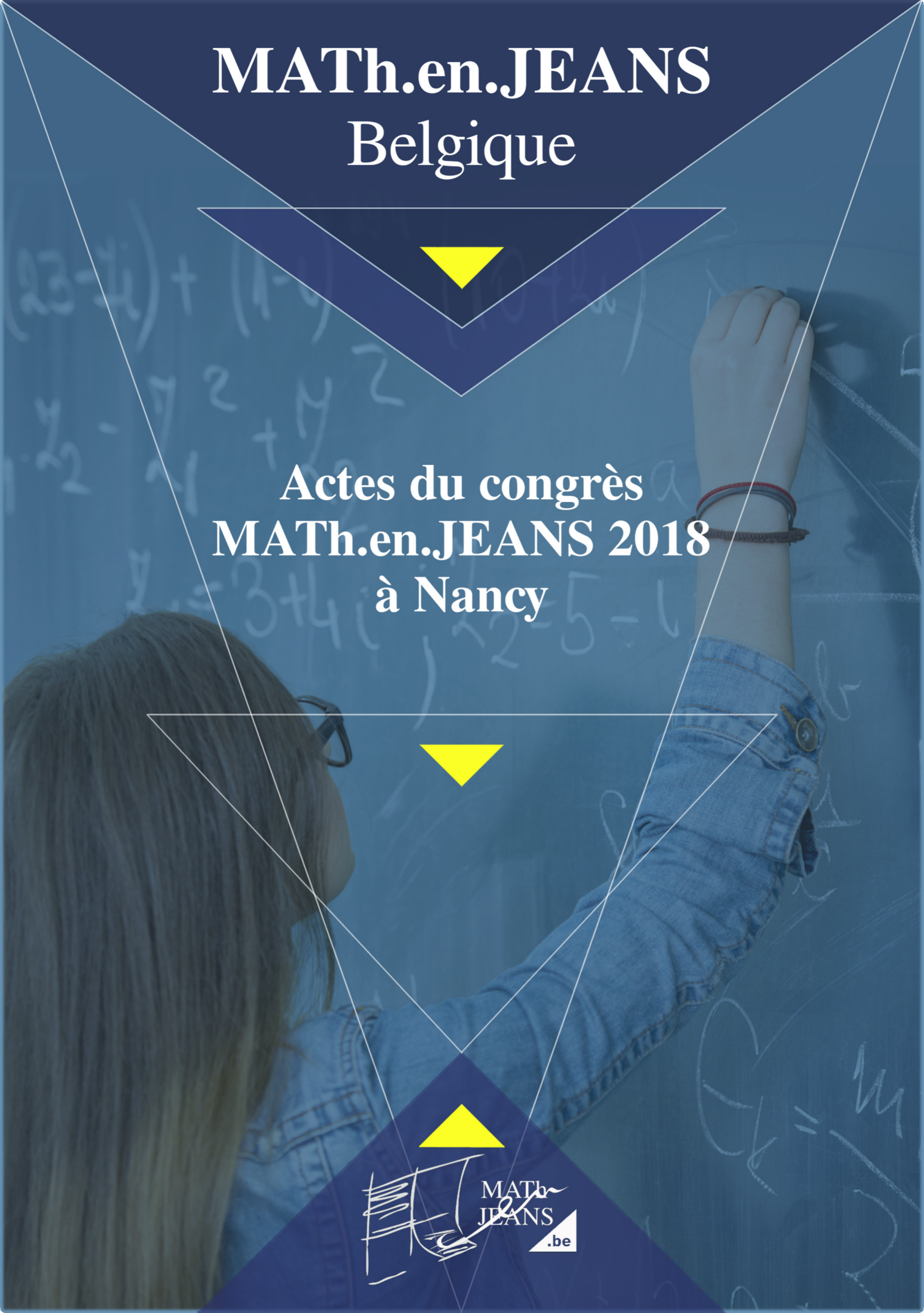
MATh.en.JEANS
Belgique



Actes du congrès MATh.en.JEANS 2018 à Nancy

MATh.en.JEANS .be

Actes du Congrès MATh.en.JEANS 2018 à Nancy

Comité éditorial

Liste des contributeurs

Otilia Casuneanu
Christophe Chenut
Larisa Cioata
Julie Closter
Augustin Crespin
Rodrigue David
Frederic de Cartier
Léopold de Condé
Nicolas de Halleux
Martin de Mahieu
Tatiana De Sousa
Mikala Eisen
Catherine Feller
Tania Ferreira
Louis Gauthy
Stefan Gherghel
Renaud Gourmand
Alexandre Halembert
Phoebe Heirens
Eloïse Hody
Adrien Kellens
Laura Lambert
Thelma Lambert
Victoria Lopez
Célestin le Hardij
Santiago Le Jeune
Zoé Leroy
Hélène Lutte
Mara Manieri
Simon Martin
Jeremy Massamba
Victor Orban
Adrien Petit
Charel Plier
Lisa Rugigana
Matteo Ruth
Laura Schmitz
Nicolas Schreiber
Naomi Solheid
Philippe Tevoedjre
Lena Théato
Louise Traversin
Tudor Ungureanu
Vincent van Dijcke
Rodolphe van Oldeneel
Valentin Van Raes
Gudule Wyckmans

ISBN 978-2-9601143-9-3
EAN 9782960114393

Donnez leur du temps, ils en feront de l'or.

Amis lecteurs, amies lectrices,

Malgré leur omniprésence dans le cursus des élèves de Wallonie et de Bruxelles, force est de constater que les mathématiques pâtissent d'une image bien souvent négative auprès du grand public. Si on demande à un quidam à quoi lui servent les mathématiques qu'il a apprises, il sera généralement en grande difficulté pour donner une réponse éclairée par autre chose que son propre ressenti subjectif. On rentre alors dans le domaine de la posture, où la réponse sera bien souvent une variation autour du thème éculé et mal informé de « ça ne sert à rien ».

On pourrait imaginer qu'il appartient à l'école d'enseigner cette utilité et ainsi déconstruire l'image peu amène d'une des disciplines cruciales du monde moderne. La réponse est malheureusement bien plus complexe qu'il n'y parait : les mathématiques véritablement « utiles » sont également généralement des mathématiques sophistiquées dont la compréhension à un niveau autre que purement superficiel nécessite un investissement personnel, sincère et chronophage ! Afin de pouvoir travailler au corps la mauvaise image des mathématiques, la clé est d'une nature très précieuse, fugace et rare : il faut du temps. Il faut du temps pour présenter des problèmes non standards, pour les apprivoiser, en comprendre les enjeux et les subtilités ; il faut du temps pour se tromper et comprendre ses erreurs ; il faut du temps pour comprendre pourquoi certaines méthodes, notations, définitions sont véritablement indispensables pour attaquer certains problèmes de façon efficace ; il faut du temps pour découvrir l'intérêt de nouvelles méthodes permettant d'aller plus loin et même, pour appréhender ce que « plus loin » signifie. Ce temps est un luxe dont nos élèves ne disposent, bien souvent, pas.

L'initiative MeJ.be [1] cherche précisément à véhiculer une image différente des mathématiques, non pas en se substituant au travail fondamental et indispensable d'enseignants dévoués, mais en offrant une plateforme et des moments de rencontre complémentaires durant lesquels les élèves auront non seulement l'occasion de mettre en pratique les différents outils

1. MeJ est un « méta acronyme » : il s'agit de l'acronyme de MATh.en.JEANS qui lui même un acronyme dont nous laissons au lecteur le soin de découvrir le sens ; MeJ.be est la marque de la branche belge de MeJ.

acquis au cours de leur scolarité, mais également d'en découvrir par eux-mêmes de nouveaux, en fonction des nécessités des problèmes sur lesquels ils auront été amenés à travailler. MeJ.be donne l'opportunité à tout élève du secondaire qui le souhaite de participer durant une année complète à un atelier de recherche en mathématiques en dehors des heures scolaires. Notre offre est globale : outre des heures de travail individuel ou en groupe encadré par des enseignants et des chercheurs, nous proposons également des formations en informatique de base (permettant une manipulation efficace et ludique d'objets parfois trop complexes pour être décrits facilement « à la main »), ainsi que diverses opportunités d'échange avec d'autres élèves et avec des mathématiciens professionnels au cours de rencontres ou conférences organisées durant l'année.

Finalement, MeJ.be offre aux participants l'occasion de coucher sur papier le fruit de leur réflexion mathématique. Ce livre est le produit de ce travail. Il recueille 12 articles écrits par 47 élèves ayant participé à MeJ.be en 2017-2018. Le lecteur sera, à n'en pas douter, impressionné par le niveau avancé des notions mathématiques avancées et sophistiquées qui auront été manipulées par ces élèves parfois extrêmement jeunes. Nous tenons à rassurer le lecteur : il ne s'agit nullement de découvertes de « purs esprits » disposant de la science infuse. Il s'agit de résultats obtenus par des jeunes d'aujourd'hui, à qui nous avons donné un peu de notre temps, et qui en ont fait de l'or.

Un grand et chaleureux merci à tous les jeunes auteurs, à leurs enseignants et aux chercheurs qui ont participé à l'encadrement, ainsi qu'aux relecteurs qui, tous, ont offert de leur temps à la réussite de cette nouvelle année de MeJ en Belgique.

À l'année prochaine,
Le Comité d'édition.

Table des matières

Archimède et Hérion sur la plage

Laura LAMBERT, Zoé LEROY et
Renaud GOURMAND

Élèves de 6e secondaire à
l'Athénée royal Charles Rogier Liège 1

Avec l'aide de leurs enseignants
Yvan Haine, Eveline Moitroux et Manon Sutera

et du chercheur Laurent De Rudder (ULiège)

Résumé : Dans cet article, les auteurs étudient différentes constructions à la règle (non graduée) et au compas. Ils s'intéressent notamment aux nombres constructibles et expliquent comment construire les nombres rationnels. Mais ce n'est pas tout ! Certains irrationnels, comme par example la racine carrée de 2, sont également constructibles et il en va en fait de même pour toutes les racines carrées de naturels. Par contre, il n'est pas vrai que tous les irrationnels sont constructibles puisque par exemple la racine cubique de 2 ne l'est pas. Les auteurs poursuivent leur étude en démontrant que la somme, la différence, le produit et l'inverse de nombres constructibles est encore constructible. Ils évoquent ensuite trois problèmes cultes des mathématiques : la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection d'un angle. La deuxième partie de l'article est consacrée à la construction de polygones réguliers. En particulier, la construction d'un pentagone régulier est impressionnante ! On apprend aussi qu'il n'est pas possible de construire un heptagone régulier. Ils terminent leur étude en montrant que la possibilité de construire un n-gone régulier est équivalente à celle de construire le nombre $\cos(2\pi/n)$.

1 Présentation du problème

Alors qu'ils discutaient sur l'île d'Ortygie, le Tyran Hérion proposa un problème au savant Archimède. Il traça deux points dans le sable et lui dit que la distance entre ces deux points était de valeur 1 et qu'en traçant uniquement des cercles et des droites, il avait réussi à construire tous les nombres rationnels. Il mit alors Archimède au défi de construire plus de nombres que lui. Le Tyran dit-il la vérité : peut-on effectivement construire tous les rationnels ? Quant à Archimède, a-t-il une chance de relever le défi ?

De tous temps, les mathématiques ont été un sujet de questionnement des hommes, au même titre que la philosophie. Nous allons vous parler de géométrie, et plus particulièrement de nombres constructibles avec pour seuls outils une règle non graduée et un compas. Nous nous posâmes d'abord la question de pourquoi ces deux instruments. Pourquoi se limiter, pourquoi est-ce l'usage ?

C'est facile, la géométrie comme on la connaît en premier lieu nous vient des axiomes d'Euclide. Ce dernier aurait vécu aux alentours de 300 avant Jésus-Christ, on peut le déduire d'une seule source, ce qui reste soumis au doute. La grande avancée grecque vis-à-vis des mathématiques antérieures est l'abstraction. En devenant presque une branche de la philosophie, on peut dès lors se concentrer et atteindre de nouveaux niveaux de réflexion. Avant lui, citons l'école pythagoricienne, Zénon d'Élée, et Thalès. On retient principalement Euclide pour avoir formalisé les mathématiques, « défini »les objets géométriques comme les droites et les cercles grâce à une série d'axiomes. Parmi ces axiomes, il postule que deux points peuvent toujours être reliés par une droite et que l'on peut toujours tracer un cercle de centre donné passant par un point donné. Cela justifie la règle non graduée et le compas, une autre géométrie utiliserait d'autres outils.

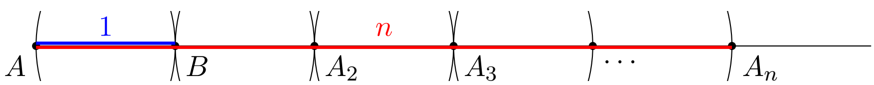
Précisons que nous n'avons pas cherché à optimiser les constructions, c'est-à-dire à faire en sorte qu'il y ait le moins de constructions possible.

2 Construction de quelques nombres

2.1 Construction du naturel n

Soit un segment $[AB]$ de longueur 1.

On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon 1 qui rencontre AB en A et A_2, donc $|AA_2| = 2$. En appliquant la procédure $n-1$ fois, on peut tracer un segment $[AA_n]$ de longueur n.



Ainsi tout nombre naturel est constructible à la règle et au compas.

2.2 Construction de rationnels positifs

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers.

Par exemple, pour construire un segment de longueur $\frac{1}{2}$, il nous faut construire le milieu d'un segment à la règle et au compas.

Dans un premier temps, nous expliquons comment effectuer quelques constructions de base avant de rentrer dans le vif du sujet.

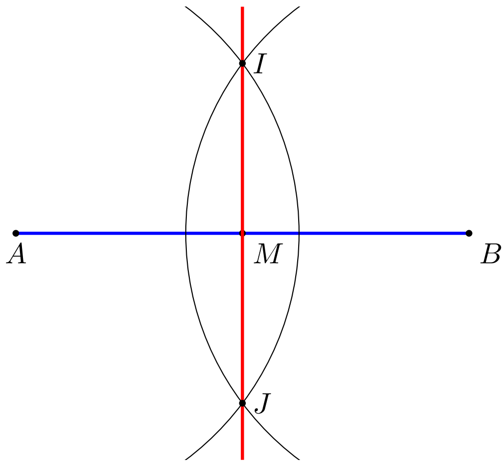
3 Constructions géométriques

3.1 Médiatrice et milieu d'un segment $[AB]$

Étant donné un segment $[AB]$,

1. tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon $r > \frac{1}{2}|AB|$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon r. Les 2 points d'intersection des cercles sont notés I et J.
2. tracer la droite IJ.

Par conséquent, IJ est la médiatrice du segment $[AB]$ puisque I et J sont à égale distance de A et B et le point d'intersection de la droite IJ avec le segment $[AB]$ est le point M, milieu de $[AB]$.



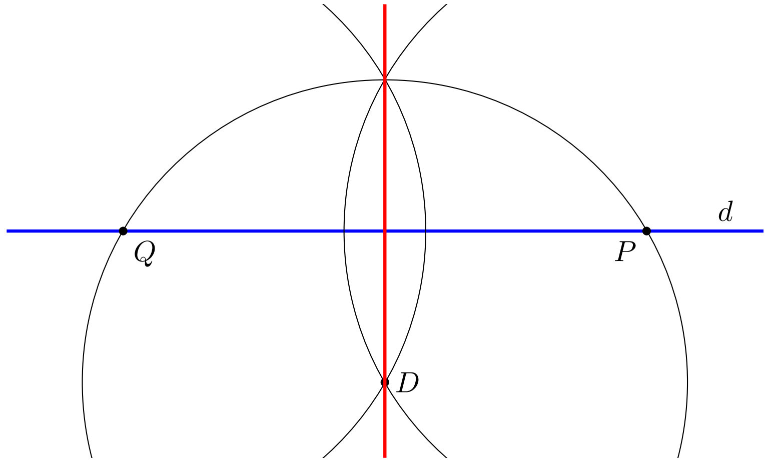
3.2 Droites perpendiculaires

Étant donnés une droite d et un point D, on souhaite tracer la droite qui est perpendiculaire à la droite d et qui passe par le point D.

1. On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre D et de rayon s (supérieur à la distance entre la droite d et le point D) qui coupe la droite d en P et Q. Vu que P et Q sont à égale distance de D, D appartient à la médiatrice de $[PQ]$.

2. On trace la médiatrice m de $[PQ]$.

Par conséquent, cette droite m passe par D et est perpendiculaire à d.



3.3 Droites parallèles

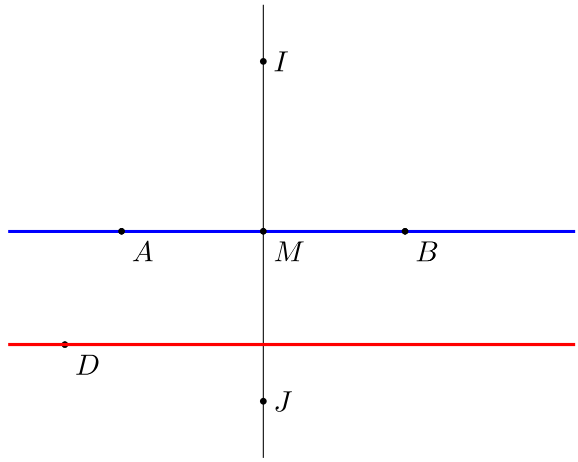
Étant donnés une droite AB et un point D, on veut tracer la parallèle à la droite AB qui passe par D.

Première méthode

Cette méthode exploite 2 constructions de perpendiculaire ou de médiatrice.

1. On trace la droite IJ, médiatrice du segment $[AB]$.
2. On trace la droite qui est perpendiculaire à IJ et qui passe par D comme expliqué précédemment.

