Un ascenseur contrariant
Année 2016 - 2017

Noms et Prénoms des élèves, niveaux :
PICARD Arthur 6G
ORBAN Adrien 6G

Établissement :
Sainte-Véronique Liège

Enseignant(e)s :
LACROIX Anne
SCHIERES Sandrine
KIRSCH Sébastien

Chercheurs ou Chercheuses :
LEROY Julien, Uliège
MASSUIR Adeline, Uliège
TIXHON Stéphanie, Uliège

1. Présentation du sujet

1.1 Problème

Un hôtel possède un nombre infini d'étages, mais un seul ascenseur. Capricieux, on ne peut monter ou descendre les étages que par 5 ou 7.

1)Peut-on atteindre tous les étages ?

2)Que se passe-t-il si on remplace les nombres 5 et 7 par d'autres nombres ? Quelles sont les conditions à appliquer à ces nombres pour que l'ascenseur puisse atteindre tous les étages ?

3)Que se passe-t-il si le nombre d'étages est fini ? Quelles sont les conditions à appliquer à ce nombre d'étages pour que l'ascenseur puisse toujours aller partout ?

1.2 Conventions

- L'ascenseur se trouve initialement au rez-de-chaussée.
- Le nombre d'étages est infini, nous prenons comme convention que les étages se situent uniquement au-dessus du rez-de-chaussée donc l'ascenseur peut monter jusqu'à l'infini (car le raisonnement est analogue en l'infini positivement et négativement).
- L'étage « n étage(s) au-dessus du rez-de-chaussée » (c'est-à-dire l'**étage n** dans la vie courante) est attribué au **nombre naturel** non nul **n**.
- Quand l'ascenseur **monte/descend** de n étage(s), mathématiquement, on écrit **: + n / - n**.

2. Annonce des résultats obtenus

2.1 QUESTION 1 : Peut-on atteindre tous les étages ?

Pour démontrer intuitivement que l'ascenseur peut atteindre tous les nombres naturels, le plus simple est de diviser la question en 2 parties.

A. Tous les nombres pairs
B. Tous les nombres impairs

A. Nombres pairs

L'ascenseur démarrant en 0, il peut monter de 7 et puis de descendre de 5 successivement :
Ce qui signifie qu'il peut aller au deuxième étage car

$$0 + 7 – 5 = 2$$

Et qu'il peut aller quatrième étage car

$$0 + 7 – 5 + 7 – 5 = 7 \times 2 – 5 \times 2 = (7 – 5) \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

Et qu'il peut aller au sixième étage car

$$0 + 7 – 5 + 7 – 5 + 7 – 5 = 7 \times 3 – 5 \times 3 = (7 – 5) \times 3 = 2 \times 3 = 6$$

Et qu'il peut aller au huitième étage car

$$0 + 7 – 5 + 7 – 5 + 7 – 5 + 7 – 5 = 7 \times 4 – 5 \times 4 = (7 – 5) \times 4 = 2 \times 4 = 8$$

Et ainsi de suite...

Cet ensemble de calculs se résume en l'équation :

$$F(n) = \quad 0 \quad + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \dots \qquad – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 \dots$$

$$7m \qquad\qquad – 5n$$

Les entiers m et n étant arbitraire, puisqu'on peut décider de monter/descendre de 5 ou 7 autant de fois que l'on veut, nous prenons **m = n** comme convention.

