Les tours de Hanoï

Nom, prénom et niveau des élèves : Gilles Defresne, Léa Lo Manto, Laura Tialans, Claire Neuttiens 1ère et 3ème secondaire.

Etablissement : Centre Scolaire Saint-Benoit Saint-Servais à Liège, Belgique.

Enseignants : Mr. Heeren et Mr. Sourdeau.

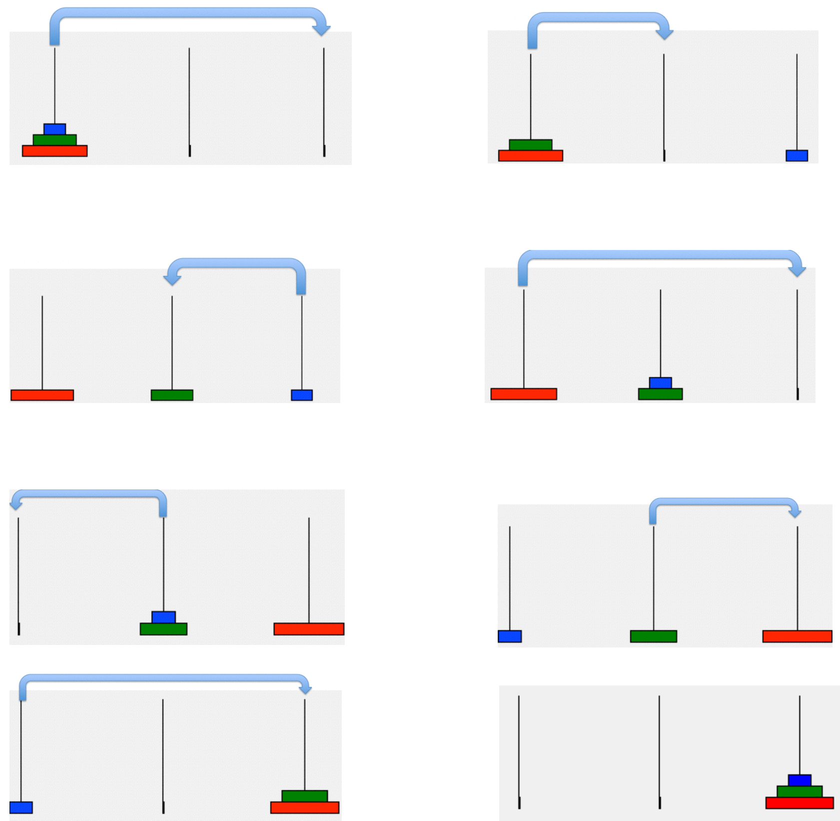
*
* *

Voici le célèbre jeu « Les tours de Hanoï » revisité par des apprentis mathématiciens :

Sur un plateau sont dressés trois piquets. Une pile de disques est empilée sur le premier, du plus grand au plus petit. Le but du jeu est d'amener la pile sur le dernier piquet en respectant les deux règles suivantes :

- déplacer un seul disque à la fois ;
- ne jamais poser un disque plus grand sur un plus petit.

Exemple avec trois disques



On remarque que nous sommes parvenus à déplacer les 3 disques en 7 coups.

Combien de coups pour gagner : observations.

Après plusieurs essais-erreurs, nous obtenons les résultats suivants :

Nombre de disques (n)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Nombre de coups	**1**	**3**	**7**	**15**	**31**	**63**	**127**

On constate que, pour n disques, le nombre de coups nécessaires semble être $\mathbf{2^n-1}$. Tentons de démontrer que cette formule est vraie quelque soit le nombre de disques.

Démonstration par récurrence.

Réfléchissons par récurrence.

-Commençons par envisager le cas de base : pour déplacer un disque, il ne nous faut qu'un seul coup. Ce nombre de coups est minimal (évident).

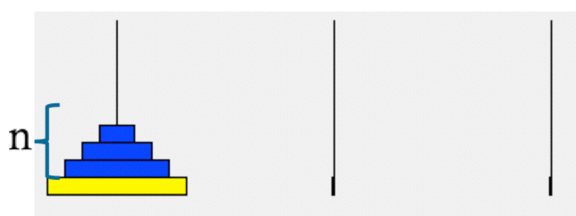
-Nous allons maintenant démontrer que, si la formule est vraie pour n disques, elle l'est aussi pour n+1 disques et que ce nombre de coups est minimal. Si pour déplacer **n** disques, il faut $2^{n}-1$ coups, alors nous démontrons que pour en déplacer **n+1**, il faut $2^{n+1}-1$ coups.