Par conséquent, d est parallèle à AB car si 2 droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.



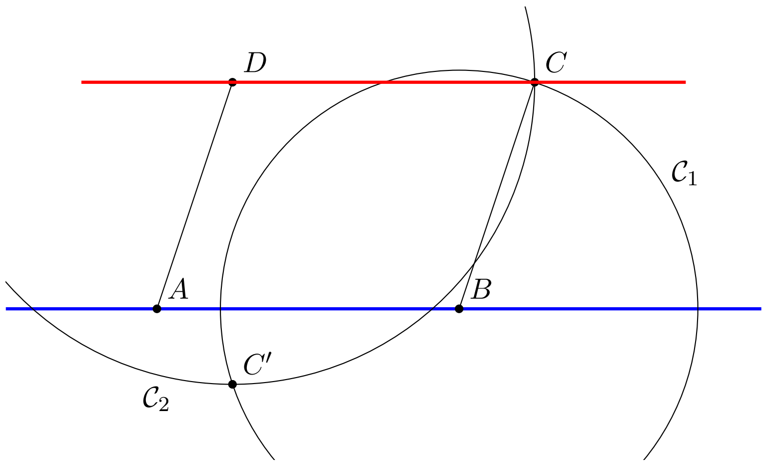
Deuxième méthode

Cette propriété exploite les propriétés du parallélogramme.

1. On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon $|AD|$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre D et de rayon $|AB|$.

2. On nomme C le point d'intersection des 2 cercles tel que $ABCD$ est un quadrilatère convexe.

Par conséquent, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car il est convexe et ses côtés opposés ont la même longueur ($|AD| = |CB|$ et $|DC| = |AB|$). D'où AB est parallèle à CD.



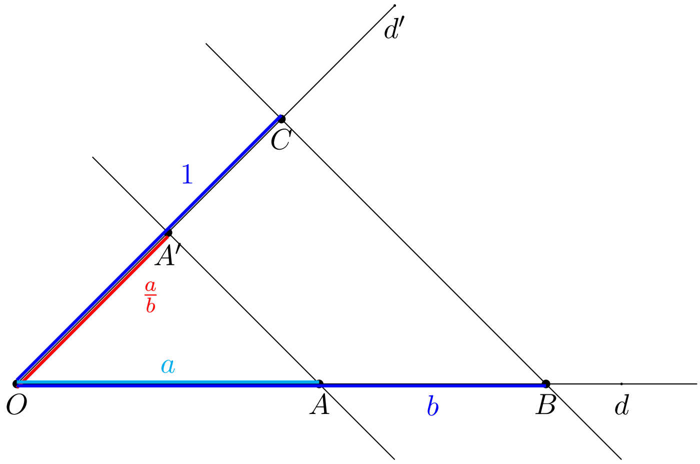
4 Construction de nombres

4.1 Rationnels positifs

Construisons la fraction $\frac{a}{b}$ avec a et $b \in \mathbb{N}_0$ en appliquant le théorème de Thalès :

1. tracer deux demi-droites d'origine O
2. tracer un segment $[OB]$ de longueur b et un segment $[OA]$ de longueur a sur une des demi-droites
3. construire le segment $[OC]$ de longueur 1 sur l'autre demi-droite
4. construire A' sur OC tel que AA' est parallèle à CB comme nous l'avons montré précédemment.

Démontrons que $|OA'| = \dfrac{a}{b}$.



En appliquant le théorème de Thalès au triangle OBC et aux parallèles AA' et CB, on obtient

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OC|}, \text{ d'où } \frac{a}{b} = \frac{|OA'|}{1}.$$

4.2 Irrationnels

La première rencontre avec les nombres irrationnels a eu lieu lors de la résolution du problème suivant.

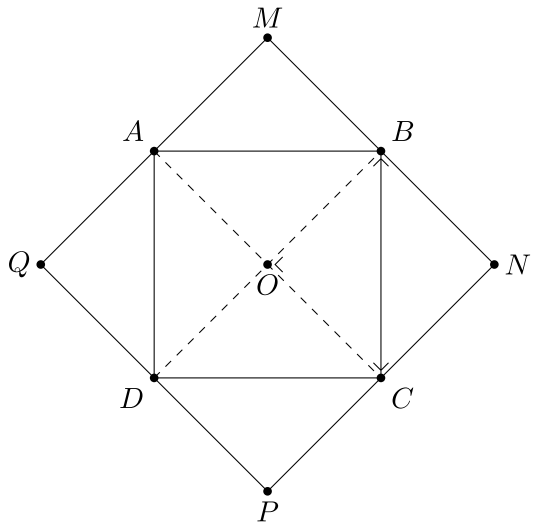
Duplication du carré

De nos jours, construire un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné semble anodin d'un point de vue algébrique, mais ce n'était pas le cas dans l'antiquité grecque. La première trace de ce problème se trouve dans un écrit de Platon, relatant un dialogue de Socrate, son maître, avec Ménon et un esclave. Par des questions successives, Socrate les amène à la réponse, c'est la méthode de la maïeutique, *accouchement* en grec, part importante de la philosophie de Socrate.

Étant donné un carré $ABCD$,

1. tracer les diagonales AC et BD,
2. tracer les perpendiculaires à ces diagonales passant par chaque sommet du carré. On nomme M, N, P et Q les points d'intersection.

Démontrons que $MNPQ$ est un carré dont l'aire est le double de celle du carré $ABCD$.



On remarque que $OAMB$ est un carré car il a 3 angles droits et les côtés consécutifs $[OB]$ et $[OC]$ sont de même longueur. L'aire de $OAMB$ est égale à la moitié de celle du carré $ABCD$. Par conséquent, $MNPQ$ est un carré qui a une aire égale au double de l'aire du carré $ABCD$.

Si $|AB| = 1$, on calcule la longueur des diagonales du carré $ABCD$ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 1 + 1 = 2.$$

D'où $|AC| = \sqrt{2}$.

On peut donc construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ qui est un des premiers nombres irrationnels rencontrés dans l'histoire.

Comment construire $\sqrt{n}$?

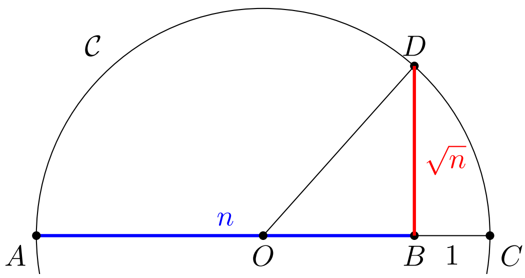
Les racines carrées de naturels

Construisons un segment de longueur $\sqrt{n}$ où n est un naturel ou tout autre nombre constructible à la règle et au compas :

1. tracer un segment $[AB]$ de longueur n

2. tracer $C \in AB$ tel que $|BC| = 1$ et $C \notin [AB]$
3. tracer le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AC]$. On note son centre O. On a $|AC| = n + 1$.
4. construire D tel que BD perpendiculaire à AC et $D \in \mathcal{C}$

Démontrons que $|BD| = \sqrt{n}$.



Vu les constructions, on a

$$|OB| = |OC| - 1 = \frac{|AC|}{2} - 1 = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}.$$

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBD : $|OD|^2 = |OB|^2 + |BD|^2$.
On a donc

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1)}{4} = \frac{4n}{4} = n. \end{aligned}$$

D'où $|BD| = \sqrt{n}$.

5 Opérations sur les constructibles

Nous avons montré qu'il est possible de construire, à la règle et au compas, les naturels, les rationnels positifs, les nombres irrationnels $\sqrt{n}$ où n est un naturel ou un autre nombre constructible.

Qu'en est-il de leur somme, différence, produit, inverse, … ?

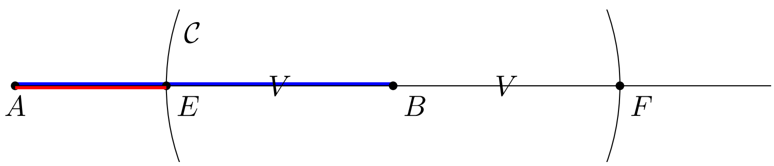
5.1 Addition et soustraction

Somme et différence

Étant donnés a et b deux nombres constructibles à la règle et au compas tels que $a > b$,

1. on trace le segment $[AB]$ de longueur a et le segment $[CD]$ de longueur b.
2. on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon $|CD|$.
3. on nomme E et F les points d'intersection de la droite AB avec le cercle $\mathcal{C}$, E étant le point le plus proche de A.

Par conséquent, on a $|AE| = a - b$ et $|AF| = a + b$.



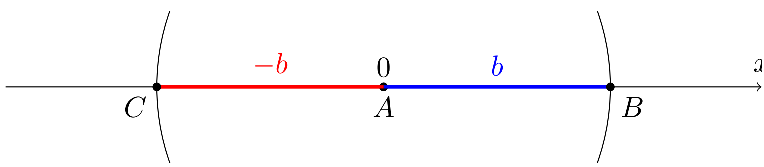
Opposé

Nous savons que dans la réalité, un segment n'a pas une longueur négative. Cependant, nous allons adopter une convention nous permettant de construire l'opposé d'une longueur positive.

Étant donné un nombre constructible b,

1. on trace un segment $[AB]$ de longueur b,
2. on choisit un axe Ox qui a pour origine A et qui passe par B. Donc B a pour abscisse $b > 0$.
3. on construit le point C, symétrique de B par rapport à A en traçant le cercle de centre A et de rayon b.

Par conséquent, C a pour abscisse $-b$.



On en déduit aisément que l'ensemble des nombres constructibles muni de l'addition est un groupe commutatif.

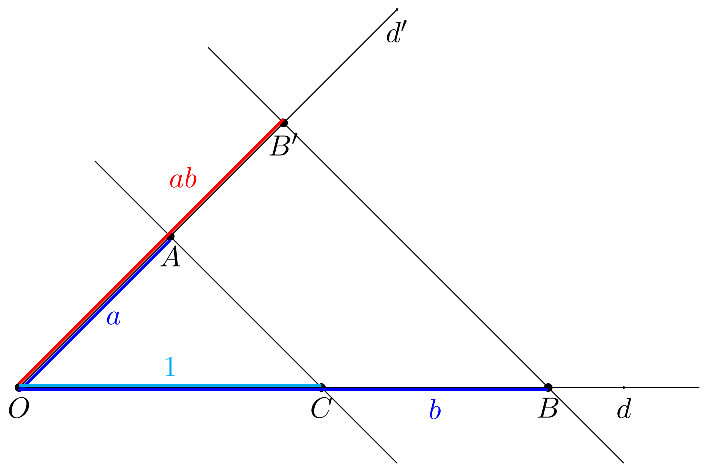
5.2 Multiplication de 2 nombres

Produit

Étant donnés a et b deux nombres constructibles,

1. tracer deux demi-droites de même origine O,
2. tracer le segment $[OB]$ de longueur b et le segment $[OC]$ de longueur 1 sur une des demi-droites,
3. tracer le segment $[OA]$ de longueur a sur l'autre demi-droite,
4. tracer la droite parallèle à CA passant par B. On nomme B' l'intersection de cette parallèle et de la 2[e] demi-droite.

Démontrons que $|OB'| = a \cdot b$.



Appliquons le théorème de Thalès au triangle OBB' et aux parallèles AC et BB'. On obtient :

$$\frac{|OC|}{|OB|} = \frac{|OA|}{|OB'|} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{|OB'|}.$$

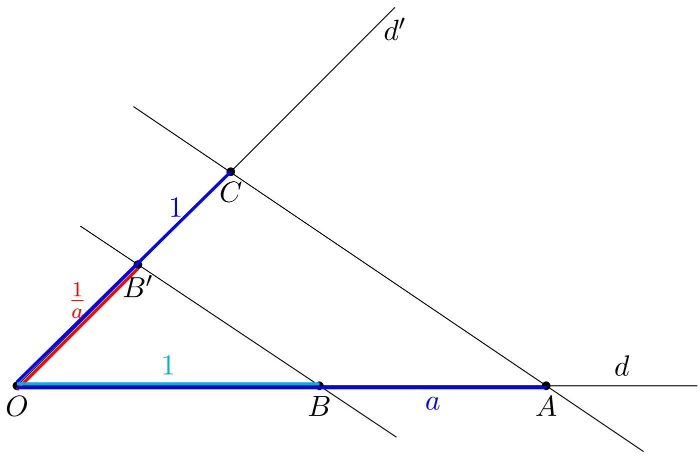
D'où $|OB'| = a \cdot b$.

Inverse

Étant donné a un nombre constructible non nul,

1. tracer deux demi-droites d'origine O,
2. tracer le segment $[OB]$ de longueur 1 et le segment $[OA]$ de longueur a sur une des demi-droites,
3. tracer le segment $[OC]$ de longueur 1 sur l'autre demi-droite,
4. tracer la droite parallèle à AC passant par B. On nomme B' l'intersection de cette parallèle et de la 2[e] demi-droite.

Démontrons que $|OB'| = \dfrac{1}{a}$.



Appliquons le théorème de Thalès au triangle OBB' et aux parallèles AC et BB'. On obtiens :

$$\frac{|OB'|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OA|} \Leftrightarrow \frac{|OB'|}{1} = \frac{1}{a}.$$

On déduit aisément que l'ensemble des nombres constructibles non nuls muni de la multiplication est un groupe commutatif.

5.3 Conséquences

L'ensemble des nombres constructibles muni de l'addition et de la multiplication est un corps comme l'ensemble des réels.

À ce stade, nous sommes capables de construire les nombres entiers, les rationnels, la racine carrée des nombres constructibles, leur somme, leur différence, leur opposé, leur produit, leur inverse, leur quotient ... Mais sommes-nous capables de tracer tous les irrationnels ?

Par exemple, considérons le nombre d'or (noté φ) qui vaut $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre irrationnel est constructible à la règle et au compas car on peut construire successivement $\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$, puis $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

De plus, comme la technique utilisée pour construire la racine carrée d'un naturel s'applique aussi à la racine carré de tout nombre constructible , on peut aussi construire des nombres tels que $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\phi} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \dots$

Mais il existe d'autres nombres irrationnels tels que des racines cubiques, π, $e \cdots$

6 Nombres non constructibles

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'il est impossible de tracer certains nombres à la règle et au compas en exploitant le théorème suivant.

6.1 Théorème de Wantzel

Le *polynôme minimal* d'un réel x est le polynôme de degré minimum parmi tous ceux qui s'annulent en x.

Si le réel x est constructible, alors le degré de son polynôme minimal à coefficients rationnels est une puissance de 2.

Ce théorème exclut que $\sqrt[3]{2}$ soit constructible car c'est une solution de l'équation $x^3 - 2 = 0$ qui n'est pas une équation du second degré.

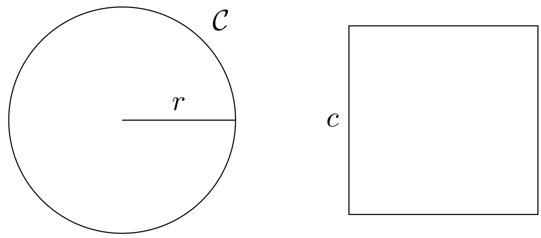
6.2 Quelques problèmes historiques

Passons à présent en revue quelques problèmes relatifs à la construction de nombres qui se sont posés dans l'Antiquité.

Quadrature du cercle

En utilisant seulement une latte et un compas, est-il possible de tracer un carré de même aire qu'un cercle donné ?

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $r \geq 0$ et un carré de côté $c \geq 0$.



L'aire du cercle vaut $\mathcal{A}_1 = \pi \cdot r^2$ et celle du carré vaut $\mathcal{A}_2 = c \cdot c = c^2$.

Les 2 aires sont égales ssi $\pi \cdot r^2 = c^2$ ssi $c = r\sqrt{\pi}$.

Il faudrait donc pouvoir construire π et $\sqrt{\pi}$ à la règle non graduée et au compas.

C'est seulement en 1882 que F. Van Lindemann a prouvé qu'il est impossible de construire un carré ayant la même aire que celle d'un carré donné à la règle et au compas.

Duplication du cube

L'origine du problème de la duplication du cube remonte à l'Antiquité. Il est depuis lors nimbé d'une aura particulière due à sa légende : un peuple de la Grèce antique, les Déliens, d'une île des Cyclades proche de Mykonos, étaient atteints de la peste. Ils allèrent voir l'Oracle de Delphes pour savoir comment stopper la maladie. Elle leur répondit qu'il fallait doubler l'autel dédié à Apollon en respectant la forme d'un cube parfait. Ne sachant comment faire, ils partirent quérir Platon, qui leur répondit que tout cela n'était qu'une métaphore, que le dieu leur ordonnait de ne plus négliger les mathématiques.

Étant donné un cube de côté c_1, est-il possible de construire à la règle et au compas un cube de côté c_2 dont le volume est le double du premier cube ?

On a

$$(c_2)^3 = 2(c_1)^3 \Leftrightarrow c_2 = \sqrt[3]{2} \cdot c_1.$$

Or, on ne peut pas tracer la racine cubique de 2 à la règle non graduée et au compas. Par conséquent, le problème est impossible.

Trisection d'un angle

Le 3e problème impossible est celui qui consiste à partager un angle quelconque en 3 angles de même amplitude à l'aide de la règle non graduée et du compas.

7 Construction de polygones réguliers

7.1 Définition

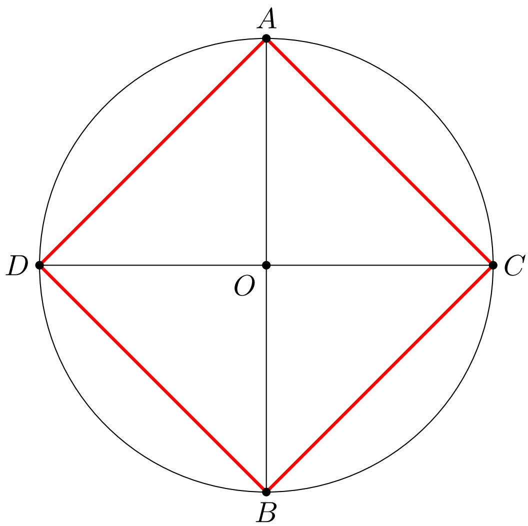
Un polygone est régulier si les côtés ont tous la même longueur et les angles ont tous la même amplitude.

