas une isométrie. Ainsi, si l'on effectue la rotation d'un segment ou d'un angle, il risque de ne plus avoir la même longueur ou la même amplitude. Mais dans ce cas, comment pourrions-nous définir l'angle droit, s'il ne résiste pas à la rotation ? Heureusement, l'angle droit est le seul à résister à la rotation.

**Théorème 3.11.** *Tout angle d'amplitude euclidienne  $\frac{\pi}{2}$  a une amplitude robotique de  $\frac{\pi_R}{2} = 2$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, supposons un angle  $\widehat{AOB}$  d'amplitude euclidienne  $\frac{\pi}{2}$  dans le cercle unitaire. En plaçant le point  $C(1, 0)$ , nous pouvons définir  $\alpha = |\widehat{COA}|$  et  $\beta = |\widehat{COB}|$ . Ainsi,  $|\beta - \alpha| = \frac{\pi}{2}$ . On suppose ici  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ . Appelons  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  les amplitudes robotiques des angles  $\widehat{COA}$  et  $\widehat{COB}$ . Ces angles étant des angles axés, par le théorème 3.1, nous savons que  $\psi(\alpha) = \tilde{\alpha}$  et  $\psi(\beta) = \tilde{\beta}$ . L'amplitude robotique de l'angle  $\widehat{AOB}$  est donc égale à

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} &= \psi(\beta) - \psi(\alpha) \\ &= 2 \left[ \frac{2\beta}{\pi} \right] + \frac{2 \tan \left( \beta - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\beta}{\pi} \right] \right)}{1 + \tan \left( \beta - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\beta}{\pi} \right] \right)} - \left( 2 \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] + \frac{2 \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right)}{1 + \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right)} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Comme  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons que

$$\begin{aligned} \beta - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\beta}{\pi} \right] &= \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha + \pi}{\pi} \right] = \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} + 1 \right] \\ &= \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left( \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] + 1 \right) = \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right]. \end{aligned}$$

En remplaçant dans 35, l'amplitude robotique de l'angle  $\widehat{AOB}$  est égale à

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} &= 2 \left[ \frac{2 \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right)}{\pi} \right] + \frac{2 \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right)}{1 + \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right)} - 2 \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] - \frac{2 \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right)}{1 + \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right)} \\ &= 2 \left[ \frac{\alpha + \pi}{\pi} \right] - 2 \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] = 2 \left( \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] + 1 - \left[ \frac{2\alpha}{\pi} \right] \right) = 2. \end{aligned}$$

□

### 3.7 Amplitude robotique d'un angle non-axé

La rotation n'étant pas une isométrie en géométrie robotique, deux angles d'amplitudes euclidiennes égales n'auront pas toujours la même amplitude robotique. Cela dépendra en effet de leur inclinaison. Nous devons donc introduire une nouvelle fonction qui permet de connaître l'amplitude robotique d'un angle en fonction de son amplitude euclidienne et de son inclinaison.

**Proposition 3.1.** Soient  $\alpha$  l'amplitude euclidienne d'un angle  $\widehat{AOB}$  et  $\lambda$  l'amplitude euclidienne de l'angle orienté formé par l'axe  $Ox$  et  $OA$  (Fig.22), que nous appelons « inclinaison » de l'angle  $\widehat{AOB}$ . L'amplitude robotique  $\tilde{\alpha}$  de l'angle  $\widehat{AOB}$  est donnée par

$$\tilde{\alpha} = \psi(\alpha + \lambda) - \psi(\lambda).$$

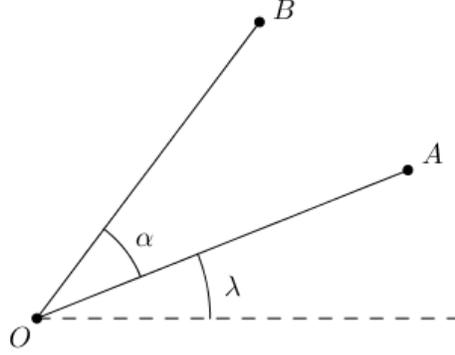


FIGURE 22 – Angle non-axé

**Proposition 3.2.** Soient  $\tilde{\alpha}$  l'amplitude robotique d'un angle  $\widehat{AOB}$  et  $\tilde{\lambda}$  l'amplitude robotique de l'angle orienté formé par l'axe  $Ox$  et  $OA$ . L'amplitude euclidienne  $\alpha$  de l'angle  $\widehat{AOB}$  est donnée par

$$\alpha = \psi^{-1}(\tilde{\alpha} + \tilde{\lambda}) - \psi^{-1}(\tilde{\lambda}).$$