Hypothèses : 1) On peut déplacer une pile de n disques $2^{n}-1$ coups
2) Ce nombre de coups est minimal

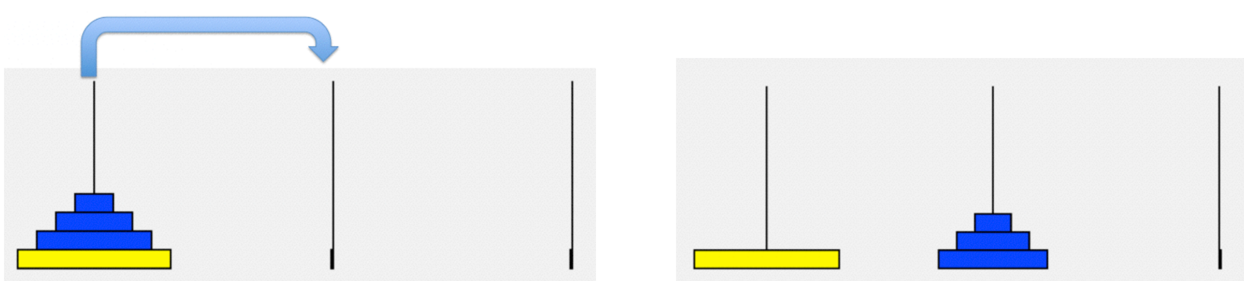
Thèse : On peut déplacer une pile de n+1 disques en $2^{n+1}-1$ coups et ce nombre reste minimal

Démonstration :

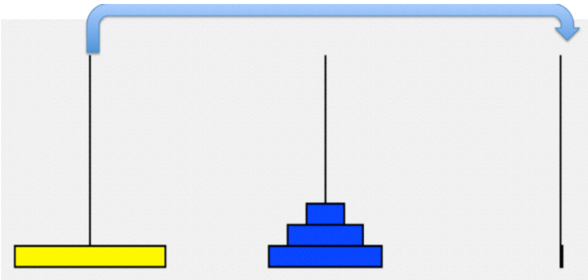
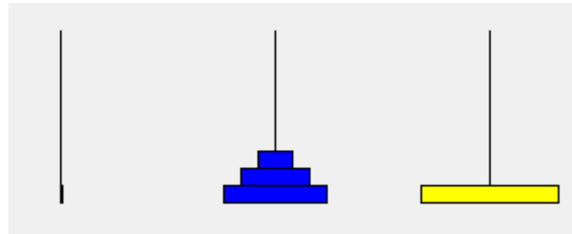
Considérons la tour formée de n disques bleus et 1 disque jaune en dessous.



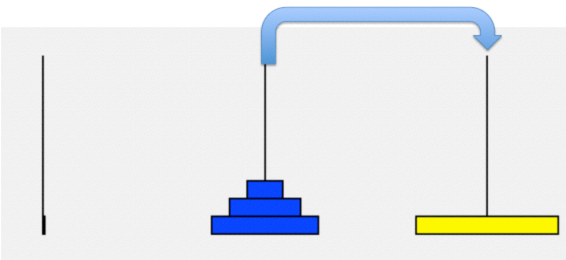
n+1 disques



Par l'hypothèse 1, il faut 2^n-1 coups pour déplacer la pile des n disques bleus,

Il faut 1 coup pour déplacer le disque jaune, soit un total de 2^n-1+1=2^n coups




Pour à nouveau déplacer la pile de n disques bleus, il nous faut 2^n-1 coups (par hypothèse 1), soit un total de $2^n+2^n-1=2^{n+1}-1$.

Puisque la formule s'applique pour 1 disque, alors elle s'applique pour 1+1, donc 2 disques, puis 2+1, donc 3 disques, etc.

On pourrait se demander pourquoi ce nombre de coups est minimal et si on ne pourrait pas trouver une solution plus rapide en utilisant une méthode différente . Toutefois, en y regardant de plus près, on constate qu'il est *impossible* de déplacer le disque jaune sans avoir au préalable déplacé la pile bleue.

De plus, parmi les trois piquets, un doit être laissé libre pour pouvoir soulever le jaune et un autre doit être laissé libre pour le poser. On doit donc déplacer la pile sur le piquet restant, *en un seul morceau*. Par hypothèse 2), ceci prend *au minimum* 2^{n+1}-1 coups. Comme il est évident que 1 disque prend au minimum 1 coup, la récurrence ci-dessus s'applique pour déterminer le nombre minimal de coups.

A noter que cette démonstration n'est à priori valable que pour 3 piquets puisque, pour un nombre supérieur, on peut répartir la pile bleue sur plusieurs piquets différents, et on peut alors trouver une méthode plus rapide.

Conclusion

Avec un jeu comportant 3 piquets, il est toujours possible de déplacer une pile de n disques en 2^n-1 coups.

Par récurrence, nous avons démontré que cette formule s'applique quel que soit le nombre de disques, et que ce nombre de coups est bien minimal.

On peut se demander ce qu'il adviendrait de cette formule avec un plateau comportant 4 piquets… ou n piquets !

On pourrait aussi trouver des stratégies pour être certains de gagner.

Nous avons pensé, par exemple, que lorsqu'on joue avec un nombre pair de disques, il faut placer le tout premier disque sur le deuxième piquet. Ou encore que lorsqu'on joue avec un nombre impair de disques, il faut placer le tout premier disque sur le troisième piquet.