On pourrait aussi dire qu'un polygone est régulier si ses côtés sont de même longueur et s'il est inscrit dans un cercle.

Est-il possible de construire, à la règle non graduée et au compas, tous les polygones réguliers ?

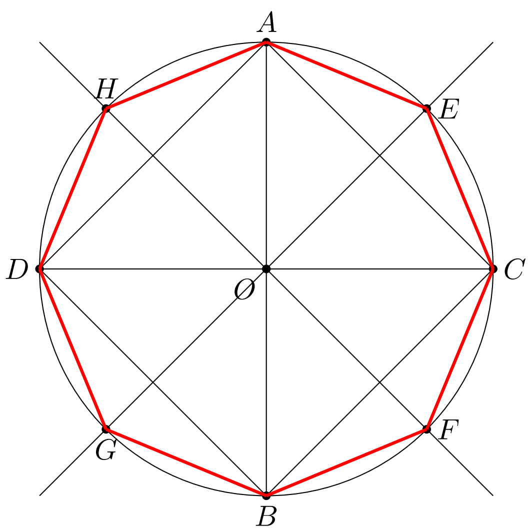
7.2 Carré

Si on trace 2 diamètres $[AB]$ et $[CD]$ perpendiculaires d'un cercle $\mathcal{C}$, le polygone $ACBD$ est un carré car ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.



7.3 Octogone régulier

À partir du carré $ABCD$, il est possible de tracer un octogone régulier à l'aide des médiatrices des côtés du carré.



Si on note E, F, G et H les points d'intersection de ces médiatrices et du cercle circonscrit au carré, le polygone $AECFBGDH$ est un octogone régulier car les triangles AEC, CFB, BGD et DHA sont des triangles isocèles. En effet, la médiatrice est aussi la médiane relative à celle-ci. En outre, ces 4 triangles sont isométriques car ils ont un côté (leur base) de même longueur comprise entre 2 angles de même amplitude.

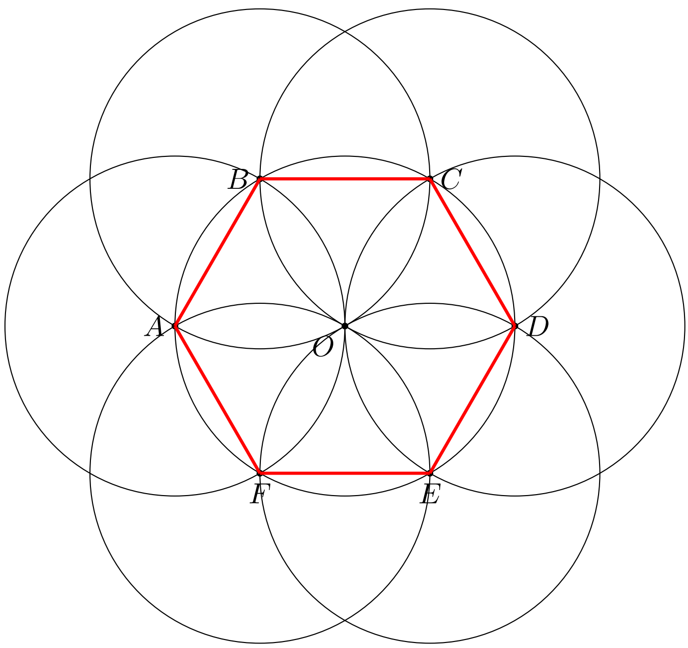
Ainsi, à partir d'un carré, on peut donc construire un octogone régulier, un polygone régulier à 16 côtés, puis à 32, puis à 64 $\cdots$ en traçant les médiatrices des côtés.

7.4 Hexagone régulier

Étant donné un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r et un point A sur ce cercle,

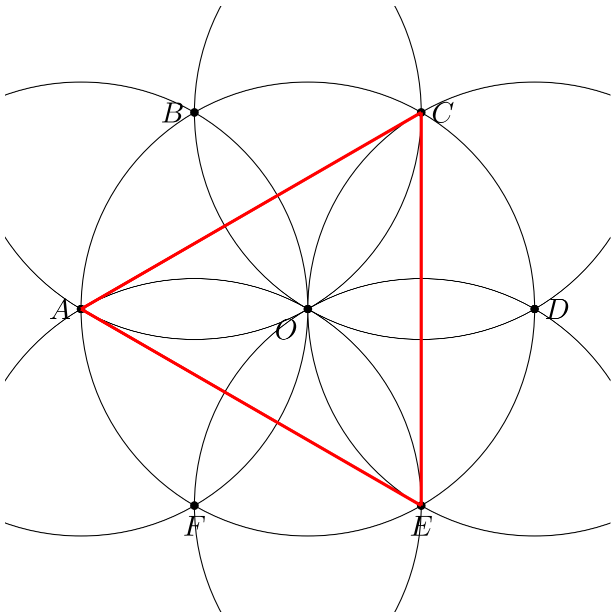
1. tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon r : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1 = \{B, F\}$
2. tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon r : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_2 = \{C, A\}$
3. tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre C et de rayon r : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_3 = \{D, B\}$
4. tracer le cercle $\mathcal{C}_4$ de centre D et de rayon r : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_4 = \{E, C\}$

Le polygone $ABCDEF$ est un hexagone régulier.



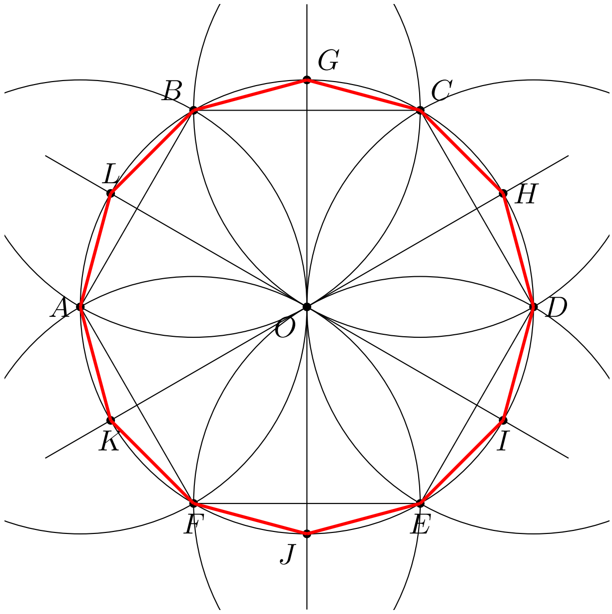
7.5 Triangle équilatéral

À partir de la construction expliquée ci-dessus, il est possible de tracer un triangle équilatéral en joignant les points A, C et E.



7.6 Dodécagone régulier

Si on trace les médiatrices des 6 côtés de l'hexagone $ABCDEF$, on note G, H, I, J, K et L les points d'intersection de ces médiatrices avec le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à l'hexagone. Et le polygone $GCHDIEJFKALB$ est un dodécagone régulier.

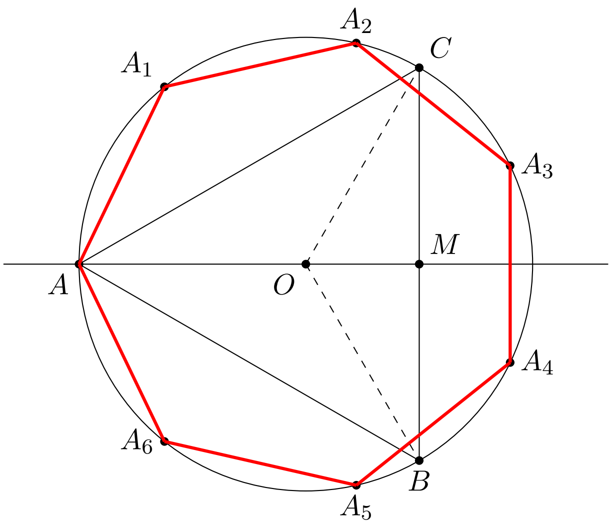


Comme nous l'avons expliqué pour le carré, il est toujours possible d'obtenir un polygone régulier qui a le double de côtés d'un polygone régulier donné. Ainsi, à partir de l'hexagone, nous pouvons obtenir un dodécagone régulier, un polygone régulier à 24 côtés, puis à 48, puis à 96 ...

7.7 Heptagone régulier

Voici une proposition de construction d'un heptagone régulier :

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon égal à 1
2. Tracer un triangle équilatéral ABC comme vu précédemment
3. Tracer la médiatrice de $[BC]$ qui coupe BC en M (milieu de $[BC]$)
4. Reporter 6 fois la longueur $|BM|$ à partir du point A en utilisant la même méthode que pour l'hexagone et considérer l'heptagone $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6$



Mais le polygone $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ est-il bien un heptagone régulier ?

On sait que six côtés sont de même longueur : $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5| = |A_5A_6| = |BM| = \dfrac{1}{2} \cdot |BC|$. Calculons-la.
Dans le triangle équilatéral ABC, on a $|\widehat{CAB}| = 60°$. D'où l'angle au centre $\widehat{COB}$ a une amplitude de 120°.
Appliquons le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle OBC :

$$|BC|^2 = |OC|^2+|OB|^2-2\cdot|OC|\cdot|OB|\cdot\cos|\widehat{COB}| = 1+1-2\cdot\cos 120° = 3$$

D'où $|BC| = \sqrt{3}$ et $|AA_1| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866...$
Comparons ce résultat avec la longueur d'un côté d'un heptagone régulier $HH_1H_2H_3H_4H_5H_6$ inscrit dans un cercle de rayon égal à 1 et de centre O.
L'angle au centre interceptant le segment $[HH_1]$, noté $\widehat{HOH_1}$, a une amplitude de $\dfrac{360°}{7}$.

Appliquons le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle HOH_1 :

$$\begin{aligned}|HH_1|^2 &= |HO|^2 + |H_1O|^2 - 2 \cdot |OH| \cdot |H_1O| \cdot \cos \widehat{HOH_1} \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot \cos \frac{360°}{7} \\ &= 2 \cdot \left(1 - \cos \frac{360°}{7}\right)\end{aligned}$$

D'où

$$|HH_1| = \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \frac{360°}{7}\right)} = 0,868...$$

On constate que les valeurs approchées des longueurs $|AA_1|$ et $|HH_1|$ ne sont pas égales, donc $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ n'est pas un heptagone régulier. La construction proposée n'est donc pas celle d'un hetpagone régulier.

Il est possible de démontrer qu'il n'existe aucune construction d'un heptagone régulier à la règle et au compas, par exemple en exploitant les nombres complexes.

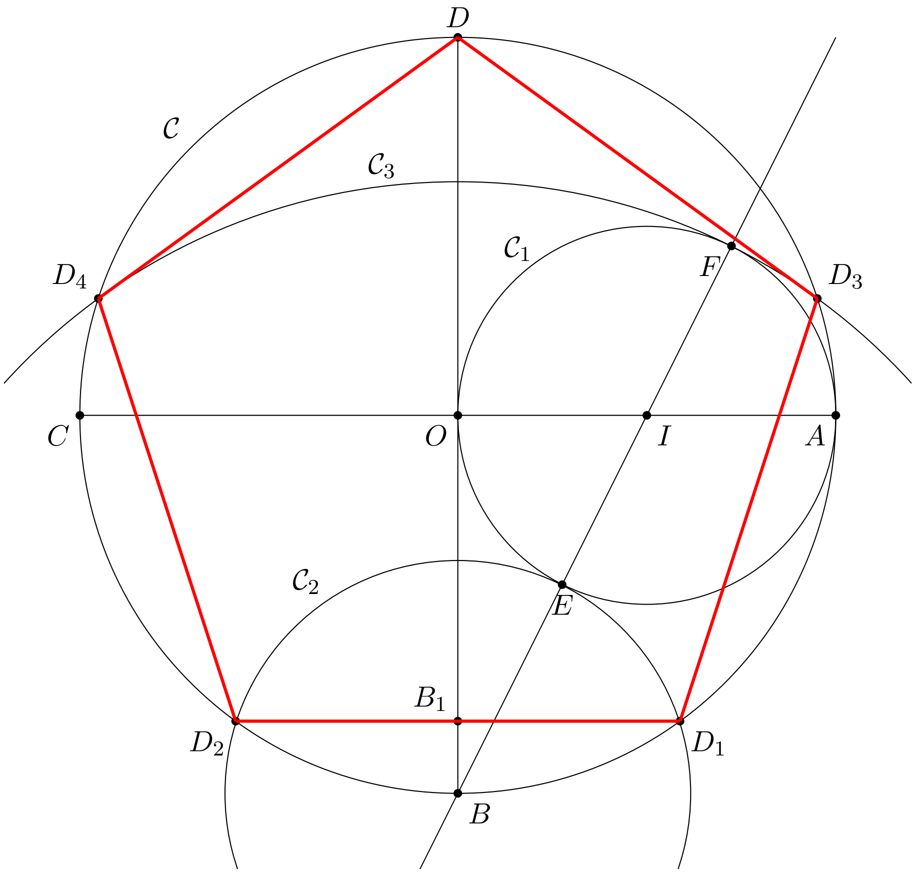
7.8 Pentagone régulier

Voici une proposition de construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

1. Tracer 2 diamètres perpendiculaires, notés $[AC]$ et $[BD]$
2. Construire I le milieu de $[OA]$
3. Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre I et de rayon $|IA|$
4. Tracer la droite BI : $BI \cap \mathcal{C}_1 = \{E, F\}$ (E étant le point le plus proche de B)
5. Tracer les 2 cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de centre B et respectivement de rayon $|BE|$ et $|BF|$: $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C} = \{D_1, D_2\}$ et $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C} = \{D_3, D_4\}$

Le polygone $DD_3D_1D_2D_4$ est-il un pentagone régulier ?



On sait que $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = 1$.

Dans un premier temps, montrons que le pentagone est symétrique par rapport à OB.

On sait que O est équidistant de D_1 et de D_2. De plus, B est équidistant de D_1 et de D_2 car ces points appartiennent au cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B.

D'où OB est la médiatrice de $[D_1D_2]$ et aussi de $[D_3D_4]$ par analogie. De plus D appartient à OB.

Donc OB est un axe de symétrie du pentagone.

Dans un second temps, nous calculons la longueur $|D_1D_2|$.

Calculons $|BI|$ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OIB :

$$|BI|^2 = |OI|^2 + |OB|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4},$$

donc $|BI| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Calculons $|BE| = |BD_2| = |BD_1| =$ rayon du cercle $\mathcal{C}_2$

$$|BD_1| = |BE| = |BI| - |EI| = |BI| - |OI| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Calculons le cosinus de l'angle $\widehat{D_1BO}$ en appliquant le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle OBD_1 :

$$\begin{aligned}
&|OD_1|^2 = |OB|^2 + |D_1B|^2 - 2\cdot|OB|\cdot|D_1B|\cdot\cos\widehat{D_1BO}\\
\Leftrightarrow &1^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\cos\widehat{D_1BO}\\
\Leftrightarrow &0 = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} - (\sqrt{5}-1)\cdot\cos\widehat{D_1BO}\\
\Leftrightarrow &\frac{-3+\sqrt{5}}{2} = -(\sqrt{5}-1)\cdot\cos\widehat{D_1BO}\\
\Leftrightarrow &\cos\widehat{D_1BO} = \frac{(-3+\sqrt{5})(2+2\sqrt{5})}{(2-2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5})}\\
&\qquad = \frac{-6-6\sqrt{5}+2\sqrt{5}+10}{4-20} = \frac{4-4\sqrt{5}}{-16} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.
\end{aligned}$$

Calculons $|BB_1|$ où B_1 est le milieu de $[D_1D_2]$.
Dans le triangle rectangle BB_1D_1, on a $\cos\widehat{D_1BB_1} = \dfrac{|BB_1|}{|BD_1|}$
Donc

$$\begin{aligned}
|BB_1| &= |BD_1|\cdot\cos\widehat{D_1BO} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{2\cdot 4}\\
&= \frac{5-2\sqrt{5}+1}{8} = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.
\end{aligned}$$

Calculons $|B_1D_1|$ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BB_1D_1

$|BD_1|^2 = |BB_1|^2 + |B_1D_1|^2$
Donc $|B_1D_1|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{4} - \dfrac{9+5-6\sqrt{5}}{16}$
$= \dfrac{24-8\sqrt{5}-14+6\sqrt{5}}{16} = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}.$
D'où $|B_1D_1| = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$

Par conséquent, on a

$$|D_1D_2| = 2\,|B_1D_1| = 2 \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Ensuite, pour prouver que le côté $[D_1D_2]$ a la même longueur que $[D_1D_3]$, nous démontrons que ce sont deux cordes interceptées par des angles au centre de même amplitude. Nous calculons le cosinus de l'angle au centre $\widehat{B_1OD_1}$ noté θ dans le triangle B_1OD_1 rectangle en B_1 donc :

$$\cos\theta = \frac{|OB_1|}{|OD_1|} = |OB_1|$$

car $|OD_1| = 1$.
Or $|OB_1| = |OB| - |BB_1| = 1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} = \dfrac{4-3+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}.$
Ainsi, $\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Puis nous souhaitons démontrer que $\widehat{BOD_3} = 3\theta$.

On a $|BD_3| = |BF|$ car $[BD_3]$ et $[BF]$ sont des rayons du cercle $\mathcal{C}_3$.
Or, $|BF| = |BI| + |IF| = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ qui est le nombre d'or φ
Donc, $|BD_3| = \varphi$.

