# Multiplications en chaîne

Année 2016—2017

Par Davan CHIEM DAO et Eloi COLLETTE, élèves de sixième année

Au Collège Sainte-Véronique à Liège

Enseignants : Sébastien KIRSCH, Anne LACROIX et Sandrine SCHIERES

Chercheurs : Julien LEROY, Adeline MASUIK et Stéphanie TIXHON

## 1. Présentation du sujet

« La multiplication en chaîne » consiste à multiplier entre eux les chiffres qui constituent un nombre entre eux, puis à multiplier entre eux les chiffres qui constituent le résultat de la première multiplication, puis à multiplier entre eux les chiffres qui constituent le résultat de la deuxième multiplication, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un résultat compris entre 0 et 9. Lorsque le résultat est dans cet intervalle, on dit que la multiplication en chaîne est *complète*.

Exemples : La multiplication en chaîne pour le nombre 4916783 est la suivante

4 . 9 . 1 .6 . 7 . 8 . 3 = 36228
3 . 6 . 2 . 2 . 8 = 576
5 . 7 . 6 = 210
2 . 1 . 0 = 0

Il faut donc 4 étapes pour compléter la multiplication en chaîne de 491678.

La multiplication en chaîne pour le nombre 953 est la suivante

9 . 5 . 3 = 135
1 . 3 . 5 = 15
1 . 5 = 5

Il faut donc 3 étapes pour compléter la multiplication en chaîne de 953.

Voici les deux questions qui nous ont été posées :

- Démontrer que le produit des chiffres qui composent un nombre est toujours plus petit que le nombre de départ.
- En combien d'étapes peut-on compléter une multiplication en chaîne ?

## 2. Résultats obtenus

Nous avons démontré que le produit des chiffres qui composent un nombre est toujours plus petit que ce nombre. Nous allons démontrer le théorème suivant dans la suite de l'article :
**Theorem 1**. *Le produit des chiffres qui composent un nombre est toujours plus petit que ce nombre.*

Nous avons établi une méthode pour déterminer le nombre d'étapes pour les $10^7$ premiers naturels.

## 3. Détails des résultats

1. <u>Preuve du théorème 1</u>

<u>Hypothèses</u>

Prenons $n \in \mathbb{N}_0$.
Considérons $a \in \mathbb{N} \cap [0 ; 10^{n+1} - 1]$.
Soit $c_0$, le chiffre de l'unité de a,
Soit $c_1$, le chiffre de la dizaine de a,
…
Soit $c_{n-1}$, le 2ème chiffre de a,
Soit $c_n$, le 1er chiffre de a, avec $c_n \neq 0$,
Tels que $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$ avec $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

<u>Thèse</u>

$c_n \cdot c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0 \leq a$

<u>Démonstration</u>

Par hypothèses $a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$

Dès lors, il suffit de prouver

$$c_n \cdot c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0 \leq c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$$
$$\Leftrightarrow (c_n \cdot c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0) / c_n \leq (c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0) / c_n$$
$$\Leftrightarrow c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0 \leq 10^n + (c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0) / c_n$$

Or, le produit $c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0$ vaut au maximum $9^n$ car $c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0 \in [0 ; 9^n]$

De plus,

$(c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0) / c_n \geq 0$ car le quotient d'une somme de nombres positifs par un nombre positif non nul est positif.

Donc, on a $c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0 \leq 9^n \leq 10^n \leq c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$

Car $9^n \leq 10^n$ est toujours vrai si $n \in \mathbb{N}_0$

Donc,

$c_n \cdot c_{n-1} \cdot \ \ldots \ \cdot c_1 \cdot c_0 \leq a$, ce qui termine la preuve du théorème.

2. Analyse pour les $10^7$ premiers naturels

Pour tenter de comprendre les facteurs qui influencent les nombres d'étapes, nous avons créé un tableau Excel qui effectue la multiplication en chaîne des $10^7$ premiers naturels.