### 3.8 Propriétés des angles

**Théorème 3.12.** Deux angles d'amplitudes euclidiennes égales dont l'un est incliné d'un multiple de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à l'autre ont des amplitudes robotiques égales.

*Démonstration.* Ce théorème est immédiat puisque la rotation de  $\pm 90^\circ$  est une isométrie en géométrie robotique.  $\square$

Quelques propriétés concernant des angles à côtés parallèles sont conservées en géométrie robotique. Nous parlons à partir de maintenant uniquement d'amplitude robotique, et nous ne le précisons donc plus.

**Propriété 1.** Deux angles opposés par le sommet ont la même amplitude robotique.

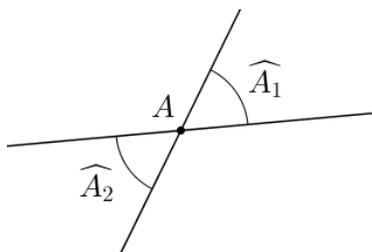


FIGURE 23 – Angles opposés par le sommet

*Démonstration.* Soient deux angles  $\widehat{A}_1$  et  $\widehat{A}_2$  opposés par le sommet (Fig.23). Ces deux angles étant images l'un de l'autre par symétrie de centre  $A$ , et la symétrie centrale étant une isométrie, ils ont la même amplitude.  $\square$

**Propriété 2.** Deux angles alternes-internes formés par deux parallèles et une sécante ont la même amplitude robotique.

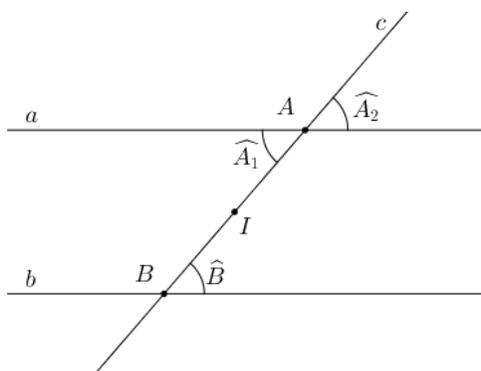


FIGURE 24 – Angles formés par deux parallèles et une sécante

*Démonstration.* Soient deux droites parallèles  $a$  et  $b$  et une sécante  $c$ , deux angles  $\widehat{A}_1$  et  $\widehat{B}$  (Fig.24). Appelons  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Les angles  $\widehat{A}_1$  et  $\widehat{B}$  sont images l'un de l'autre par symétrie de centre  $I$  et ont donc la même amplitude.  $\square$

**Propriété 3.** Deux angles correspondants formés par deux parallèles et une sécante ont la même amplitude robotique.

*Démonstration.* Reprenons la construction précédente. Soient deux angles correspondants  $\widehat{A}_2$  et  $\widehat{B}$ . Par la propriété 1, nous savons que  $\widehat{A}_1$  et  $\widehat{A}_2$  ont la même amplitude car ils sont opposés par le sommet  $A$ . Or,  $\widehat{A}_1$  et  $\widehat{B}$  ont la même amplitude par la propriété 2. Ainsi, par transitivité de l'égalité,  $\widehat{A}_2$  et  $\widehat{B}$  ont la même amplitude.  $\square$

En géométrie euclidienne, la somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle est toujours égale à  $\pi$ . Grâce à ces nouvelles propriétés, nous pouvons démontrer que c'est également le cas en géométrie robotique.