Calculons le cosinus de l'angle $\widehat{BOD_3}$ en appliquant le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle BOD_3 :

$|D_3B|^2 = |BO|^2 + |OD_3|^2 - 2 \cdot |BO| \cdot |OD_3| \cdot \cos\widehat{BOD_3}$
$\Leftrightarrow \varphi^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos\widehat{BOD_3}$
$\Leftrightarrow \varphi^2 - 2 = -2\cos\widehat{BOD_3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - 2 = -2\cos\widehat{BOD_3}$
$\Leftrightarrow \dfrac{6+2\sqrt{5}-8}{4} = -2\cos\widehat{BOD_3}$
$\Leftrightarrow \cos\widehat{BOD_3} = \dfrac{-2+2\sqrt{5}}{-8} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}.$

On sait que

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta)\\
&= \cos\theta \cdot \cos 2\theta - \sin\theta \cdot \sin 2\theta\\
&= \cos\theta \cdot ((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2) - \sin\theta \cdot (2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta)\\
&= (\cos\theta)^3 - \cos\theta \cdot (\sin\theta)^2 - 2 \cdot \cos\theta \cdot (\sin\theta)^2\\
&= (\cos\theta)^3 - 3 \cdot \cos\theta \cdot (1 - (\cos\theta)^2)\\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right)\\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{4}\\
&= \cos\widehat{BOD_3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\widehat{BOD_3} = 3\theta$.

Donc, $\widehat{D_1OD_3} = \widehat{BOD_3} - \widehat{BOD_1} = 3\theta - \theta = 2\theta$.
Or, vu la symétrie par rapport à OB, on a $\widehat{D_2OD_1} = 2\widehat{BOD_1} = 2\theta$.
D'où $|D_2D_1| = |D_1D_3|$ car 2 angles au centre de même amplitude interceptent des cordes de même longueur.

De plus, par symétrie, on a aussi $|D_2D_4| = |D_1D_2|$.

Enfin, il reste à démontrer que $|DD_3| = |D_1D_2|$.
Le triangle BDD_3 est rectangle en D_3 car il est inscrit dans un demi-cercle. Donc on y applique le théorème de Pythagore :

$$|DB|^2 = |DD_3|^2 + |D_3B|^2 .$$

D'où

$$|DD_3|^2 = 2^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}$$
$$= \frac{16-6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}.$$

Donc

$$|DD_3| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = |D_1D_2|\,.$$

De plus, $|DD_4| = |DD_3|$ par symétrie.

En conclusion, les cinq côtés du pentagone sont de même longueur. Puisque celui-ci est inscrit dans un cercle, c'est un pentagone régulier .

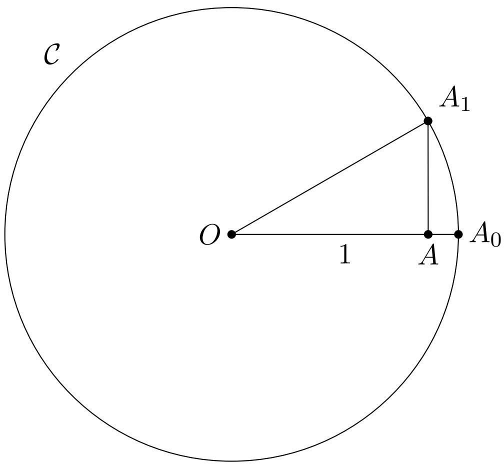
On peut donc construire un polygone régulier à 10, 20, 40 ... côtés.

7.9 Généralisation

Les côtés d'un polygone régulier à n côtés sont interceptés par un angle au centre d'amplitude $\frac{360°}{n}$.

Pour construire un polygone à n côtés inscrit dans un cercle unitaire :

1. tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1
2. choisir un point A_0 sur $\mathcal{C}$
3. construire le point A sur $[OA_0]$ tel que $|OA| = \cos\frac{2\pi}{n}$



Cela est possible si et seulement si $\cos \dfrac{2\pi}{n}$ est constructible à la règle non graduée et au compas.

Nombre n de côtés	Cosinus de l'angle au centre
3	$\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$
4	$\cos \frac{2\pi}{4} = 0$
5	$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$
6	$\cos \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}$
7	$\cos \frac{2\pi}{7}$: pas constructible
8	$\cos \frac{2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\dots$	$\dots$

C'est pas moi, c'est lui !

Célestin LE HARDIJ, Nicolas SCHREIBER et
Vincent VAN DIJCKE

Élèves de 6e secondaire au
Collège Saint-Benoit de Maredsous

Avec l'aide de leur enseignant
Miguël Dhyne

et de la chercheuse Ève-Aline Dubois (UNamur)

Résumé : Dans cet article, les auteurs étudient le célèbre problème du prisonnier. Deux amis, soupçonnés d'avoir saccagé le laboratoire de chimie, sont interrogés séparément. Ils ont tous deux le choix de dénoncer l'autre ou non.

- *S'ils se dénoncent mutuellement, ils écopent chacun de trois semaines de travaux d'intérêt général.*
- *Si l'un dénonce l'autre sans être dénoncé en retour, il ressort libre, tandis que l'autre écope d'un an de travaux d'intérêt général.*
- *S'ils se taisent tous deux, ils écopent chacun de quatre heures.*

Les élèves étudient les stratégies pouvant être employées par les deux amis afin de minimiser leurs peines. Ils étudient également le problème d'un point de vue probabiliste, en établissant un lien avec le triangle de Pascal.

1 La problématique

Deux amis, Pierre et Marie sont soupçonnés d'avoir saccagé le laboratoire de chimie du collège. Ils sont alors tous les deux séparés et interrogés dans le but de trouver le coupable et pouvoir lui infliger la sanction appropriée.

Ils doivent choisir entre dénoncer ou ne pas dénoncer leur ami(e). Et en fonction de cela, différentes peines peuvent leur être attribuées.

1. Si l'un dénonce l'autre, et que l'autre choisi de ne pas le dénoncer, le premier s'en sortira libre et lavé de tout soupçon. Cependant, celui ayant choisi de se taire écopera d'un an de travaux d'intérêt général.
2. Si les deux si dénoncent mutuellement, ils écoperont chacun de trois semaines de travaux d'intérêt général.
3. Si personne ne dénonce personne, ils auront quatre heures de travaux d'intérêt général pour la peine.

Mais comment faire pour que Marie ait la plus petite peine possible sachant que les deux suspects sont séparés et n'ont aucun moyen de communication ?

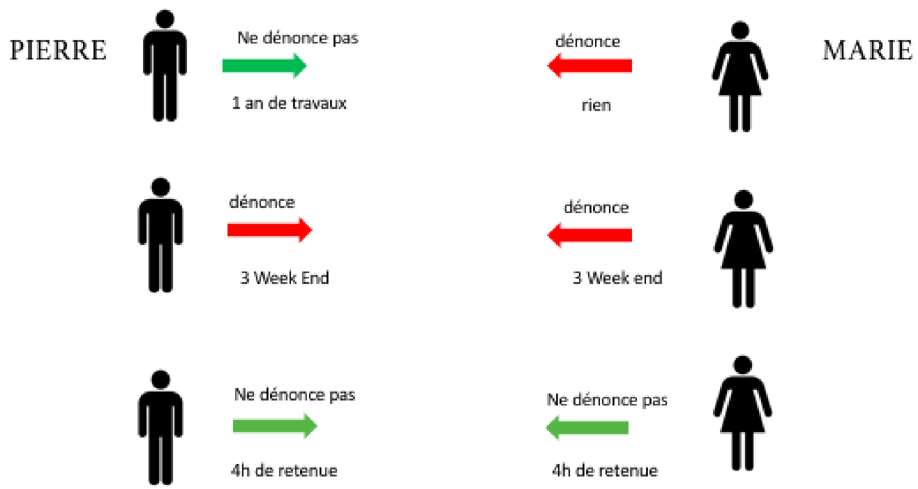
Comment déterminer la peine exacte pour un individu quelconque au n-ième délit ?

Nous traiterons la situation en fonction du lien qu'entretiennent Pierre et Marie. Que ceux-ci soient amis, amoureux, qu'ils complotent, qu'ils se haïssent ou encore qu'ils parviennent à se mettre d'accord sur une stratégie au fil des délits dans le but d'avoir la peine la plus restreinte.

Bref, imaginer le plus de scénarios possibles...

2 Analyse du problème

La première chose à faire était de représenter les différentes possibilités sous forme d'un schéma intelligible afin de mieux comprendre et visualiser.



En voyant cela, on déduit instinctivement que l'idéal, aussi bien pour Marie et pour Pierre, seraient qu'aucun des deux ne se dénonce afin qu'ils aient des peines égales de 4h à chaque crime commis.

Mais il faut garder à l'esprit les notions suivantes :

1. Les deux suspects sont totalement séparés et ne peuvent être en contact (pour se mettre d'accord).
2. Marie doit obtenir la plus petite peine possible.

Alors sachant qu'ils n'ont pas la possibilité de communiquer, et que Marie doit absolument être la moins punie, elle doit dénoncer.

→ Elle doit absolument éviter la plus grosse peine, qui n'a lieu que si elle ne dénonce pas et qu'elle est dénoncée. (1 an)

→ Si elle dénonce dans tous les cas, le pire qui pourrait lui arriver serait de se faire dénoncer, où elle n'écoperait que de 3 Week-end (de même pour lui).

→ Et dans le meilleur des cas, il ne la dénonce pas, elle est libre et Pierre prend un an.

3 Probabilités

Ces constatations faites, notre champ de réflexion était plus restreint. Donc nous allons essayer d'y voir plus clair pour comprendre ce qu'il se passerait pour Marie si elle dénonçait Pierre à tous les coups.

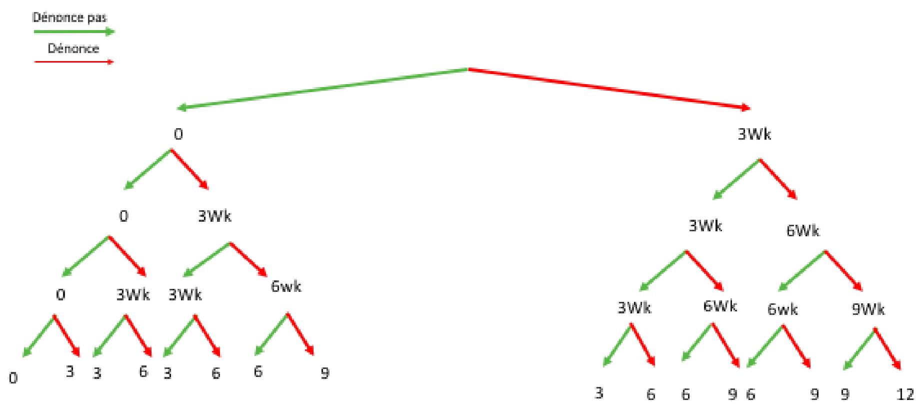
Vu qu'il n'y avait que deux choix possibles, il y avait autant de chances d'avoir 3 Week end que de chances de ne rien avoir (50/50). Du moins, c'est la probabilité de laquelle nous sommes partie car elle est assez simple et ce n'était pas cet aspect là sur lequel nous voulions nous intéresser.

Au deuxième crime les chances de ne rien avoir diminuaient de 25%.

Au troisième, de 12,5%.

Etc...

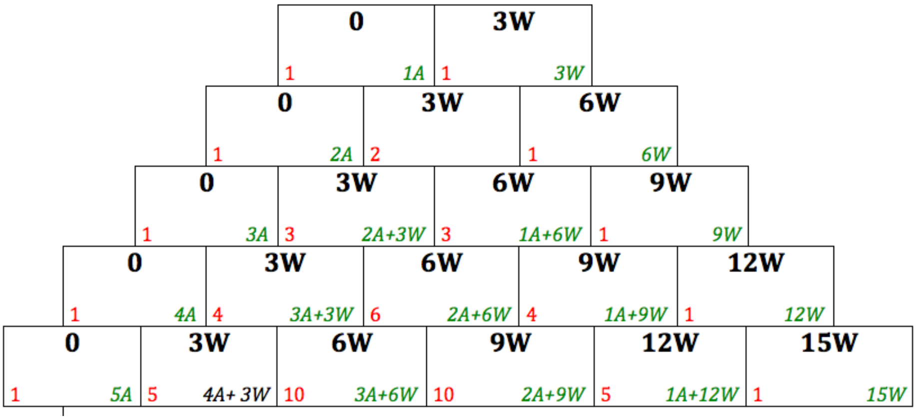
Les chances d'être libre tendaient vers 0 en fonction du nombre de crimes commis, ce qui est représenté sous forme d'arbre ci-dessous. Les flèches représentent les choix de Pierre qui vont influencer les peines de Marie.



4 Découverte du triangle de Pascal

Après avoir dessiné des dizaines diagrammes de toutes les formes imaginables, une manière nous a semblé assez interpellant car elle simplifiait la lecture, et suivait une certaine logique.

Il s'agissait d'un arbre de probabilité mais sous forme de pyramide, où un déplacement d'une case vers la droite équivalait à une trahison (3wk en plus à la peine totale) et où un déplacement vers gauche signifiait que l'on ne s'était pas fait dénoncer (la peine ne change pas puisque l'on a dénoncé).



Les chiffres en rouges représentent le nombre de fois que la peine est possible par crime.

Par exemple, au crime $n = 3$, Marie a 3 chances sur 8 d'avoir 3 Week-end.

(Les chiffres en vert représentent les peines de Pierre en fonction de celle de Marie).

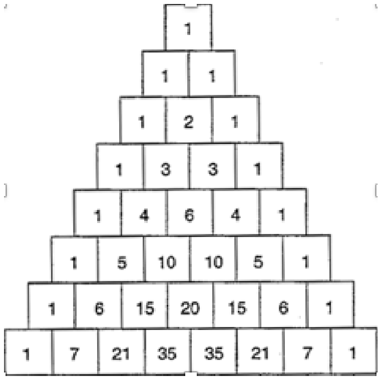
En dessinant une nouvelle fois cette pyramide mais en commençant par les chiffres rouges, nous avons remarqué qu'il y avait une relation entre les deux nombres du haut et celui en bas se situant entre les deux.

Afin de ne pas devoir établir ce diagramme à chaque situation. Nous avons développé une formule mathématique permettant de calculer la peine pour chaque cas où Marie dénoncerait.

Après avoir essayé par de nombreuses manières de trouver une formule générale nous sommes arrivés à en déduire une formule permettant de trouver tous les nombres pour chaque rangée

La formule étant :

$n.(n-1).(n-2)...1/n!$ (voir la pyramide ci-dessous). Cette formule est le fruit de nombreux essais et quelques pistes provenant des scientifiques.



5 Une des pistes de réflexions

Toujours dans le but de trouver la peine exacte après le n-ième crime, nous avons essayé une technique qu'un membre du groupe avait avancé, celle-ci était de faire correspondre une lettre à chaque cas possible. Et cela aussi dans le but de simplifier l'écriture et d'y voir plus clair. Et ainsi trouver une peine définie au n-ième crime en ne prenant pas seulement compte de Marine qui dénonce tout le temps, mais de toutes les possibilités. Marine peut donc aussi décider de pas dénoncer Pierre.

Le raisonnement s'articulait comme suit :
- Le cas où Marie dénonce, on le nomme : D
- Le cas où Marie ne dénonce pas : P

De même pour Pierre :
- Le cas où il dénonce on le nomme : X
- Le cas où il ne dénonce pas : Y

Ensuite nous pouvions établir ceci :
DX= 3Week end pour Marie et Pierre
DY= Rien pour Marie et 1an pour Pierre
PX= 1an pour Marie et rien pour Pierre
PY= 4h de retenue pour les deux

Prenons des données au hasard, par exemple : DDDD XXYY
Avec l'exemple ci-dessus on peut former 4 couples DX, DX, DY et DY.

On voit alors que Marie dénonce 4 fois, Pierre ne dénonce pas 2 fois et dénonce 2 fois. En traduisant ces combinaisons :

Marie : 3Wk + 3Wk + Rien + Rien

Pierre : 3Wk + 3Wk + 1an + 1an

Au total on peut alors voir que Marie a 6Wk et que Pierre a une peine de 2 ans et 6Wk. Après vérifications, le résultat obtenu correspondait avec les résultats obtenus dans la pyramide.

Ensuite nous avons essayé d'autres exemples pris au hasard, pendant les premières tentatives nous avions cru avoir résolu le problème, mais très vite il y eu un contre- exemple.

Exemple : DDDPP XXYYY

Dans cet exemple Marie dénonce 3 fois et ne dénonce pas 2 fois.

Pierre dénonce 2 fois et ne dénonce pas 3 fois.

C'est là que nous avons rencontré le problème, nous ne savions pas faire les couples, c'est-à-dire que ça peut prêter à confusion, ce n'est pas la solution la plus claire pour visualiser et comprendre les différentes peines. Si on prend les couples DX, DX, DY, PY et PY ou nous avons un de peine de 6Wk et 8H pour Marie et une peine de 1 an 6Wk et 8H pour Pierre, on n'aurait pas les mêmes peines si on prend les couples PX, PX, DY, DY et DY ou les peines sont de 2 ans pour Marie et de 3 ans pour Pierre.

Après d'avoir constaté cela et après d'avoir encore refait des nombreux autres exemples, nous avons conclu que cette manière n'était applicable, et qu'il était donc préférable de passer à autre chose, d'envisager des possibilités plus concrètes.

6 Différentes stratégies possibles

À la suite de l'échec de la technique précédentes, nous n'avons pas trouvé de formules ni de technique permettant de déterminer la peine exacte pour chacun des deux individus.

On s'est dit que puisque on ne saurait pas les déterminer exactement, est-ce que l'on pourrait avoir la plus petite peine possible mais pour les deux ?