Ensuite, nous avons compté le nombre de fois où une multiplication en chaîne complète se termine en 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Autrement dit, nous avons compté le nombre de fois où nous arrivons à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 à la fin de la multiplication en chaîne pour $10^7$ premiers naturels. Nous avons constaté qu'il y a plus de récurrence en 0 puis 6 puis 8 puis 2 puis 4 puis 5 puis 9 puis 3 et 7 égaux puis 1. Nous avons aussi remarqué que plus nous augmentons le nombre de chiffres qui forment le nombre de départ, plus le nombre d'étapes maximum augmente.

3. Conditions nécessaires et/ou suffisantes pour atteindre un nombre

Nous avons analysé la multiplication en chaîne pour les 10.000.000 premiers naturels et en avons tiré les six conclusions suivantes.

Conclusion 1. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 1, est que tous les chiffres du nombre de départ soient 1 car 1 est un élément neutre de la multiplication. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète.

Cette condition est aussi nécessaire, pour qu'elle soit prouvée, il faudrait prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 implique au moins un facteur plus grand que 9. Dès lors, il est impossible d'obtenir ce produit uniquement avec un produit de chiffres. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1.

Exemple : On a 111 = 3 . 37 et 37 étant un nombre premier plus grand que 9.
On a 1111 = 11 . 10 ; 11 et 101 étant des nombres premiers plus grands que 9.

Conclusion 2. Voici deux conditions suffisantes pour que le produit final soit égal à 0 :

- Il existe au moins un 0 parmi les chiffres du nombre de départ. La multiplication sera complète en une étape.
Exemple : 370, on a 3 . 7 . 0 = 0

- Il existe au moins un 5 et un chiffre pair parmi les chiffres du nombre de départ. La multiplication sera complète en deux étapes.
Exemple : 8315, on a 8 . 3 . 1 . 5 = 120
1 . 2 . 0 = 0

Conclusion 3. Une condition nécessaire pour que le produit final soit égal à 5, est qu'il existe au moins un 5 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres du nombre de départ soient impairs.

Cette condition n'est pas suffisante car il existe un contre-exemple : 55, on a 5 . 5 = 25
2 . 5 = 10
1 . 0 = 0

Conclusion 4. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 3, est qu'il existe un et un seul 3 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1 et d'une seul fois le chiffre 3.

Cette condition est aussi nécessaire, et pour qu'elle soit prouvée, il faudrait prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 et d'un seul 3 implique au moins un facteur plus grand que 9.

Exemple : 1113 = 3 . 7 . 53, 53 étant un nombre premier plus grand que 9.
1311 = 3 . 19 . 23, 19 et 23 étant des nombres premiers plus grands que 9.

Conclusion 5. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 7, est qu'il existe un et un seul 7 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète.

Cette condition est également nécessaire. Sa démonstration implique de prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 et d'un seul 7 implique au moins un facteur plus grand que 9. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1 et d'une seul fois le chiffre 7.

Exemple : 171 = 3 . 57, 57 étant un nombre premier plus grand que 9
111711 = 3 . 23 . 1619, 23 et 1619 étant des nombres premiers plus grands que 9

Conclusion 6. Une condition suffisante pour que le produit final soit égal à 9, est qu'il existe un et un seul 9 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1 ou qu'il n'y ait que deux fois le chiffre 3 parmi les chiffres du nombre de départ et que tous les autres chiffres soient des 1. De plus, il n'y aura qu'une étape pour que la multiplication soit complète.

Cette condition est aussi nécessaire. Pour la démontrer, il faudrait prouver que la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres qui ne sont formés que du chiffre 1 et d'un seul 9, ou du chiffre 1 et de strictement deux fois le chiffre 3, implique au moins un facteur plus grand que 9. Autrement dit, en n'utilisant que des chiffres il est impossible d'obtenir un produit qui serait un nombre formé uniquement du chiffre 1 et d'une seul fois le chiffre 9 ou un nombre formé uniquement du chiffre 1 et de 2 fois le chiffre 3.