**Théorème 3.13.** *La somme des amplitudes robotiques des angles intérieurs d'un triangle est égale à  $\pi_R = 4$ .*

*Démonstration.* Soit un triangle  $ABC$ . Nommons les angles intérieurs de ce triangle respectivement  $\widehat{A}_1$ ,  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$  (Fig.25). Par  $A$ , traçons une droite parallèle au côté  $BC$ . Les angles

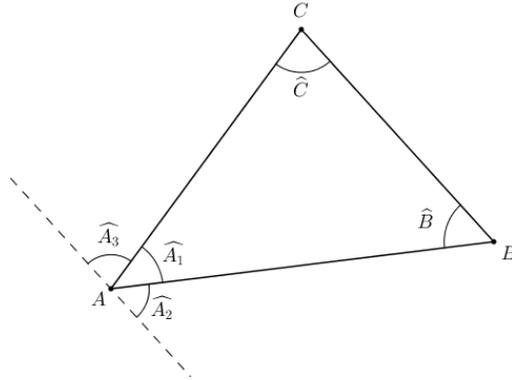


FIGURE 25 – Triangle  $ABC$

formés par cette droite et les côtés du triangle sont appelés  $\widehat{A}_2$  et  $\widehat{A}_3$ . Les angles  $\widehat{A}_2$  et  $\widehat{B}$  sont deux angles alternes-internes formés par deux parallèles et une sécante, par la propriété 2,

$$|\widehat{A}_2|_R = |\widehat{B}|_R.$$

Il en va de même pour les angles  $\widehat{A}_3$  et  $\widehat{C}$ , nous avons donc

$$|\widehat{A}_3|_R = |\widehat{C}|_R.$$

Les angles  $\widehat{A}_1$ ,  $\widehat{A}_2$  et  $\widehat{A}_3$  forment un angle plat. Ainsi,

$$|\widehat{A}_1|_R + |\widehat{A}_2|_R + |\widehat{A}_3|_R = \pi_R = 4,$$

et par substitution, nous obtenons

$$|\widehat{A}_1|_R + |\widehat{B}|_R + |\widehat{C}|_R = 4.$$

□

### 3.9 Fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle axé

Soit un triangle rectangle  $BOA$  où  $OB$  et  $AB$  sont parallèles aux axes coordonnés et le triangle  $B'OA'$  qui a les mêmes caractéristiques avec en plus  $d_R(O, A') = 1$ . On a de suite  $\sin_R \tilde{\alpha} = A'B'$ .

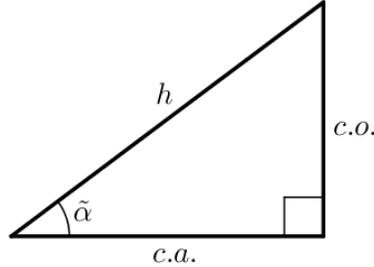


FIGURE 26 – Triangle rectangle contenant l'angle axé d'amplitude  $\tilde{\alpha}$

On a, comme en géométrie euclidienne

$$\sin_R \tilde{\alpha} = \frac{AB}{d_R(O, A)} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

De fait,

$$\frac{AB}{d_R(O, A)} = \frac{AB}{OB + BA} = \frac{1}{\frac{OB}{AB} + 1} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\frac{OB'}{A'B'} + 1} = \frac{A'B'}{OB' + B'A'} = \frac{A'B'}{d_R(O, A')} = A'B'.$$

\*Les triangles  $BOA$  et  $B'OA'$  étant à côtés parallèles sont semblables.

De même,

$$\cos_R \tilde{\alpha} = \frac{OB}{d_R(O, A)} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

Et donc aussi,

$$\tan_R \tilde{\alpha} = \frac{\sin_R \tilde{\alpha}}{\cos_R \tilde{\alpha}} = \frac{AB}{OB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

## 4 Conversion des distances

### 4.1 Relations liant les distances robotiques et euclidiennes

Il existe plusieurs relations qui permettent à Norbert de convertir ses distances robotiques en distances euclidiennes et inversement. Nous allons vous en présenter deux d'entre elles ici.