Alors nous avons fait divers essais de stratégies « universelles » : elles ne représentent pas des stratégies destinées uniquement à Marie ou à Pierre.

- Naïve : consiste à ne jamais dénoncer.
- Traitre : consiste à dénoncer tout le temps (stratégie utilisée jusqu'à présent par Marine).
- Alternative : on dénonce une fois sur deux.
- Aléatoire : au hasard
- Périodique : avec une période qui se répète.

Par exemple :

Naïve: NNNNNNNNNNNNNNNN

Traitre : DDDDDDDDDDDDDDD

Alternative : NDNDNDNDNDNDND

Aléatoire: DNNDDDDNNNDNDNDD

Périodique: NNNDDNNNDDNNNDDNNNDD

Mais aucune de ces stratégies n'aboutissaient à un résultat qui permet de pouvoir définir une stratégie précise à adopter car nous obtenions chaque fois une peine plus grande pour Marie que pour Pierre. Nous devons alors réfléchir en fonction de l'autre (Pierre).

7 La stratégie « miroir »

Cette stratégie semble être la solution à notre problème.
Elle consiste à :
→ Au premier tour, on est bon, on ne dénonce pas.
→ Ensuite pour tous les autres tours, on recopie le coup de l'adversaire.

Exemple :

Pierre :	DDNNDNNNNNNNNDN
Marie :	NDDNNDNNNNNNNND

Résultats :

Marie :	3ans 3wk et 32h
Pierre :	3ans 3wk et 32h

→ Même peine au final.
→ La plus petite possible.

Au final même si Pierre comprend la stratégie de Marie, il décidera par lui-même de ne pas dénoncer afin que les choix se stabilisent et que chacun n'ait plus que 4h à chaque tour. Ce qui était le cas le plus favorable (cf. : analyse du problème).

Nous avons donc pu répondre à la question de départ posée initialement au début de notre travail. Nous savons donc quelle est la meilleure stratégie à adopter pour que Marie ait la peine la plus petite possible en fonction des différents choix et réactions de Pierre. Il nous a aussi été possible de déterminer les peines possibles pour Marie et pour Pierre au nième crime en prenant en compte que Marie dénonce dans tous les cas, ainsi que les probabilités de ces peines. Cela en nous basant sur quelques notions de probabilité. Nous n'avons malheureusement pas pu nous pencher sur plus de possibilités. Nous sommes conscients qu'il y'a encore bien plus de possibilités. Il peut être également intéressant de se pencher un peu plus sur le cas de Pierre. Ou encore d'imaginer d'autres scénarios, en se penchant sur le côté psychologique. Les possibilités semblent infinies.

Remerciements

Ici s'achève notre projet Math en Jeans.

Nous tenons à remercier nos professeurs ainsi que les scientifiques de l'UNamur de l'ULg ayant participé, pour nous avoir suivis et soutenus tout au long de cette année. Plus particulièrement à Mr. Dhyne pour tout son investissement dans le projet.

Cela fut une expérience très enrichissante !

Comment garder un secret ? Premiers pas en cryptographie

Mara Manieri et Alexandre Halembert

Élèves de 4e secondaire au
Lycée classique de Diekirch

Avec l'aide de leurs enseignants
Carine Batholmé, Geneviève Harles et Martine Mellina

et du chercheur
Bruno Teheux (Université du Luxembourg).

Résumé : Depuis très longtemps, les être humains cherchent à transmettre des messages à un destinataire précis sans que son contenu ne puisse être compris par une tierce personne. Dans cet article, on s'intéresse à deux méthodes de cryptographie, qui reposent sur de nombreuses propriétés arithmétiques.

1 Présentation du sujet

Le chiffrement ou cryptage est un procédé de cryptographie grâce auquel on souhaite rendre la compréhension d'un document impossible à toute personne qui n'a pas la clé de (dé)chiffrement[2].

Nous nous sommes intéressés à différentes méthodes de chiffrement (cryptage) d'un texte. Comment pourrait-on chiffrer et déchiffrer un message avec des moyens simples ? En effet, notre chercheur nous avait donné une phrase chiffrée de Jean de Lafontaine, et il nous a demandé de la déchiffrer. Les seules informations connues étaient que la phrase était en français et qu'il s'agissait d'un chiffrement « par décalage ». Comment alors déchiffrer cette phrase de manière intelligente sans y mettre trop de temps ? Sur base de nos démarches, comment construire un modèle mathématique de chiffrement ? Etant donné la simplicité du système, un modèle de cryptage plus général s'impose, toujours basé sur des opérations élémentaires. Est-ce possible d'imaginer un tel système ?

Remarque : Dans la suite de l'article, les mots « chiffrer » et « crypter » sont utilisés comme synonymes.

2 Annonce des résultats obtenus

Nous sommes partis de l'hypothèse qu'il aurait des réponses à toutes les questions posées. Effectivement, comme le chercheur nous l'avait demandé, nous avons décodé la phrase de Jean de Lafontaine. Nous sommes arrivés à construire un modèle mathématique du chiffrement de César et finalement un modèle mathématique affine. De plus, nous avons établi une formule de décodage pour le modèle mathématique affine.

3 Présentation de la démarche

3.1 Premiers pas

Les premiers textes cryptés apparaissent aux environs de 1900 avant Jésus-Christ. À l'époque, il ne s'agissait que de hiéroglyphes ayant été remplacés par d'autres symboles, pour rendre les textes illisibles.

2. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Chiffrement`

Notre chercheur nous avait donné le message crypté suivant :

ZORISEFOWESNRHASNIEOWSNZWPSEGSNS FGNHANRSFWENSKQSFFWTNRSNFSQHEWGS

Il nous a demandé de déchiffrer cette phrase de la Fontaine, tout en sachant que les apostrophes, les accents et la ponctuation avaient été supprimés et que l'espace était chiffré avec une lettre. On a aussi mis à notre disposition une roue de décryptage, similaire à celle représentée ci-dessous.

Elle est constituée de deux disques dont le diamètre du premier est inférieur à celui du second. Dans la roue ci-dessus, chaque disque est réparti en 26 sections et une lettre de l'alphabet est inscrite dans chaque section. Les deux disques sont attachés en leur centre l'un à l'autre, mais peuvent tourner indépendamment. Une telle roue est utilisée pour transcrire des messages.

Exemple : Cryptage du mot « chiffrement » par la roue de (dé)cryptage Tout d'abord, les deux disques de la roue sont tournés de façon à ce que les deux alphabets soient superposés. La lettre A se trouve au-dessus du A, la lettre B au-dessus du B, etc. On tourne alors le premier disque, de diamètre inférieur, de 3 sections dans le sens des aiguilles d'une montre. On dit que l'alphabet est décalé de trois unités.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W

Le mot « chiffrement » se trouve alors transformé en « zefccobjbkq ».

Sur base de la phrase cryptée et la mise à disposition de la roue, nous avons établi l'hypothèse que la phrase de Lafontaine a été chiffrée par décalage. Les lettres ont été décalées de x unités. Pour pouvoir mieux faire correspondre les lettres décalées aux lettres réelles de l'alphabet, nous utilisons la roue de (dé)cryptage.

Puisque la phrase est une citation de Jean de la Fontaine, nous supposons qu'elle est écrite en français. Il y a 26 lettres dans l'alphabet français. En considérant le caractère « espace » comme 27ème lettre, il y a donc 27 possibilités de décalage. Il serait alors possible d'essayer au plus 27 décalages différents pour enfin trouver le décalage utilisé dans la lettre et donc de la déchiffrer. Il y a pourtant d'autres méthodes.

Les textes français commencent souvent avec « le, la, les », « un, une » ou « des ». On peut donc essayer de décrypter avec L, U ou D comme base.

Une méthode alternative consiste à compter la fréquence des lettres, méthode que nous avons utilisée.

lettre	fréquence en %		lettre	fréquence en %
A	9,42		N	7,15
B	1,02		O	5,14
C	2,64		P	2,86
D	3,39		Q	1,06
E	15,87		R	6,46
F	0,95		S	7,90
G	1,04		T	7,26
H	0,77		U	6,24
I	8,41		V	2,15
J	0,89		W	≈ 0,00
K	≈ 0,00		X	0,30
L	5,34		Y	0,24
M	3,24		Z	0,32

En effet, en sachant que dans l'alphabet français, la lettre E est la plus fréquente (voir tableau ci-dessus), on peut faire correspondre la lettre la plus fréquente dans le message crypté au E et procéder de la même façon pour les lettres suivantes et ainsi décrypter assez facilement peu à peu le message.

Remarque : Il ne faut pas confondre le « décalage » et la « fréquence ». Le décalage correspond au nombre d'unités qu'on tourne un des disques de la roue de (dé)cryptage dans le sens des aiguilles d'une montre pour chiffrer un texte. La fréquence des lettres dans un texte est le nombre de fois que les différentes lettres apparaissent dans ce texte. Il s'agit de deux méthodes différentes que nous mélangeons pourtant.

Voici le nombre d'apparition des différentes lettres de l'alphabet dans la phrase de Lafontaine :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	/	/	/	6	6	3	3	2	/	1	/	/

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
9	3	1	2	4	**13**	1	/	/	6	/	/	2	/

On constate que le S apparaît 13 fois et est ainsi la lettre la plus fréquente du message. On fait donc correspondre le S du message au E de l'alphabet, le T au F et ainsi de suite. Si on utilise la roue de décryptage, on constate que l'alphabet a été décalé de 14 lettres.

Ainsi on a pu décrypter la phrase :

Z	O	R	I	S	E	F	O	W	E	S	N	R	H	A	S	N
L	A	D	V	E	R	S	A	I	R	E	_	D	U	N	E	_

I	E	O	W	S	N	Z	W	P	S	E	G	S	N	S	F	G
V	R	A	I	E	_	L	I	B	E	R	T	E	_	E	S	T

N	H	A	N	R	S	F	W	E	N	S	K	Q	S	F	F	W
_	U	N	_	D	E	S	I	R	_	E	X	C	E	S	S	I

T	N	R	S	N	F	S	Q	H	E	W	G	S				
F	_	D	E	_	S	E	C	U	R	I	T	E				

« L'adversaire d'une vraie liberté est un désir excessif de sécurité ».

Ce chiffrement par décalage est aussi appelé « Codage de César », puisqu'on rapporte que Jules César l'aurait utilisé avec un décalage de 3 lettres pour certaines correspondances militaires.

3.2 Modélisation mathématique du cryptage par décalage

Lors de la modélisation mathématique du chiffrement par décalage, on a attribué à chaque lettre de l'alphabet un nombre de 0 à 27, l'espace étant le 0, A le 1 et ainsi de suite jusqu'à Z le 26 (cette opération s'appelle le *codage*). Ceci permet de calculer et de visualiser plus facilement les lettres.

_	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Par la suite, en nous basant sur nos essais de décryptage de la lettre, nous avons établi la formule de cryptage suivante :

$$y = x + b,$$

où

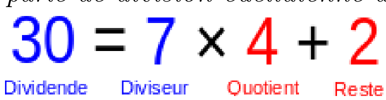
— y est le codage de la lettre cryptée ;
— x est le codage de la lettre du texte clair (c'est-à-dire, non chiffré) ;
— b est clé de (dé)cryptage (nombre entier).

Pour le décryptage, on peut utiliser la formule

$$x = y - b.$$

Or, ces formules fonctionnent uniquement tant que les nombres obtenus ne sont ni strictement inférieurs à 0 ni strictement supérieurs à 26. Si l'un de ces cas se présente, il est nécessaire d'avoir recours à une opération supplémentaire qui rend nécessaire une division euclidienne.

La division euclidienne : *Soient c et d deux entiers tels que $d > 0$. Il existe deux entiers uniques q et r tels que $c = qd + r$ et r est positif et strictement plus petit que d. Les nombres c et d sont respectivement appelés dividende et diviseur, et les nombres q et r sont le quotient et le reste. On parle de division euclidienne de c par d.*



Division euclidienne de 30 par 7, le quotient est 4 et le reste 2[3].

3. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Division_euclidienne`

Dans notre cas, vu que l'alphabet est constitué de 27 lettres (l'espace inclus), il faudra effectuer la division euclidienne de y par 27 lors du chiffrement ou la division euclidienne de x par 27 lors du déchiffrement. Le nombre important à retenir est le reste. Celui-ci représente le nombre correspondant à la lettre déplacée de b unités sur la roue de décryptage.

Exemple : Chiffrement de la lettre W à l'aide d'un code de César de clé 13. Considérons un codage où b est égal à 13. La lettre W correspond au nombre 23. On prend donc $x = 23$ et on a alors : $y = 23+13 = 36$. Comme 36 est strictement supérieur à 26, on doit effectuer la division euclidienne de 36 par 27 pour pouvoir associer y à une lettre de l'alphabet. On a : $36 = 27 \cdot 1 + 9$. Le reste est 9. La lettre W correspond donc à la lettre I (9e place, voir table précédente) dans le message codé.

On pourrait aussi représenter les nombres correspondant aux lettres de l'alphabet comme des nombres sur une horloge : quand l'aiguille de l'horloge dépasse minuit, on recommence à compter depuis 0. De même ici : quand y dépasse 26, on recommence le tour. 27 devient 0, 28 devient 1, et ainsi de suite. La formule de chiffrement devient alors :

$$y = (x + b)\%27,$$

où l'opération %27 (« modulo 27 ») représente le reste de la division euclidienne par 27.

Ce cryptage est relativement facile : même si on ne connaît pas la clé, on n'a qu'à essayer et tourner la roue de décryptage 27 fois dans le pire des cas et forcément, une des solutions est la bonne. Le cryptage n'est donc pas vraiment sûr.

Donc nous nous sommes demandés comment on pourrait améliorer la formule.

La formule est basée sur une addition (respectivement une soustraction). Si on remplaçait l'addition par une multiplication, cela ne changerait pas grand-chose, car il y aurait toujours un tout petit nombre de clés. (Attention tout de même : toutes les multiplications ne définissent pas de bons codages, cf. problème du cryptage affine). Nous avons alors eu l'idée de mélanger l'addition et la multiplication.

3.3 Cryptage affine

Nous passons de la formule de codage $y = (x + b)\%27$ à une formule améliorée, utilisant une 2e clé a :

$$y = (ax + b)\%27,$$

avec, comme précédemment,
— y est le codage de la lettre cryptée ;
— x est le codage de la lettre du texte clair (c'est-à-dire, non chiffré)
— a et b sont les clés de (dé)cryptage (nombre entier).

Il s'agit d'un codage appelé affine. Ainsi il devient possible de générer bien plus que 27 possibilités de fonctions de chiffrements. Évidemment a doit être différent de 0. En effet, sinon, on n'aurait plus de terme en x dans la fonction de chiffrement et toutes les lettres seraient codées par la même lettre représentée par b.

Avec cette formule améliorée, nous avons fait plusieurs essais de codage avec différentes valeurs pour a et b.

Le tableau suivant reprend le codage de $5x + 3$.

_	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	8	13	18	23	1	6	11	16	21	26	4	9	14
C	H	M	R	W	A	F	K	P	U	Z	D	I	N

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	19	24	2	7	12	17	22	0	5	10	15	20	25
	S	X	B	G	U	Q	V	_	E	J	O	T	Y

La première ligne reprend les lettres de l'alphabet. Dans la deuxième ligne, on retrouve les nombres associés aux différentes lettres correspondant à leur rang dans l'alphabet. La troisième ligne donne les nombres trouvés après avoir appliqué la formule de codage $(5x + 3)\%27$. Dans la dernière ligne, on retrouve les lettres codées.

Dans le tableau suivant, on a procédé de la même façon pour le codage de $3x+2$:

_	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	5	8	11	14	17	20	23	26	2	5	8	11	14
B	E	H	K	N	Q	T	W	Z	B	E	H	K	N

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	17	20	23	26	2	5	8	11	14	17	20	23	26
	Q	T	W	Z	B	E	H	K	N	Q	T	W	Z

On remarque quelque chose de particulier : le codage de $3x+2$ ne donne pas 27 images différentes comme le codage de $5x+3$ auparavant. En effet, il a seulement 9 images différentes qui se répètent 3 fois.

Cela pose problème : si on veut par exemple chiffrer la lettre D dans le message initial, on obtient la lettre N dans le message crypté. Si on veut décrypter ce message, N peut correspondre soit à D, soit à M, soit à V.

En chiffrant par exemple avec $6x+3$, le même problème se pose : il n'y a que 9 images différentes.

En fait, pour toutes les combinaisons où a est un multiple de 3, il n'y a pas 27 combinaisons différentes. Cela peut s'expliquer par le fait que $27 = 3^3$. On devine que 27 et a doivent être premiers entre eux.

Nombres premiers entre eux : En mathématiques, on dit que des entiers a et b sont premiers entre eux [ou] que a est premier avec b [...] si leur plus grand commun diviseur est égal à 1. Par exemple, 6 et 35 sont premiers entre eux, mais 6 et 27 ne le sont pas parce qu'ils sont tous les deux divisibles par 3 [4].

Ainsi nous établissons la conjecture que a doit être premier avec 27. Les valeurs possibles pour a sont alors : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; etc.

Remarque : Si on avait décidé de laisser l'espace de côté, on n'aurait que 26 images possibles et a devrait être premier avec 26 (i.e. ne pourrait pas être un multiple de 2 ou de 13).

4. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_premiers_entre_eux`

3.4 Formule de déchiffrage pour le modèle affine

Pour les messages cryptés à l'aide d'un codage affine avec a non multiple de 3, il faut trouver une formule de déchiffrage.

Tout d'abord, il nous faut un nombre a' tel que

$$a' * a = 1\%27.$$

Voici quelques nombres a' qui correspondent aux différentes valeurs de a :

a	1	2	3	4	5	6	7
a'	1	14	/	7	11	/	31

Ensuite, nous avons établi la formule de déchiffrage suivante :

$$x = a'(y - b)\%27.$$

En y introduisant les valeurs de a, b et y, on obtient x et le texte devient de nouveau lisible.