Exemple : 9111 = 3 . 3037 ; 3037 étant un nombre premier plus grand que 9
131131 = 7 . 11 . 13 . 131 ; 11, 13 et 131 étant des nombres premiers plus grands que 9

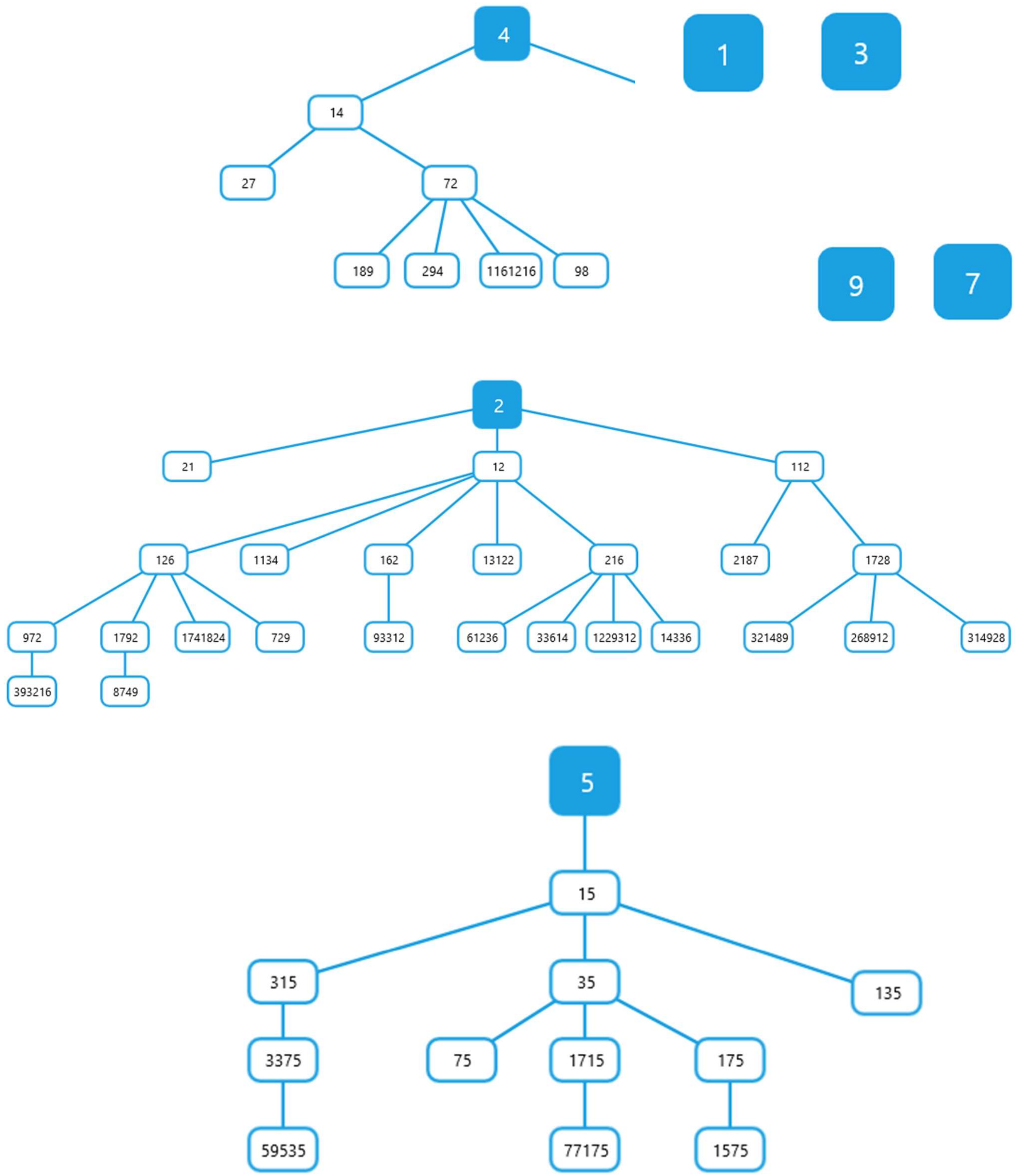
## 4. « Arbres » de la multiplication en chaîne