**Théorème 4.1.** *Soient deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ ,*

$$d_R(A, B)^2 = d_E(A, B)^2 + 2|(x_A - x_B)(y_A - y_B)|.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} d_R(A, B) &= |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \\ d_E(A, B) &= \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2} \end{aligned}$$

Les deux membres de chacune de ces deux égalités étant positifs, nous pouvons les élever au carré.

$$\begin{aligned} d_R(A, B)^2 &= |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2 + 2|x_A - x_B||y_A - y_B| \\ d_E(A, B)^2 &= |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la relation suivante :

$$d_R(A, B)^2 = d_E(A, B)^2 + 2|(x_A - x_B)(y_A - y_B)|. \tag{36}$$

□

**Théorème 4.2.** Soient deux points  $A$  et  $B$ , et  $\alpha$  l'amplitude euclidienne de l'angle formé par le segment  $[AB]$  et l'axe  $Ox$ ,

$$d_R(A, B) = d_E(A, B) \times (|\sin \alpha| + |\cos \alpha|)$$

*Démonstration.* Traçons un triangle rectangle  $ABC$  ayant  $[AB]$  comme hypoténuse et dont les côtés adjacents à l'angle droit sont parallèles aux axes (voir Fig.27). L'angle  $\widehat{BAC}$  a une amplitude euclidienne égale à  $\alpha$ .

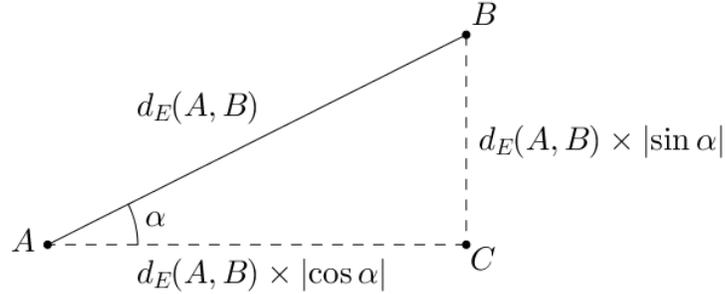


FIGURE 27 – Triangle rectangle  $ABC$

Par la trigonométrie dans un triangle rectangle, nous savons que

$$d_E(A, C) = d_E(A, B) \times |\cos \alpha|, d_E(B, C) = d_E(A, B) \times |\sin \alpha|.$$

Or, Comme les côtés  $AC$  et  $BC$  sont parallèles aux axes,

$$d_R(A, B) = d_E(A, B) \times |\sin \alpha| + d_E(A, B) \times |\cos \alpha| = d_E(A, B) \times (|\sin \alpha| + |\cos \alpha|)$$

□

## 4.2 Définition de la norme robotique

La norme d'un vecteur est la longueur de ce vecteur. De manière similaire, la norme d'un point de l'espace (représenté par un nombre complexe dans un espace à 2 dimensions) est la distance entre ce point et le centre du repère. Encore une fois, la notion de distance intervient et le concept de norme est modifié en géométrie robotique. Nous allons donc définir la norme robotique. Nous travaillerons ici dans un espace à 2 dimensions. Ainsi, pour simplifier les écritures, nous travaillerons dans le plan de Gauss, avec des nombres complexes.

La norme robotique d'un point <sup>14</sup>  $z \in \mathbb{C}$ , avec  $x, y : z = x + iy$ , est définie comme étant une application

$$\|z\|_R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ : z \rightarrow |x| + |y|.$$

En utilisant le même raisonnement que pour le théorème 4.2, nous trouvons une relation qui lie la norme robotique et la norme euclidienne d'un point en fonction de l'argument de ce point.

14. Un point peut représenter un vecteur et est noté à l'aide d'un nombre complexe.

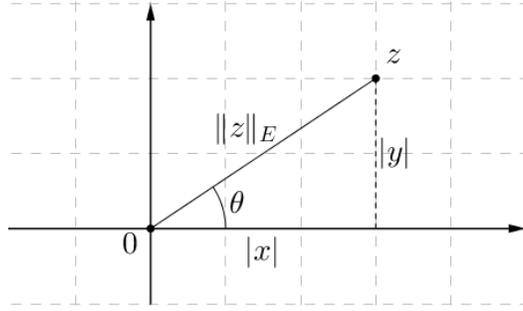


FIGURE 28 –  $z$  sur le plan de Gauss

**Théorème 4.3.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ , avec  $\theta = \arg z$ ,

$$\|z\|_R = \|z\|_E (|\sin \theta| + |\cos \theta|).$$

*Démonstration.* Sur le plan de Gauss, plaçons  $z = x + iy$ . De manière analogue au théorème 4.2 (voir Fig.28), nous savons que

$$\begin{aligned} |x| &= \|z\|_E |\cos \theta|, \\ |y| &= \|z\|_E |\sin \theta|. \end{aligned}$$