Ceci est un exemple d'application de la formule à un texte codé par $5x + 3$ ($a = 5$, $b = 3$).

C	H	M	R	W	A	F	K	P	U	Z	D	I	N
3	8	13	18	23	1	6	11	16	21	26	4	9	14
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
_	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M

	S	X	B	G	U	Q	V	_	E	J	O	T	Y
	19	24	2	7	12	17	22	0	5	10	15	20	25
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Prenons l'exemple de la lettre C et de la lettre H dans le message crypté :

— $C \rightarrow 11 * (3 - 3) = 11 * 0 \rightarrow 0 \rightarrow \_$

— $H \rightarrow 11 * (8 - 3) = 11 * 5 = 5555 = 2 * 27 + 1 \rightarrow 1 \rightarrow A$

4 Remerciements

Vu que notre groupe n'était composé que de deux élèves, nous étions parfois à court d'idées et d'approches de résolution du problème. Or, nos professeurs et les chercheurs de l'Université du Luxembourg nous ont alors donné une petite aide dans la bonne direction, sans toutefois trop révéler... De plus, nous avons eu la chance de rencontrer des élèves de l'Athénée Royal Charles Rogier à Liège au mois de janvier avec lesquels nous avons pu discuter et échanger nos idées, ce qui nous a aidés également.

5 Conclusion

Nous avons établi deux formules mathématiques pour crypter des messages. De plus, nous sommes arrivés à trouver une formule de décodage pour la deuxième formule de cryptage, plus compliquée. On est ainsi arrivé aux limites du cryptage qui ne crypte qu'une seule lettre. La prochaine étape serait de crypter par blocs de lettres, soit de 2 lettres ou même plus.

Or il est évident que ce système ne peut plus être utilisé dans la vie quotidienne d'aujourd'hui. Bien qu'un humain mette un certain temps à déchiffrer un message crypté par codage affine, un ordinateur pourrait le déchiffrer en un rien de temps. A l'époque de César, le cryptage était une méthode courante ; aujourd'hui toute donnée qui doit être cryptée (p.ex. toutes nos données sur l'internet) est chiffrée par un codage très compliqué à déchiffrer comme le RSA (une méthode utilisant aujourd'hui des nombres premiers à plusieurs centaines de chiffres, quasiment impossible à déchiffrer).

Dessine-moi Fibonacci !

Otilia Casuneanu, Larisa Cioata, Stefan Gherghel, Eloïse Hody, Simon Martin, Victor Orban, Lisa Rugigana et Tudor Ungureanu

Élèves au
Collège Sainte-Véronique, Liège, Belgique et au
Collège national, Iasi, Roumanie.

Avec l'aide de leurs enseignants
Sophie Gérard, Pascaline Gurdal, Dylan Hansen, Sébastien Kirsch, Anne Lacroix, Céline Lebel, Sandrine Schieres (Collège Sainte-Véronique, Liège, Belgique) et Gabriela Elena Zanoschi (Collège national, Iasi, Roumanie)

et des chercheurs
Stéphanie Aerts, Marie Ernst, Julien Leroy, Marion Vandermeer (ULiège) et Claudiu Volf (Université de Iasi).

Résumé : Dans cet article, les auteurs étudient une suite W dont chaque terme est une séquence de 0 et de 1, définie en posant $W_0 = 0$ et en construisant W_{n+1} à partir de W_n en y remplaçant chaque 0 par 01 et chaque 1 par 0. À chaque terme de la suite est également associée une courbe construite de la manière suivante : à chaque chiffre de la séquence correspond un segment de longueur 1. Si un chiffre est un 1, ce segment est tracé dans le prolongement du précédent ; si c'est un 0, il est tracé en tournant à gauche ou à droite selon la parité de la position du 0 dans la séquence. Les élèves démontrent alors une formule donnant le nombre d'angles droits et plats dans cette courbe, et montrent que la courbe associée à W_{n+2} peut être obtenue à partir des courbes associées à W_{n+1} et W_n. Ils conjecturent enfin que, quelque soit n, la courbe associée à W_n ne s'intersecte jamais elle-même.

1 Introduction

1.1 Construction de la suite

Nous avons travaillé sur une suite W composée de nombres faits seulement de 0 et 1.

Pour construire cette suite, nous commençons par 0 (nous avons décidé de l'appeler W_0), et, pour passer d'un nombre (nous avons décidé d'appeler le n-ième nombre de cette suite W_n), on transforme tous les 0 en 01 et tous les 1 en 0 (cette transformation sera notée φ) :

$$0 \Rightarrow 01$$

$$1 \Rightarrow 0.$$

Les premiers nombres sont :

$$\begin{aligned} &W_0 = 0, \\ &W_1 = 01, \\ &W_2 = 010 \\ &W_3 = 01001 \\ &W_4 = 01001010 \\ &W_5 = 0100101001001 \end{aligned}$$

Pour passer, par exemple, de $W_2 = 010$ à W_3, on applique φ, cela transforme le premier 0 en 01, le 1 en 0 et le deuxième 0 en 01 :

W_2 :	0	1	0	$\Rightarrow$	010
W_3 :	01	0	01	$\Rightarrow$	010101

1.2 Représentation graphique

Nous avons associé une courbe à chaque nombre W_n de la suite W. Elle est construite comme ceci : chaque chiffre donne un segment de longueur 1. Le premier 0 du nombre donne un segment horizontal allant de gauche à droite (nous avons prouvé dans la section 6 que chaque nombre commence par 0). Ensuite, on suit la règle de construction suivante :

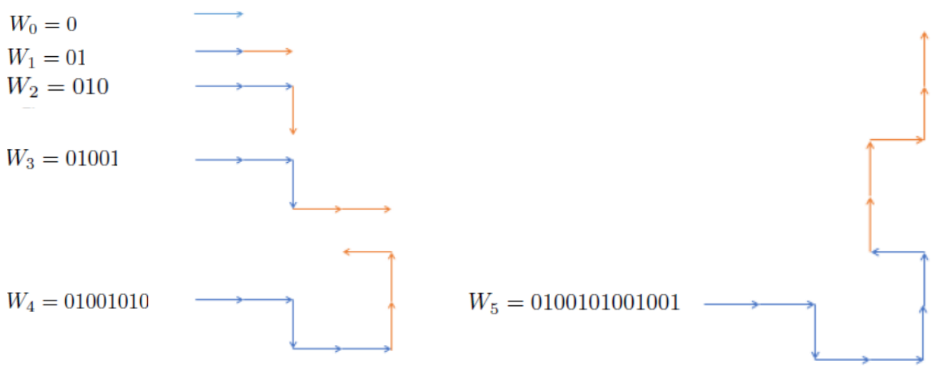
— Si on a un 1, on continue le trait dans la même direction ;

— Si on a un 0, on tourne :
  — de 90° vers la **droite** si la position du 0 est **paire**,
  — de 90° vers la **gauche** si la position du 0 est **impaire**.

Par exemple pour construire la courbe associée à W_3 :

W_3	0	1	0	0	1
position	0	1	2	3	4
tournant		aucun	à droite	à gauche	aucun
direction	droite	droite	bas	droite	droite

Les premières courbes sont celles-ci :



2 Les questions de recherches

Nous avons, au cours de l'année, tenté de répondre à différentes questions liées à cette suite et aux courbes

1) Combien y a-t-il d'angles droits et d'angles plats dans chaque courbe ?
2) Comment passer graphiquement d'une courbe à la suivante ?
3) Si on continuait le procédé à l'infini, la courbe s'intersecterait-t-elle ?

3 Réponse de la question 1

Combien y a-t-il d'angles droits et d'angles plats dans chaque courbe ?

Tout d'abord, grâce à la définition de la construction de la courbe, nous savons que **le nombre d'angles droits présents dans la courbe est égal au nombre de** 0 **diminué de** 1 **de la suite correspondante**. En effet, chaque 0 donne un angle de 90° sauf le premier qui donne un segment horizontal. Ensuite, **chaque** 1 **donne un angle plat**.

Nous avons remarqué que le nombre de 0 dans W_n (que nous avons décidé de noter W_n^0) est égal à la longueur de la suite W_{n-1} (notée $|W_{n-1}|$). Autrement dit, $W_n^0 = |W_{n-1}|$ En effet, comme la transformation φ transforme les 1 en 0 et les 0 en 01, chaque chiffre transformé donnera un et un seul 0.

Par un même raisonnement, on peut établir que le nombre de 1 dans la suite W_n (noté W_n^1) est égal à $W_{n-1}^0 = |W_{n-2}|$ comme seuls les 0 donnent un 1 par φ. En d'autres termes, $W_n^1 = W_{n-1}^0 = |W_{n-2}|$.

Ensuite nous avons trouvé que

$$W_n^0 = F_{n+1},$$

où F_{n+1} représente le $(n+1)$-ième nombre de la suite de Fibonacci. La suite de Fibonacci est définie comme suit : $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Chaque nombre de la suite est la somme des deux précédents. Les premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. Nous prouvons cette égalité par récurrence. Le principe d'une preuve par récurrence se divise en deux étapes. D'abord, on montre que l'égalité est vraie pour un petit nombre (le premier nombre de la suite). Cette étape est appelée le **cas de base**. Ensuite, on montre que si l'égalité est vraie pour un nombre, alors elle est encore vérifiée pour le nombre suivant. C'est l'étape d'**induction** ou de **récurrence**.

Une fois ces deux étapes complétée, on peut conclure que l'égalité est vraie pour tous les nombres. En effet, elle est vérifié pour le premier nombre et si elle est vraie pour un nombre elle vraie pour son suivant. Elle est donc vérifiée aussi pour le deuxième, puis pour le troisième, le quatrième, etc.

a) Cas de base :
   $W_0 = 0 \Rightarrow W_0^0 = 1 = F_1$
   $W_1 = 01 \Rightarrow W_1^0 = 1 = F_2$
b) Récurrence/Induction :
   Supposons que $W_k^0 = F_{k+1}$ et $W_{k+1}^0 = F_{k+2}$ et montrons que $W_{k+2}^0 = F_{k+3}$.
   Comme prouvé plus haut, on sait que $W_{k+1}^1 = W_k^0 = F_{k+1}$. Comme les nombres de la suite ne sont composés que de 0 et 1, il y a $W_{k+1}^1 + W_{k+1}^0 = F_{k+1} + F_{k+2} = F_{k+3}$ chiffres dans W_{k+1}.
   $\Rightarrow W_{k+2}^0 = |W_{k+1}| = F_{k+3}$ $\square$

De cette égalité, on peut déduire que $\boxed{|W_n| = W_{n+1}^0 = F_{n+1+1} = F_{n+2}}$.
On peut aussi en déduire que $\boxed{W_n^1 = W_{n-1}^0 = F_{n-1+1} = F_n}$.

Grâce à ces égalités, on peut répondre à la question :

Il y a $F_{n+1} - 1$ angles droits et F_n angles plats dans la n-ième courbe associée à W_n.

4 Réponse à la question 2

Comment passer graphiquement d'une courbe à la suivante ?
Nous avons découvert que W_n est égal à W_{n-1} et W_{n-2} concaténés (c'est-à-dire mis bout à bout). Nous avons décidé de symboliser la concaténation de W_{n-1} et W_{n-2} par $W_{n-1} \circ W_{n-2}$.
Notons W' la suite définie comme suit : $W'_0 = 0, W'_1 = 01$ et $W'_n = W'_{n-1} \circ W'_{n-2}$. Nous devons prouver que $W = W'$. Nous allons le démontrer par récurrence.

a) Cas de base :
   $W_0 = 0 = W'_0$
   $W_1 = 01 = W'_1$
   $W_2 = 010 = W'_0 \circ W'_1 = W'_2$
b) Récurrence/Induction :
   Si $W_m = W'_m$,$\forall m < n$, montrons que $W_n = W'_n$

$$\begin{aligned}
W_n &= \varphi(W_{n-1}) \\
&= \varphi(W'_{n-1}) \\
&= \varphi(W'_{n-2} \circ W'_{n-3}) \\
&= \varphi(W'_{n-2}) \circ \varphi(W'_{n-3}) \\
&= \varphi(W_{n-2}) \circ \varphi(W_{n-3}) \\
&= W_{n-1} \circ W_{n-2} \\
&= W'_{n-1} \circ W'_{n-2} \\
&= W'_n
\end{aligned}$$

□

Comme $W_n = W_{n-1} \circ W_{n-2}$, la courbe associée à W_n est composée des courbes associée à W_{n-1} et W_{n-2}.

Pour passer de la courbe associée à W_n à la courbe associée à W_{n+1}, on prend la courbe associée à W_n puis on y concatène la courbe associée à W_{n-1} avec :

— une rotation vers la droite si $|W_n|$ est pair ;

— une rotation vers la gauche et une symétrie orthogonale si $|W_n|$ est impair.

La rotation apparait à cause du premier 0 de W_{n-1} qui, à la place d'être un simple segment horizontal, devient un segment avec une rotation :

— vers la droite si la position du 0 est paire donc si $|W_n|$ est pair. En effet, la position du dernier chiffre de W_n sera $|W_n| - 1$ comme la position du premier 0 est 0. Le premier chiffre de W_{n-1} est en position $|W_n| - 1 + 1 = |W_n|$.

— vers la gauche si la position du 0 est impaire donc si $|W_n|$ est impair.

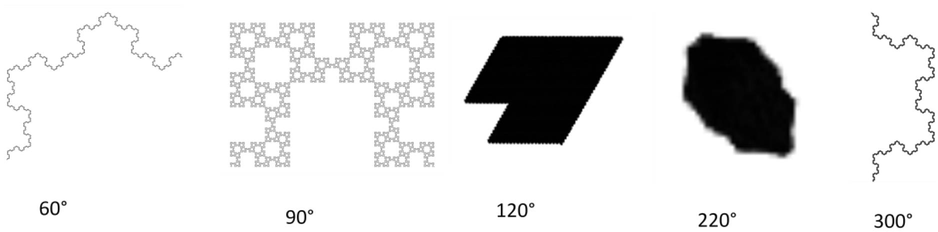
La symétrie orthogonale apparait lorsque $|W_n|$ est impair car la position de tous les 0 de W_{n-1} a changé de parité, donc tous les 0 formeront des angles vers la gauche s'il étaient vers la droite dans la courbe associée à W_{n-1} et inversement. L'axe de symétrie est la droite passant par le premier segment de W_{n-1}.

5 Réponse à la question 3

Si on continuait le procédé à l'infini, la courbe s'intersecterait-t-elle ?

Malheureusement, nous n'avons rien trouvé de très concret pour répondre à cette question. Nous pouvons juste conjecturer que la courbe est

une fractale et qu'elle ne s'intersecte pas. Une fractale est une figure géométrique qui, lorsque l'on zoome donne exactement la même figure.
Nous avons aussi remarqué en changeant l'amplitude des angles formés par le chiffre 0 que la représentation graphique donne aussi une fractale lorsque l'angle est compris entre $-90°$ et $90°$. En revanche, quand l'angle est compris entre $90°$ et $270°$, cela s'intersecte. Voici quelques courbes dépendant de l'amplitude des angles formés par les 0 :



6 Quelques propriétés intéressantes

Au cours de l'année, nous avons fait d'autres découvertes à propos de ces nombres et de ces courbes. Celles-ci sortent du cadre de nos questions initiales. En voici quelques unes :

Proposition 1. *Deux* 1 *ne peuvent pas être consécutifs.*

Démonstration. En effet, comme $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$, à chaque fois qu'il y a un 1, un 0 le précède. □

Proposition 2. *Trois* 0 *ne peuvent pas être consécutifs.*

Démonstration. Comme $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$, le seul moyen d'avoir trois 0 consécutifs est d'avoir $\varphi(110)$ ou $\varphi(111)$, ce qui, comme montré ci-dessus, est impossible. □

Proposition 3. W_n *se termine par* 0 *si* n *est pair et par* 1 *si* n *est impair.*

Démonstration. On peut le prouver facilement par récurrence :

a) Cas de base : W_0 finit par 0 et W_1 finit par 1.

b) Récurrence/Induction :

— Si W_k finit par 0 et que k est pair, alors $k+1$ est impair et, puisque $\varphi(0) = 01$ et $W_{k+1} = \varphi(W_k)$, on voit que W_{k+1} se termine par 1.
— Si W_k finit par 1 et k est impair, alors $k + 1$ est pair et, puisque $\varphi(1) = 0$ et $W_{k+1} = \varphi(W_k)$, on voit que W_{k+1} se termine par 0. □

Proposition 4. *Deux* 0 *ne peuvent pas terminer un nombre de la suite.*

Démonstration. A part W_0, tous les nombres W_n avec n pair se terminent par 10 comme $\varphi(\varphi(0)) = 010$. □

Proposition 5. *Chaque nombre commence par 0.*

Démonstration.

a) Cas de base : $W_0 = 0$.

b) Récurrence/Induction : Si W_k commence par 0, alors, comme $\varphi(0) = 01$ et que $W_{k+1} = \varphi(W_k)$, on voit que W_{k+1}commence également par 0. □

7 Conclusion et remerciements

Lors de cette année, nous avons étudié la suite W composée de nombres formés seulement de 0 et de 1 ainsi que la représentation graphique de ces nombres. Nous avons pu trouver beaucoup de propriétés relatives à ce sujet. Il a été déjà étudié par des mathématiciens, ces courbes portent le nom de fractales de Fibonacci et les nombres de la suite W celui de mots de Fibonacci.