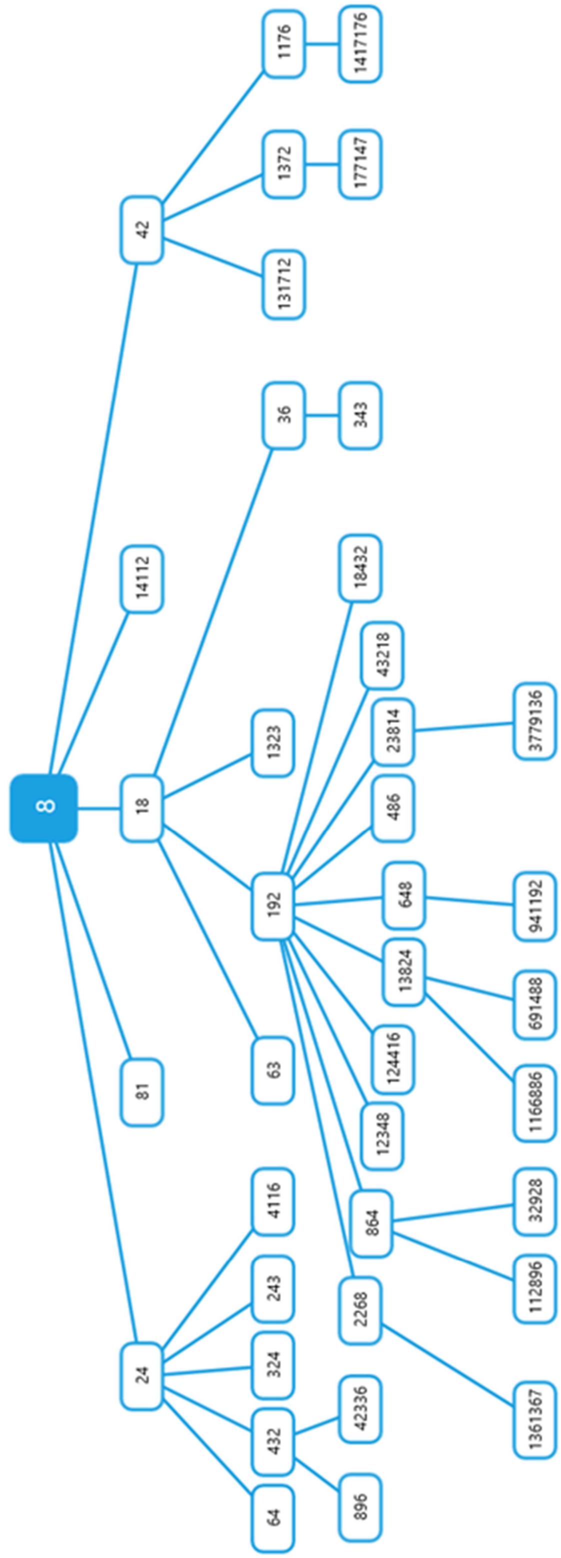
Comme dit précédemment, nous avons remarqué que plus nous augmentons le nombre de chiffres qui forment le nombre de départ, plus le nombre maximum d'étapes augmente. Mais nous avons remarqué que les nombres qui formaient ces étapes, appelé nombre à l'étape, variaient rarement. Nous avons donc décidé de les classer grâce à des « arbres ». Nous avons placé dans ces arbres uniquement les nombres à l'étape et non les nombres de départ. Ces arbres sont donnés à la page suivante.