Ainsi, vu la définition de la norme robotique et par mise en évidence,

$$\|z\|_R = |x| + |y| = \|z\|_E (|\sin \theta| + |\cos \theta|).$$

□

### 4.3 Transformation du plan

Grâce à la relation que nous venons de trouver, nous pouvons construire une fonction complexe qui transforme le plan en respectant la relation entre norme robotique et norme euclidienne. L'idée est de ne plus mesurer la norme robotique d'un point, mais de mesurer la norme euclidienne de l'image de ce point par la transformation du plan à la place. Comme la transformation est construite à partir de la relation qui lie normes euclidienne et robotique, ces deux valeurs doivent être égales.

Cette fonction complexe est définie comme étant l'application

$$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} : z \mapsto z (|\sin \theta| + |\cos \theta|), \quad (37)$$

avec  $\theta = \arg z$ .

**Théorème 4.4.** *Les espaces normés  $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_R)$  et  $(f(\mathbb{C}), \|\cdot\|_E)$  sont isométriques.*

*Démonstration.* Pour rappel, ces deux espaces normés sont isométriques ssi  $\forall z \in \mathbb{C}, \|z\|_R = \|f(z)\|_E$ . Vu le théorème 4.3, nous savons que

$$\|z\|_R = \|z\|_E (|\sin \theta| + |\cos \theta|).$$

En appliquant à  $z$  la transformation  $f$ , nous obtenons  $f(z) = z (|\sin \theta| + |\cos \theta|)$ . Calculons maintenant la norme euclidienne de  $f(z)$  :

$$\|f(z)\|_E = \|z (|\sin \theta| + |\cos \theta|)\|_E = \|z\|_E (|\sin \theta| + |\cos \theta|),$$

car  $|\sin \theta| + |\cos \theta| \in \mathbb{R}$ . Nous obtenons donc

$$\|z\|_R = \|f(z)\|_E.$$

□

## 4.4 Visualisation de la transformation $f$

La fonction complexe  $f(z) = z (|\sin \theta| + |\cos \theta|)$  peut donc, comme nous l'avons déjà dit, être visualisée comme étant une transformation du plan, associant chaque point du plan à une image telle que la norme euclidienne de l'image est égale à la norme robotique du point antécédent. Sur la fig.29, nous pouvons voir comment fonctionne cette transformation.