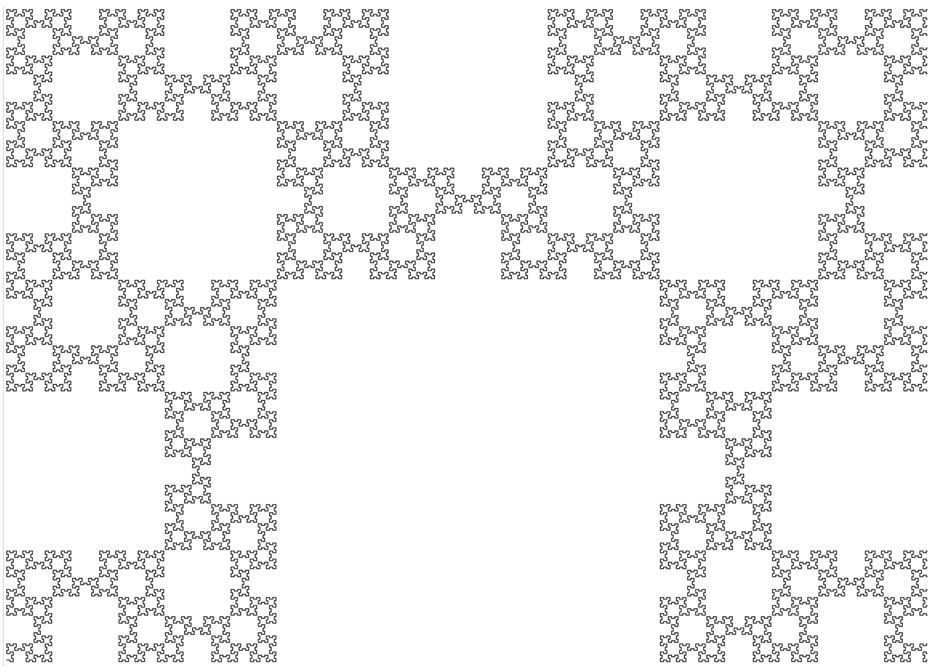
Ce travail est le fruit d'un partenariat entre le Collège Sainte-Véronique à Liège, Belgique et le Collège National de Iasi, Roumanie. Nous avons pu échanger nos résultats ensemble. Ce que nous vous avons présenté dans cet article est le fruit de notre collaboration. Nous avons communiqué tous nos résultats en anglais. Nous avons pu vivre cet échange grâce à Erasmus+ que nous tenons à remercier.

Nous remercions aussi nos professeurs du Collège Sainte-Véronique : Mme GERARD Sophie, Mme GURDAL Pascaline, M HANSEN Dylan, M KIRSH Sébastien, Mme LACROIX Anne, Mme LEBEL Céline et Mme SCHIERES Sandrine et du Collège national :Mrs ZANOSCHI Gabriela Elena qui nous ont aidés chaque semaine au cours de cette année. Nous aimerions aussi remercier Mme AERTS Stéphanie, Mme ERNST Marie, M LEROY Julien et Mme VANDERMEER Marion du Département de

Mathématique de l'Université de Liège et Dr VOLF Claudiu de l'Université de Iasi qui nous ont épaulés au cours de cette année et nous ont proposé ce sujet. Nous voudrions aussi remercier le relecteur anonyme qui a corrigé notre article.

Enfin nous tenons à remercier les membres du projet MATh.en.JEANS sans lequel rien de tout ceci n'aurait été possible.

Pour finir cet article en beauté, voici la courbe associée à W_{23} :



Ils sont fous ces romains !

Léopold de Condé et Rodolphe van Oldeneel

Élèves de 6e secondaire au
Collège Saint-Benoit de Maredsous

Avec l'aide de leur enseignant
Miguël Dhyne

et de la chercheuse Ève-Aline Dubois (UNamur)

Résumé : Dans cet article, les élèves présentent les chiffres romains ainsi que les règles de construction des nombres romains. Ils s'intéressent ensuite aux manipulations de base de ceux-ci via les opérations usuelles : addition, soustraction et multiplication. Leurs méthodes sont basées sur les notions de « chiffres dominants » et « chiffres inférieurs ». Les nombres décimaux, les exposants et les fractions sont également observés.

1 Introduction

Notre projet consistait à définir des règles d'opération avec les chiffres romains. Étant donné que les chiffres romains ont une écriture totalement différente de celle des chiffres arabes, cet article présent un nouveau système de calcul. Nous avons défini deux types de chiffres parmi les nombres romains : les inférieurs et les dominants. Les dominants représentent les chiffres utilisés comme valeur de référence, correspondant aux chiffres de base. Les inférieurs représentent les chiffres qui se soustraient du chiffre de référence, son chiffre dominant. Ils sont situés devant le chiffre dominant auquel ils se rapportent. Grâce à cette nouvelle technique, nous avons pu définir différentes méthodes en fonction des opérations, excepté pour la division qui reste une énigme à résoudre.

Cet article résumera brièvement quelques caractéristiques des chiffres romains. Ensuite, il abordera les méthodes que nous avons trouvées pour les différentes opérations. Enfin, une nouvelle notation sera introduite et concernera les chiffres décimaux.

2 La notation romaine

Contrairement aux chiffres arabes composés de 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9), les chiffres romains se composent de 7 chiffres (I, V, X, L, C, D et M). Le "I" correspond à "1", le "V" à correspond "5", le "X" correspond à "10", le "L" correspond à "50", le "C" correspond à "100", le "D" correspond à "500" et le "M" correspond à "1000".

Pour former des nombres romains, la règle de base consiste à simplement placer l'un à côté de l'autre les chiffres, ce qui correspond à une addition de ceux-ci.

Par exemple, 3 = 1+1+1. En chiffres romains, 1+1+1 correspond à "I+I+I" ce qui donne "III". 3 est donc un chiffre dans la notation arabe mais un nombre dans la notation romaine.

Seulement, une grande règle à ne pas négliger est que nous ne pouvons pas mettre plus de 3 mêmes chiffres romains l'un à la suite de l'autre. Ainsi nous allons nous référer à une autre règle qui consiste à placer devant un chiffre, un autre chiffre d'une valeur inférieure.

Exemple : Pour former 4, nous ne pouvons faire 1+1+1+1 car nous mettons plus de trois fois le même chiffre à la suite. Nous devons alors nous baser sur un chiffre d'une valeur supérieure : le 5. Pour former 4, nous devons soustraire 1 de 5 (5-1). En chiffres romains, cela correspond à "V - I", ce qui donne "IV".

Une autre complication des nombres romains est que certains peuvent s'écrire de façons différentes pour présenter une même valeur. Prenons par exemple le nombre 49 qui peut s'écrire « IC » ou encore « LXIX ». Nous avons donc décidé d'établir la règle que pour écrire un nombre de ce type là nous devrons l'écrire en passant par chaque unité. Nous devons donc écrire « 50 » telle que « LXIX ».

Voici ci-dessous un tableau reprenant les premiers nombres romains.

1	I	11	XI	30	XXX
2	II	12	XII	40	XL
3	III	13	XIII	50	L
4	IV	14	XIV	60	LX
5	V	15	XV	70	LXX
6	VI	16	XVI	80	LXXX
7	VII	17	XVII	90	XC
8	VIII	18	XVIII	100	C
9	IX	19	XIX	500	D
10	X	20	XX	1000	M

Le lecteur sera attentif au fait que certains nombres romains (exemple : VIII) sont des chiffres arabes (exemple : 8). L'article est donc écrit en « langage romain » sauf mention explicite.

3 Notre outil

Notre outil principal, avec lequel nous avons pu résoudre nos opérations, consiste à distinguer deux types de chiffres parmi les chiffres romains, les inférieurs et les dominants.

Les dominants sont les chiffres de base.

Les inférieurs sont les chiffres qui se situent devant un chiffre dominant d'une valeur plus élevée. Au contraire, s'il était placé devant un chiffre ayant une valeur moins élevée, il s'agirait de deux chiffres dominants. Pour lire le nombre, il faut établir une soustraction du chiffre inférieur de son chiffre dominant.

Dans le nombre "XL" correspond à 40, nous avons "X" (correspondant à 10) comme inférieur et "L" (correspondant à 50) comme dominant. Pour lire ce nombre romain, nous soustrayons le chiffre inférieur du chiffre dominant. Cela revient à faire "X" - "L", donc 50 - 10, ce qui donne 40. Si les chiffres étaient inversés, il s'agirait de deux chiffres dominants, ce qui changerait la lecture de ce nombre. "LX" correspondrait à "L" + "X", donc 50 + 10, ce qui donne 60.

Les chiffres dominants correspondent donc à une addition de chiffre.

Les chiffres inférieurs correspondent à une soustraction de chiffre.

4 Les opérations

Addition

Pour effectuer une addition de chiffres romains, il faut suivre la méthode suivante :

Tout d'abord, écrire les deux nombres à additionner, par exemple, 39 et 44 s'écrivant respectivement "XXXIX" et "XLIV". Ensuite, repérer les chiffres dominants et inférieurs. Il y a un inférieur dans le nombre 39 ("I") et deux inférieurs dans le nombre 44 ("X" et "I"). Les autres chiffres sont dominants. Notons en rouge les inférieurs et laissons en noir les dominants. L'étape suivante consiste à séparer les dominants et inférieurs en deux groupes distincts.

Le tableau illustre la façon de procéder.

Dominants	**Inférieurs**
XXX X L V	I X I

Par la suite, il faut simplifier (en gris) les éléments dominants avec les éléments inférieurs.

Dominants	Inférieurs
XXX X L V	I X I

Malheureusement, la simplification n'est pas toujours possible à faire complètement. Dans ce cas-là, il suffit de décomposer les éléments de telle manière à ce qu'on puisse de nouveau les simplifier avec les chiffres du domaine opposé. Dans cet exemple, il reste deux "I" à simplifier chez les inférieurs. Il faut donc prendre le chiffre se rapportant le plus au "II" chez les dominants : le "V". Décomposer le "V" en "IIIII" et grâce à cela nous pouvons enfin simplifier les "II" des inférieurs.

Pour finir, notons le chiffre obtenu dans l'ordre. Nous avons du "XXX", du "L" et du "III". La réponse finale est donc "LXXXIII". 39 et 44 font bel et bien 83.

Dominants	Inférieurs
XXX X L V	I X I
XXX X L IIIII	I X I
XXX X L III	I X

Soustraction

Pour effectuer une soustraction de chiffres romains, la méthode est la suivante.

Tout d'abord, écrivons les deux chiffres à soustraire, par exemple, 24 et 149 s'écrivant respectivement "XXIV" et "CXLIX". Ensuite, repérons les chiffres dominants et inférieurs. Nous avons un inférieur dans le nombre 24 ("I") et deux dans le nombre 149 ("X" et "I"). Les autres chiffres sont dominants. Nous notons en rouge les inférieurs et laissons en noir les dominants du premier nombre ("I" en rouge et "X", "X" et "V" en noir). Nous faisons le contraire pour le second nombre, c'est-à-dire que nous laissons en noir les chiffres inférieurs et notons en rouge les chiffres dominants ("X" et "I" en noir, "C", "L" et "X" en rouge).

L'étape suivante consiste à séparer les chiffres écrits en rouge et les chiffres écrits en noirs en deux groupes distincts. Nous le faisons ici sous forme de tableau. Les noirs correspondent aux positifs et les bleus aux négatifs, nous en verrons la raison plus tard.

Positifs	Négatifs
XX V et X I	I et C L X

Par la suite, nous devons simplifier (en gris) les éléments positifs (en noir) avec les éléments négatifs (en bleu).

Positifs	**Négatifs**
XX V et X I	I et C L X

Malheureusement, il n'est pas toujours possible de simplifier complètement les deux nombres. Dans ce cas-là, il suffit de décomposer les éléments de telle manière à ce que nous puissions de nouveau les simplifier avec les chiffres du domaine opposé. Dans cet exemple, nous voyons qu'il reste deux "X" et un "V" à simplifier chez les positifs. Nous prenons donc le chiffre se rapportant le plus aux "XX" et au "V" chez les négatifs : le "L". Nous décomposons le "L" en "XXXXX" et pouvons enfin simplifier les "XX" des inférieurs.

Positifs	**Négatifs**
XX V et X I	I et C L X
XX V	C XXXXX

Nous décomposons ensuite un "X" en "VV" pour simplifier le "V".

Positifs	**Négatifs**
XX V et X I	I et C L X
XX V	C XXXXX
XX V	C XX VV

Pour finir, notons le nombre obtenu dans l'ordre. S'il est dans la colonne des positifs, il s'agit d'une réponse positive. S'il est dans la colonne des négatifs, il s'agit d'une réponse négative. Nous avons du "C", du "XX" et du "V" dans la colonne des négatifs. La réponse finale est donc "-CXXV". 24 - 149 font bel et bien -125.

Multiplication

Pour effectuer une multiplication de nombres romains, il faut procéder de la façon suivante : Tout d'abord, écrivons les deux nombres à multiplier sous forme de calcul écrit, par exemple, 19 et 14 s'écrivant respectivement "XIX" et "XIV". Nous écrivons chaque chiffre dans une case différente.

$$\begin{array}{rl} & \text{XIX} \\ \times & \text{XIV} \end{array}$$

Ensuite, effectuons la multiplication comme celle des calculs écrits à l'exception de faire celle-ci en deux colonnes, l'une correspondra au dominant et l'autre aux inférieurs. Pour ce faire il suffit d'appliquer les formules suivantes (I = inférieur et D = dominant) :

$$I \times D = I \quad D \times D = D \quad I \times I = D$$

Les dominants sont notés à droite et les inférieurs sont notés à gauche. La lecture des tableaux suivants s'effectue de gauche à droite :

L	

L	X

L C	X

L C	X
	V

L C	X
I	V

L C	X
I	X V

L C	X
I	X V
L	

L C	X
I	X V
L	X

L C	X
I	X V
L C	X

Par la suite, réécrivons le résultat obtenu de chaque colonne en dessous de celles-ci. (Par facilité pour la suite du calcul, nous avons déjà décomposé un « L » en « XXXXX ».)

L C	X
I	X V
L C	X
CCL XXXX	XXXV
VVI	

De là, nous devons simplifier les éléments dominants avec les éléments inférieurs et décomposer si nécessaire.

L	C		X
I		X	V
L	C		X
CCL	XXXX	XXXV	
VVI			

Pour finir, réécrivons le chiffre obtenu dans l'ordre. S'il est dans la colonne des dominants, il s'agit d'une réponse positive. S'il est dans la colonne des inférieurs, il s'agit d'une réponse négative. Nous avons deux "C", un "L", un "X", un "V", un "I" chez les dominants. La réponse finale est donc "CCLXVI". 19 x 14 font bel et bien 266.

Division

Pour la division, nous n'avons malheureusement pas découvert de réelle méthode pour faciliter cette opération. Nos simples outils sont de décomposer le nombre et repérer le nombre de fois que le diviseur rentre dans celui-ci.

5 Les chiffres décimaux

Dans le cas des chiffres décimaux, nous avons inventé un nouveau système de notation. Une nouvelle difficulté nous est apparue car les nombres romains ne sont pas séparés en unité, dizaine, centaine,... Il faudra donc le faire par nous-même.

Pour écrire la virgule nous notons "|". Pour séparer chaque chiffre (tel un chiffre arabe mais s'écrivant parfois en nombre romain) après la virgule, nous plaçons entre ceux-ci un "•".

Par exemple, le chiffre arabe "6" est un nombre romain "VI".

Nous sommes obligés de bien séparer toutes les unités décimales par un "•" car sinon il y a un risque de confusion.

Par exemple "| I • V" correspond à 0,15. Si nous oublions le "•" cela deviendra " | IV" correspondant à 0,4.

Lorsqu'un chiffre décimal excède le "X", celui-ci passe au rang supérieur. Ce cas risque d'arriver dans le cadre des opérations.

Par exemple, " | IV • II • X" correspond à " | IV • III".
Ou encore, " | VII • I • CXLV" correspond à " | VIII • V • V".

Lorsque nous devons faire intervenir un "zéro" dans un calcul, celui-ci ne s'écrivant pas dans les chiffres romains, nous n'écrivons simplement rien et faisons abstraction de celui-ci. Si celui-ci intervient dans les chiffres décimaux, nous notons un deuxième "•". Si le zéro intervient à l'unité même avant un chiffre décimal, nous notons tout de suite la " |".

Par exemple, "0,59304" s'écrira " | V • IX • III • • IV".

6 Autres notations

6.1 Les exposants

Au sujet des exposants, nous nous sommes rendu compte que ceux-ci étaient une notation n'intervenant pas dans le type d'écriture d'un chiffre.

Ainsi, "trois exposant deux" revient à dire en chiffres romains "III exposant II".

Nous avons donc juste à réécrire un chiffre avec un exposant en plusieurs multiplications du terme.

Trois exposant deux revient à faire 3×3.
En chiffre romain, "III exposant II" revient à faire "III × III".

Il en est de même pour toutes les autres notations telles que les radicaux, logarithmes, matrices, etc.

Nous arrivons tout de même à la conclusion que l'utilisation des chiffres romains, surtout dans le cadre des notations ci-dessus, est plus compliquée et fastidieuse que l'utilisation des chiffres arabes.

6.2 Les fractions

Dans le cas de l'utilisation des fractions, il suffit d'appliquer la méthode de "multiplication par l'inverse". Cela nous rapporte donc à une multiplication par chiffres décimaux.

"2/5" donne "$2 \times 1/5$*" ("1/5" correspond à "0,2"). Donc, "*2×0.2*" donnent "0,4". En chiffres romains, "II/V" donne "II* $\times$ */ V" (" / V" correspond à " | II"). Donc," II* $\times$ *| II" donne " | IIII" s'écrivant " | IV".*

Cette méthode est par contre très restreinte car transformer une grande fraction en chiffre décimal n'est pas aisé.

Il est extrêmement compliquer de transformer "1/64161654681" en nombre décimal. Et encore plus lorsque cette fraction est sous forme de chiffres romains...