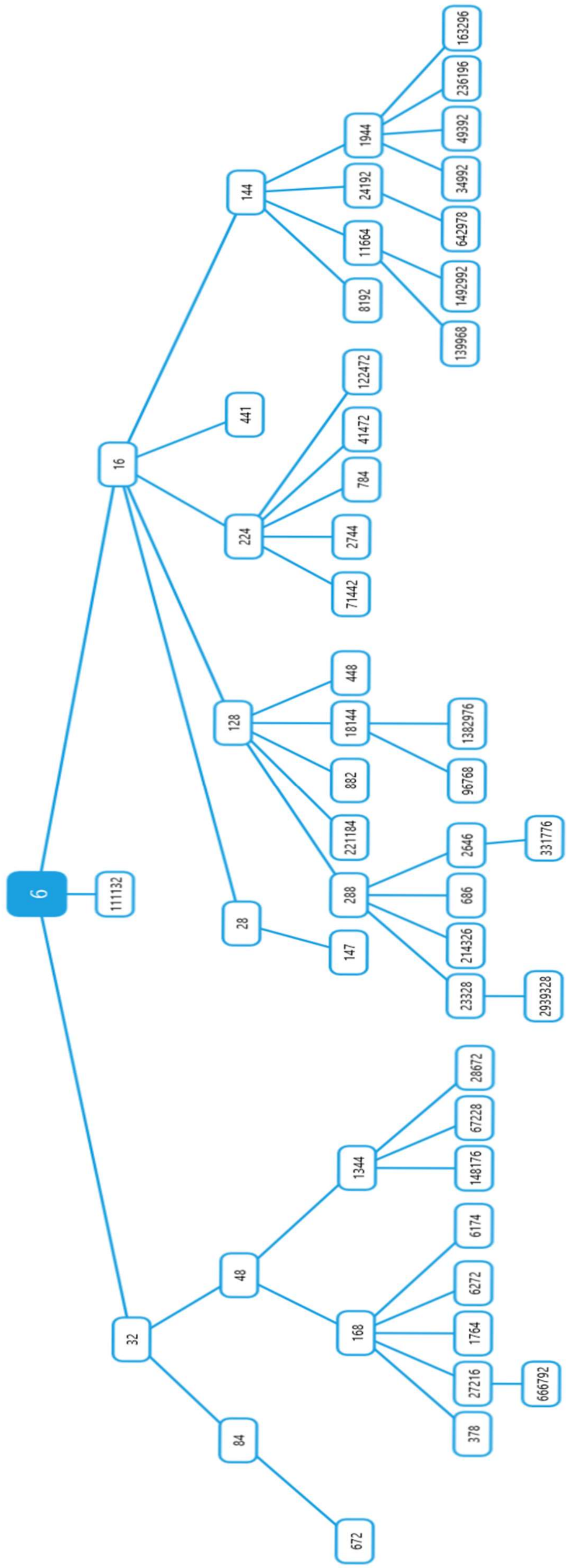
Par exemple, pour l'arbre de 5, nous sommes certains (pour les nombres allant jusqu'à $10^7$) que pour que la multiplication en chaîne fasse 5, l'étape précédente sera 15. Jusqu'à $10^7$, nous pouvons donc affirmer que 51 n'est jamais l'étape précédant 5, étant donné que nous avons effectué la multiplication en chaîne pour tous les nombres. Pour tous les « arbres », les branches sortant d’un nombre sont les seules à exister, d’après notre tableau Excel.

Nous pouvons donc grâce à ses arbres déterminer le nombre d’étapes nécessaires pour compléter la multiplication en chaîne. Il est égal au niveau dans l’un des arbres du nombre à l’étape auquel nous arrivons après la première multiplication.

Par exemple, si nous arrivons à 729 après la première multiplication, on observe qu’il est au 4ème niveau dans l’arbre de 2. Le nombre d’étapes du nombre de départ vaut donc 4.




8
42
14112
18
81
24
1176
1417176
1372
177147
131712
36
343
1323
192
63
18432
43218
23814
3779136
486
648
941192
13824
691488
1166886
124416
12348
864
32928
112896
2268
1361367
4116
243
324
432
42336
896
64


6
111132
32
16
84
48
28
128
224
441
144
672
168
1344
147
288
221184
882
18144
448
71442
2744
784
41472
122472
8192
11664
24192
1944
378
27216
1764
6272
6174
148176
67228
28672
23328
214326
686
2646
96768
1382976
139968
1492992
642978
34992
49392
236196
163296
666792
2939328
331776

## 4. Conjecture

Nous pensons que plus le nombre de chiffres qui forment le nombre de départ est grand, plus le nombre d’étapes maximum peut être grand. Donc, il serait possible d’avoir un nombre infiniment grand d’étapes pour un nombre infiniment grand.

**Remerciements :**
Nous remercions chaleureusement nos trois professeurs, Mesdames Lacroix et Schieres, et Monsieur Kirsch, qui nous ont aidés à avancer dans nos recherches et donnés un avis extérieur sur le travail réalisé à domicile, et ce, toutes les semaines. Nous remercions aussi les chercheurs de l’ULg, Mesdames Massuir et Tixhon, et Monsieur Leroy, pour leurs suggestions.