$F(n) = 7n – 5n = (7 – 5) \times n = 2n$ => **ce qui donne la généralisation des nombres pairs**.

n étant le nombre de fois que l'on ajoute 7 puis retire 5
F(n) étant le nombre d'étage qui désigne l'étage atteint

B. Nombres impairs

Voyons si l'ascenseur peut aller en 1

0 + 5 + 5 + 5 – 7 – 7 = 1 => **Oui il peut aller au premier étage.**

L'ascenseur étant en 1, il peut monter de 7 et puis de descendre de 5 successivement :

Ce qui signifie qu'il peut aller au troisième étage car

$$1 + 7 - 5 = 3$$

Et qu'il peut aller au cinquième étage car

$$1 + 7 - 5 + 7 - 5 = 1 + 7 \times 2 - 5 \times 2 = 1 + (7 - 5) \times 2 = 1 + 2 \times 2 = 1 + 4 = 5$$

Et qu'il peut aller au septième étage car

$$1 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 = 1 + 7 \times 3 - 5 \times 3 = 1 + (7 - 5) \times 3 = 1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$

Et qu'il peut aller au neuvième étage car

$$1 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 = 1 + 7 \times 4 - 5 \times 4 = 1 + (7 - 5) \times 4 = 1 + 2 \times 4 = 1 + 8 = 9$$

Et ainsi de suite...

Cet ensemble de calculs se résume en l'équation :

$$F(n) = 1 \quad + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \ldots \quad - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 \ldots$$

$$1 \quad + \quad 7m \quad\quad - 5n$$

Les entiers m et n étant arbitraire, puisqu'on peut décider de monter/descendre de 5 ou 7 autant de fois que l'on veut, nous prenons **m = n** comme convention.

$F(n) = 1 + 7n - 5n = 1 + (7 - 5) \times n = 1 + 2n$ => **Ce qui donne la généralisation des nombres impairs.**

n étant le nombre de fois que l'on ajoute 7 puis retire 5
F(n) étant le nombre qui désigne l'étage atteint

Par conséquent, puisque l'ascenseur peut atteindre tous les étages pairs et impairs de l'immeuble, il peut donc aller partout dans l'immeuble.

2.2 QUESTION 2 : Que se passe-t-il si on remplace les nombres 5 et 7 ?

Le tableau qui suit expose nos résultats obtenus d’après nos observations en fonction de différents couples de nombres. Nous pouvons voir que la question de diviseur commun est abondamment présente.

Nombres de départ	2	3	n
Couplé avec un nombre tels qu’ils aient au moins un diviseur commun.	L’ascenseur peut uniquement aller aux étages multiples de 2.	L’ascenseur peut uniquement aller aux étages multiples de 3.	L’ascenseur peut uniquement aller aux étages multiples du diviseur commun.
Couplé avec un nombre tel qu’ils n’aient pas de diviseur commun (= Couplé tel que les **2 nombres soient premiers entre eux**.)	L’ascenseur peut toujours aller partout.	L’ascenseur peut toujours aller partout.	L’ascenseur peut toujours aller partout.

3.1QUESTION 1

Après avoir divisé le problème en deux parties (les étages pairs et les étages impairs), nous avons facilement remarqué que les nombres 5 et 7, grâce à de simples additions ou soustractions successives, permettent d’atteindre la généralisation des nombres pairs et des nombres impairs. Il a fallu de montrer que l’ascenseur pouvait atteindre le 1er étage pour pouvoir appliquer le cas des nombres pairs sur celui des nombres impairs et avoir donc prouvé qu’il pouvait aller à tous les nombres.

A. Nombres pairs => 2n
B. Nombres impairs => 1 + 2n

Nous avons donc démontré intuitivement que l’ascenseur peut atteindre n’importe quel étage de l’immeuble.

3.2. QUESTION 2

Les résultats observés lors des recherches nous amènent à une conclusion évidente : la condition nécessaire et suffisante pour que le couple de nombres permet d'atteindre tous les étages de l'ascenseur est que les deux nombres de ce couple soient premiers entre eux. En d'autres termes, nos observations heuristiques nous ont montré que si les nombres avaient un diviseur commun (et donc qu'ils n'étaient pas premiers entre eux), l'ascenseur ne pouvait atteindre que les nombres multiples de ce diviseur commun.

Exemple : Pour les nombres 9 et 6, l'ascenseur ne peut atteindre que les nombres multiples de 3.