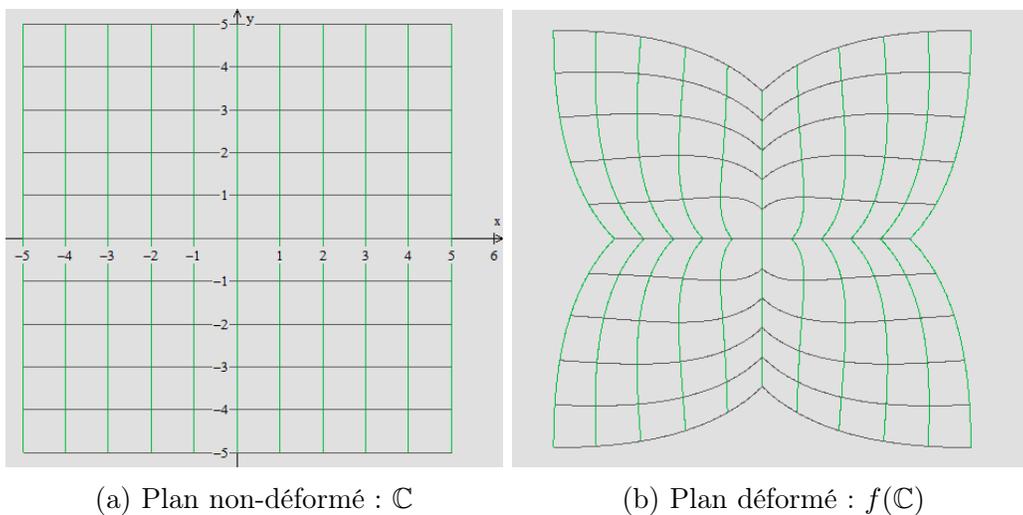
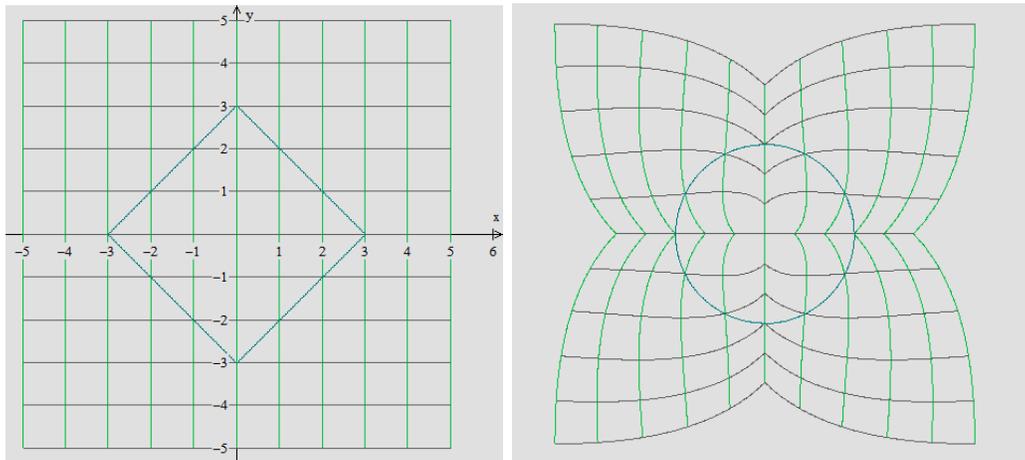


FIGURE 29 – Transformation du plan par la fonction  $f$

Cette transformation du plan nous permet par exemple d'obtenir directement le cercle robotique. En effet, en traçant sur le plan déformé  $f(\mathbb{C})$  le lieu des points situés à égale distance euclidienne du centre du repère, c'est-à-dire un cercle, et en appliquant à  $f(\mathbb{C})$  la transformation inverse  $f^{-1}$ , nous obtenons le plan non-déformé  $\mathbb{C}$  sur lequel est tracé le lieu

des points situés à égale distance robotique<sup>15</sup> du centre du repère, c'est-à-dire, notre cher cercle robotique. Cette déformation est visible sur la figure30.



(a) Cercle robotique sur le plan non-déformé  $\mathbb{C}$  (b) Cercle euclidien sur le plan déformé  $f(\mathbb{C})$

FIGURE 30 – Transformation du plan pour obtenir le cercle robotique

---

15. La transformation a *converti* norme euclidienne en norme robotique.

## 5 Remerciements

Nous avons eu beaucoup de plaisir à chercher et plus encore à trouver.

Nous remercions l'association de parents du collège Saint-Benoît – Saint-Servais pour leur participation financière, l'ULiège pour la disponibilité de ses assistants, Julien RASKIN et Céline ESSER, et MATH.en.JEANS pour son organisation. Nous remercions robotiquement Loïck Salmon, qui a cherché avec nous presque jusqu'au bout.

Le sujet était très intéressant, très vaste. Il permettait une approche géométrique, analytique et même à la fin topologique. C'était vraiment un autre regard sur le concept de distance. L'intuition était nécessaire, ouvrant parfois trop de portes, les conjectures appelaient toujours des démonstrations parfois ardues. Chacun, par ses idées et sa rigueur, a pu contribuer à la recherche des résultats de l'article.

Pour l'avenir, on peut chercher d'autres applications en 2D, poser le problème en 3D ou poursuivre la recherche dans le plan topologique.