Démontrons maintenant que cette hypothèse est bien la condition nécessaire et suffisante pour que l'ascenseur puisse aller partout.

DEMONSTRATION :

Utilisons le théorème de Bézout :

Si m et n $\in \mathbb{Z}$

Si x et y appartiennent $\mathbb{N}$

On peut admettre : il existe un m et un n tels que $mx + ny = PGCD\ (x\ ;\ y)$

Mais nous allons tout de même montrer d'où vient cette formule.

Si x, y et z $\in \mathbb{Z}$

Si $x > y$

Par division euclidienne :

$x = q_1 * y + r_1$ avec $r_1 < y$

En remplaçant les rôles :

$y = q_2 * r_1 + r_2$ avec $r_2 < r_1$

Puis :

$r_1 = q_3 * r_2 + r_3$ avec $r_3 < r_2$

Et ainsi de suite …

$r_{n-2} = q_n * r_{n-1} + r_n$ avec $r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_{n+1} * r_n + r_{n+1}$ avec $r_{n+1} < r_n$

$r_n = q_{n+2} * r_{n+1} + 0$

Lorsque l'on arrive à un reste nul, le PGCD de ces deux nombres est le reste de la ligne précédente.

Dans ce cas-ci :

$r_{n+1} = PGCD\ (x\ ;\ y)$

Pour retrouver sur la formule : $mx + ny = PGCD\ (x\ ;\ y)$

Il faut remonter la chaîne comme ceci

$r_{n-1} = q_{n+1}$

⟺ r_n+ PGCD (x ; y)
⟺ PGCD (x ; y) = $r_{n-1} - q_{n+1} * r_n = r_{n-1} - q_{n+1} (r_{n-2} - q_n * r_{n-1})$

Remontons comme cela jusqu'à retomber sur x et y
PGCD (x ; y) = mx + ny
Avec m et n qui ont une valeur composée d'additions et de multiplications, de quotient et de reste.
Maintenant que le théorème de Bézout est expliqué nous devons juste l'appliquer à deux cas comme énoncé plus haut.

Si les nombres sont premiers entre eux :
Par exemple, utilisons la formule pour les nombres 7 et 5,
7 = 5 * 1 + 2
5 = 2 * 2 + 1
2 = 2 * 1 + 0
Donc le PGCD (7 ; 5) = 1
PGCD (7 ; 5) = 5 – (2 * 2)
= 5 – 2 * (7 – 5) = 3 * 5 – 2 * 7
Donc voilà comment on pourrait rejoindre le premier étage.

Si on voulait atteindre le 2^e étage, il suffit de multiplier par deux de part et d'autre.

Et donc, par extension, si on veut atteindre le nombre d'étage z, il suffit de multiplier par z de part et d'autre.

Donc, lorsque le PGCD est égal à 1, cela montre que l'on peut atteindre tous les étages assez facilement.
En conclusion, il faut que les nombres soient premiers entre eux pour que l'ascenseur puisse s'arrêter à tous les étages.
Si les nombres ne sont pas premiers entre eux.
Prenons 18 et 12, par exemple, pour illustrer ce qu'il se passe lorsque les nombres ne sont pas premiers entre eux c'est-à-dire qu'ils ont un commun multiple.
18 = 1 * 12 + 6
12 = 2 * 6 + 0
PGCD (12 ; 18) = 6 = 18 – 12

Dans ce cas-ci, si l'ascenseur démarre du rez-de-chaussée, l'ascenseur ne se déplacera d'uniquement de 6 étages par 6 étages.

Vu que si on a deux nombres x,y tel que y=nx, ax +by = ax + bnx = x(a + bn) donc ce nombre est égal à un nombre qui est multiple de x.
L'ascenseur ne pourrait se déplacer qu'arriver sur les étages multiples de x.

Donc, si les nombres ne sont pas premiers entre eux, il est impossible d'atteindre l'étage 1 qui tout au long de la recherche a été un but à atteindre.

2.3 Question 3 : que se passe-t-il lorsque le nombre d'étage est fini ?

Pour énoncer la formule, nous allons partir d'un cas particulier pour arriver ensuite à une formule générale. Dans ce cas-ci, vu que les nombres utilisés précédemment, nous allons utiliser 5 et 7. Le but de cette représentation est de monter le moins haut possible tout en atteignant tous les étages. Pour rendre les calculs plus digestes, nous réutiliserons les résultats précédents.

1. Dès la première étape, on va directement placer les nombres évidents. Ces nombres sont évidemment 5 et 7.
2. La deuxième étape consiste en 7 – 5 = 2
3. La troisième étape est 2 + 7 = 9 vu que si on limite le nombre d'étage à 7 ou à 8, on ne peut faire d'autre mouvement sans dépasser le nombre d'étage fini. Donc on va élever notre nombre d'étage fini à 9.
4. La quatrième étape est 9 – 5 = 4, on arrive au quatrième étage.

   A ce stade, nous nous retrouvons bloqués, donc nous allons devoir augmenter le nombre d'étages à 10. Vu que lorsqu'on a les nombres 2, 5, 7 et 9, on ne peut pas atteindre d'autres étages tout en se limitant à un intervalle de 9 étages.

5. Repartons de zéro mais considérons que les étages précédemment atteints le sont toujours. Donc, 5 * 2 = 10.
6. A cette étape, on atteint l'étage 3 en faisant 10 - 7 = 3.
7. Avant-dernière étape, on atteint le premier étage en faisant 8 - 7 = 1.
8. La dernière étape permet d'atteindre le sixième étage en faisant 1 + 5 = 6.

En conclusion, si les nombres que nous utilisons sont 7 et 5, le plus petit nombre que nous obtenons pour un nombre d'étages fini est 10. Si nous prenons un nombre plus grand que dix, l'ascenseur pourra tout de même s'arrêter partout. Par exemple, si on veut atteindre l'étage 11 et que l'on part du principe que l'on sait s'arrêter aux dix premiers étages, il suffit de faire 4 + 7 = 11 ou bien encore 6 + 5 = 11.

Maintenant que l’on a expliqué comment on arrivait au résultat de 10 pour 5 et 7, montrons les résultats que nous avons obtenus sous forme de tableau.

Nombres	Nombre d’étages limite	Nombres	Nombre d’étages limite	Nombres	Nombre d’étages limite
5 et 7	10	3 et 11	12	4 et 17	19
9 et 7	12	4 et 11	13	6 et 17	21
10 et 7	15	5 et 11	14	8 et 17	23
11 et 7	16	6 et 11	15	9 et 17	24
12 et 7	17	8 et 11	17	10 et 17	25
13 et 7	18	9 et 11	18	12 et 17	27
14 et 7	19	13 et 11	22	14 et 17	29

D’après ce tableau non-exhaustif des résultats que nous avons obtenus, nous sommes arrivés à la formule suivante : le nombre d’étage limite = $x + y - 2$

3. Conclusion et/ou conjecture et/ou questions ouvertes

Pour la première question, nous avons montré qu’avec les nombres 5 et 7, notre ascenseur pouvait s’arrêter partout. En ce qui concerne la seconde question, si les nombres sont premiers entre eux, on peut s’arrêter à tous les étages. S’ils ne le sont pas, ils s’arrêteront uniquement sur des multiples de leur plus grand commun diviseur.
Cependant, pour la troisième question, nous sommes arrivés à une conjecture. La formule est la suivante : $x + y – 2$ = le nombre d’étages fini.

Remerciement :

Nous tenons à remercier nos professeurs, Madame Lacroix, Madame Schieres et Monsieur Kirsch pour leurs conseils lors de nos réunions hebdomadaires.
Nous remercions aussi les chercheurs, LEROY Julien, MASSUIR Adeline, TIXHON Stéphanie pour leur aide pour faire avancer le projet.