7 Conclusions

Pour résumer notre travail, nous avons réussi à inventer et mettre en pratique des moyens d'effectuer la plupart des opérations basiques apprises à l'école primaire et certaines du secondaire.

Nous devons presque l'entièreté de nos trouvailles à nos définitions de "dominant" et "inférieur". Cet outil nous a aidés à décortiquer les nombres romains. En effet, nous constatons que les "dominants" et "inférieurs" correspondent à de simples "+" et "-".

Par rapport à la multiplication, nous avons pris exemple sur le calcul écrit. Il faut donc séparer tous les chiffres et suivre toutes les étapes rigoureusement, car si une grande multiplication se présente, il y a beaucoup de chance de laisser passer une petite erreur. Il faut donc faire extrêmement attention. Par la suite, nous nous sommes rendus compte que nous pouvions aussi appliquer cette méthode de calcul écrit aux additions et soustractions, toujours avec l'aide des "dominants" et "inférieurs".

Concernant les chiffres décimaux, nous avons dû inventer tout un nouveau système de notation afin d'éviter toute confusion de compréhension. En effet, certains chiffres arabes deviennent un nombre sous forme romaine.

Nous avons ensuite remarqué que nous pouvions laisser telles quelles les autres notations, tels que exposant, radicaux, logarithmes, matrices, etc., car celles-ci n'affectent pas l'écriture des chiffres.

Au sujet de la division, nous n'avons trouvé aucune solution ou méthode pour faciliter l'opération. Une manière serait de faire appel à notre mental pour décomposer le nombre ou simplement calculer mentalement. Une autre manière serait d'utiliser la multiplication par chiffres décimaux.

Cette méthode a néanmoins ses limites car certaines fractions sont difficiles à traduire en nombre décimal.

En conclusion, nous remarquons que l'utilisation des chiffres romains et nettement plus fastidieuse que celle des chiffres arabes.

8 Remerciements

Nous souhaitons remercier Eve-Aline Dubois, chercheuse de l'Université de Namur, et Monsieur Dhyne, notre professeur de mathématiques, à qui nous devons cette expérience enrichissante.

9 Bonus

Lors d'une après-midi de recherche, ayant longtemps buté sur la division des chiffres romains, nous avons tout tenté. Grâce à cela, nous avons réussi à trouver une relation de fractions en chiffre romain. Cette relation s'applique grâce à la notation des chiffres romains. Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de développer la formule suivante pour qu'elle puisse s'appliquer à plus 3 chiffres différents comme dénominateur.

Soit ε, un chiffre ou nombre quelconque. Celui-ci est divisé par un nombre romain, appelé "diviseur". Après avoir établi les inférieurs et dominants du "diviseur", la relation suivante s'établie :

$$\frac{\varepsilon}{\text{diviseur}} = \frac{\varepsilon}{\text{grand chiffre}} \pm \frac{\varepsilon\ .\ \text{petit chiffre}}{\text{diviseur . grand chiffre}}$$

Avec "+" si le diviseur est un nombre avec un inférieur et avec un "-" si le diviseur est un nombre sans inférieur.

Le "grand chiffre" correspond au chiffre le plus grand, toujours dominant. Le "petit chiffre" correspond au chiffre le plus petit, inférieur dans certains cas. (Ici, les nombres tels que III sont considérés comme des chiffres.)

Exemple 1 :

$$\frac{300}{XV} = \frac{300}{X} - \frac{300.V}{XV.V} = 20$$

Exemple 2 :

$$\frac{256}{VIII} = \frac{256}{V} - \frac{256.III}{VIII.V} = 32$$

Exemple 3 :

$$\frac{256}{IV} = \frac{256}{V} + \frac{256.I}{IV.V} = 64$$

Cette relation complique peut être la fraction de base, mais elle nous montre un procédé intéressant concernant la décomposition d'un chiffre romain.

La magie des nombres

Julie CLOSTER, Mikala EISEN, Naomi SOLHEID et Lena THÉATO

Élèves de 4e et 5e secondaire au
Lycée classique de Diekirch

Avec l'aide de leurs enseignants
Carine Batholmé et Geneviève Harles

et du chercheur
Bruno Teheux (Université du Luxembourg).

Résumé : Dans cet article, on montre que derrière un tour de magie spectaculaire se cache en fait des mathématiques assez simples mais terriblement efficaces.

1 Présentation du sujet

Une magicienne veut faire un tour de magie. Pour cela elle choisit un spectateur qui a pour mission de faire certains calculs dans une table carrée contenant 25 nombres (voir figure ci-dessous). Or, avant même que le spectateur n'ait trouvé la solution, la magicienne a déjà la réponse au problème posé. Est-ce qu'il s'agit de magie ou tout simplement de mathématiques ?

Considérons une table carrée de 25 cases et montrons qu'il s'agit d'une table « magique ». À ce propos, préparons à l'avance une enveloppe fermée contenant le résultat à obtenir (ici : 51).

Voici les instructions données au spectateur :

— Choisir un nombre quelconque et l'encercler.

— Biffer ensuite tous les autres nombres se trouvant dans la même ligne et dans la même colonne que le nombre encerclé.

~~12~~	~~15~~	~~17~~	20	~~11~~
5	8	10	~~13~~	4
4	7	9	~~12~~	3
9	12	14	~~17~~	8
6	9	11	~~14~~	5

— Choisir ensuite un deuxième nombre et procéder de la même façon.

— Continuer ainsi jusqu'à ce que chaque nombre du carré soit biffé ou encerclé.

~~12~~	~~15~~	~~17~~	20	~~11~~
~~5~~	~~8~~	10	~~13~~	~~4~~
4	~~7~~	~~9~~	~~12~~	~~3~~
~~9~~	12	~~14~~	~~17~~	~~8~~
~~6~~	~~9~~	~~11~~	~~14~~	5

— Calculer la somme des nombres encerclés : $20+10+4+12+5=51$.
— Ouvrir l'enveloppe et lire le résultat qui est celui qu'on a obtenu précédemment comme somme. La table est donc bien « magique ».

2 Explications

Les mathématiques sont très utilisées dans la magie. Elles permettent de produire du spectaculaire quand elles sont maîtrisées et bien exploitées. Le résultat (i.e. la somme des nombres encerclés) a manifestement été prévisible dès le début, indépendamment des choix du spectateur. Voici les explications :

Pour se fixer les idées, on se propose de travailler uniquement dans l'ensemble des entiers relatifs. On remarque qu'entre deux colonnes, respectivement deux lignes, la différence entre tous les nombres pris 2 à 2 est toujours la même.

+2

8	10	7	12	14
13	15	12	17	19
14	16	13	18	20
6	8	5	10	12
11	13	10	15	17

+5

En nous basant sur cette constatation, le schéma suivant peut être proposé.

	A	B	C	D	E
F	A+F	B+F	C+F	D+F	E+F
G	A+G	B+G	C+G	D+G	E+G
H	A+H	B+H	C+H	D+H	E+H
I	A+I	B+I	C+I	D+I	E+I
J	A+J	B+J	C+J	D+J	E+J

Les nombres de la table ont été remplacés par des lettres, chaque nombre étant représenté par la somme de deux lettres, par exemple A+F. Remarquons que dans ce schéma, la première ligne et la première colonne ont été ajoutées. Dans la table magique, on ne les voit pas apparaître.

Pourquoi obtient-on toujours le même « nombre magique » ?

Si on encercle par exemple A+F, on biffe automatiquement tous les autres A et tous les autres F, et ainsi de suite.

	A	B	C	D	E
F	A+F	~~B+F~~	~~C+F~~	~~D+F~~	~~E+F~~
G	~~A+G~~	B+G	C+G	D+G	E+G
H	~~A+H~~	B+H	C+H	D+H	E+H
I	~~A+I~~	B+I	C+I	D+I	E+I
J	~~A+J~~	B+J	C+J	D+J	E+J

Donc le nombre magique est toujours la somme des 10 nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I et J. Peut-on aussi le montrer ? Bien sûr, en faisant la somme de la diagonale. On peut ainsi créer une table magique avec n'importe quels nombres réels (p.ex. des fractions, des racines carrées, ...).

Peut-on construire une table magique avec un nombre magique quelconque ?

Étant donné un nombre n, il existe une table dont le nombre magique est n.

Prenons par exemple $n = 35$. Il faut alors que

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I + J = 35.$$

Prenons par exemple

$$A = 5, B = 7, C = 2, D = 9, E = 6, F = 8, G = 3, H = -5, I = 1, J = -1.$$

Alors $5 + 7 + 2 + 9 + 6 + 8 + 3 - 5 + 1 - 1 = 35$.

	5	7	2	9	6
8	13	15	10	17	14
3	8	10	5	12	9
-5	0	2	-3	4	1
1	6	8	3	10	7
-1	4	6	1	8	5

→

13	15	10	17	14
8	10	5	12	9
0	2	-3	4	1
6	8	3	10	7
4	6	1	8	5

Remarquons que cette table n'est pas unique, et que l'on aurait obtenu une autre table si on avait pris d'autres nombres pour A jusqu'à J.

Cas particulier : table contenant les nombres naturels consécutifs

La table magique avec des entiers naturels consécutifs existe. En effet :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

$\rightarrow$

	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
6	6	7	8	9	10
11	11	12	13	14	15
16	16	17	18	19	20
21	21	22	23	24	25

Dans ce cas, le nombre magique serait $0+1+2+3+4+1+6+11+16+21=65$.

Y a-t-il un moyen de calculer le nombre magique d'une table magique carrée $n \times n$ des premiers nombres consécutifs sans encercler et biffer ?

Nous avons conjecturé que la formule pour calculer le nombre magique d'une table carrée $n \times n$ des premiers nombres consécutifs est la suivante.

$$\boxed{\underline{\textbf{Formule :}}\ S = \tfrac{1}{2}(n^3+n)}$$

Nous avons vérifié que la formule est vraie pour $1 \leq n \leq 8$. Par exemple, si $n=5$, on a :

$$S = \frac{1}{2}(5^3+5) = \frac{1}{2} \cdot 130 = 65.$$

3 Conclusion

Le sujet nous a permis d'avoir un petit aperçu de la magie des nombres. Nous avons trouvé un moyen de construire une table magique avec n'importe quels nombres réels et, pour un nombre réel donné, nous avons découvert qu'on peut construire une table magique ayant ce nombre comme nombre magique. Une étape pour le futur serait de démontrer la formule conjecturée pour le cas particulier des tables magiques des premiers nombres entiers consécutifs.

Le carré de i est égal à -1

Santiago Le Jeune, Adrien Petit, Martin de Mahieu, Frederic de Cartier et Rodrigue David

Élèves de 6e secondaire au
Collège Saint-Benoît de Maredsous

Avec l'aide de leur enseignant
Miguël Dhyne

et de la chercheuse
Eve-Aline Dubois (UNamur).

Résumé : Dans cet article, les élèves ont travaillé sans le savoir sur les nombres complexes et sur les quaternions. Au départ, les élèves construisent les règles d'opérations pour les nombres complexes et les quaternions. Ces règles leur permettent notamment de trouver une construction géométrique des différentes opérations sur les complexes ainsi que la propriété de non commutativité du produit pour les quaternions. Dans un second temps, les élèves construisent les coefficients du triangle de Pascal à partir des puissances d'une somme. Ils utilisent cette observation et les propriétés des nombres complexes pour exprimer les solutions d'une équation du second degré lorsque le discriminant est négatif.

$i^2 = -1$

L'objectif de notre travail consiste en l'étude d'un nombre i dont le carré est égal à -1. La suite de l'hypothèse disait que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, où i, j et k sont donc des nombres. Ces nombres ne respectent pas les opérations mathématiques qui s'appliquent aux réels. Puisque pour tout nombre $n \in \mathbb{R}$, $n^2 \in \mathbb{R}^+$.

L'intérêt de ce travail est d'établir des règles d'opération à ces nombres n'appartenant pas à l'ensemble des réels. Avec ces règles d'opération on peut résoudre des problèmes considérés comme impossibles, tels que celui des racines paires de nombres négatifs.

Trouver une valeur à i

Le premier objectif que l'on s'est fixé a été d'attribuer une valeur à i qui nous semblait être un nombre si étrange, mais, nous avons conclu que i n'était pas égal à un nombre réel. En effet, on en déduit de l'égalité $i^2 = -1$ que $i = \pm\sqrt{-1}$. Puis ensuite avec la formule $ijk = -1$, nous avons déduit que $\pm\sqrt{-1}$ devait être égal à -1.

Logiquement i^2 devrait alors être égal à ± 1, mais en admettant cela, on déduit que i ne peut qu'être nul. Ce qui est différent de l'énoncé de base car $0^2 \neq -1$.

$$i^2 = -1$$
$$i = \pm\sqrt{-1}$$
$$\text{Or, } i \times j \times k = -1 \text{ donc } \pm\sqrt{-1} \times \pm\sqrt{-1} \times \pm\sqrt{-1} = +\sqrt{-1} \text{ ou } -\sqrt{-1}$$
$$\text{Donc } \pm\sqrt{-1} = -1\,?$$
$$\text{Avec le nombre } i : \pm\sqrt{-1} = \pm i$$
$$\text{Donc } \pm i = i^2\,?$$
$$\text{La seule possibilité serait que } i = 0, \text{ mais } i^2 = -1 \text{ et } 0^2 \neq -1$$

En conclusion, i n'a pas de valeur réelle car les deux affirmations précédentes se contredisent.

Notation des nombres avec i

Le i n'est donc pas un nombre réel, il faut l'accepter comme il est et ainsi on peut établir de nouvelles lois mathématiques tenant compte de ce nombre i si particulier.

Finalement nous avons déduit que ces nombres s'écrivent en deux parties. Si on additionne un nombre réel au nombre i, non réel, on n'obtient pas un nombre appartenant aux réels. De plus, si on multiplie le nombre i par un réel, on n'obtient pas un nombre réel non plus. Toute multiplication de i par un réel ou addition de réels au nombre i donne un nombre n'appartenant pas aux réels. Ces nombres contenant i ont donc une partie réelle et une partie imaginaire c'est-à-dire qu'ils sont notés sous la forme « $a+ib$ » où « a » est la partie réelle et « b » la partie imaginaire du nombre, toujours accompagnée d'un « i » avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Règles d'opération avec $i^2 = -1$

L'addition et la soustraction

L'addition et la soustraction s'établissent assez facilement car elles s'obtiennent respectivement en additionnant ou en soustrayant les parties réelles et imaginaires entre elles. Elles ne confondent pas la partie la réelle et la partie non réelle des nombres utilisés, c'est-à-dire que nous avons tout simplement deux additions et deux soustractions différentes et bien distinctes comme le montrent ces exemples :

Addition :

$$\begin{aligned}(2+i)+(5+4i) &= (2+5)+(i+4i)\\ &= (7+5i)\end{aligned}$$

En toute généralité, pour l'addition :
$(ai+b)+(ci+d) = (a+c)\times i+(b+d)$

Soustraction

$$\begin{aligned}(2+i)-(5+4i) &= (2-5)+(i-4i)\\ &= (-3-3i)\end{aligned}$$

En toute généralité, pour la soustraction :
$(ai+b)-(ci+d) = (a-c)\times i+(b-d)$

Multiplication

La multiplication s'effectue en deux temps. Dans un premier temps, on réalise une double distributivité. Dans un deuxième temps, il faut remplacer les nombres tels que $i^2 = -1$, puis effectuer les opérations entre parties réelles et celles entre parties imaginaires.

Exemple :

$$\begin{gathered} (2+3i) \times (3+4i) \\ 6+8i+9i+12i^2 \\ 6+17i-12 \\ 17i-6 \end{gathered}$$

En général :

$$\begin{gathered} (a+bi) \times (c+di) \\ (a \times c - b \times d) + (a \times d + b \times c)i \end{gathered}$$

Division

On suit le même principe que pour la multiplication. On commence par développer en séparant les réels des non réels, en utilisant les produits remarquables pour n'avoir que des réels ou des imaginaires élevés au carré au dénominateur. Par la suite on transforme les (i^2) en « -1 » et on simplifie.

Un exemple :

$$\begin{gathered} \frac{2+3i}{3+4i} \\ \frac{2+3i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} \\ \frac{18+i}{9-16i^2} \\ \frac{18+i}{25} \end{gathered}$$

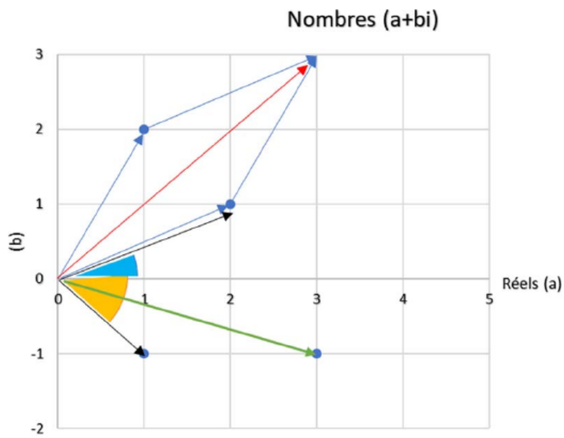
En général :

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a \times c + b \times d) + (b \times c - a \times d)i}{c^2+d^2}.$$

Représentation sur le plan

La forme d'écriture « $a + bi$ » de ces nombres nous a fait penser aux composantes d'un vecteur dans un plan. Les deux parties différentes, étant séparées, nous ont fait penser à des coordonnées x, y d'un vecteur mais avec a et b comme valeurs pour ces coordonnées. Nous avons construit alors un plan avec un axe pour les nombres sans « i » et un axe pour les nombres avec « i ».

Nous avons pu observer des propriétés géométriques pour les opérations sur les nombres « $a + bi$ ».



Addition dans le plan

L'addition de deux nombres $(a + bi)$ et $(c + di)$ donne graphiquement l'addition vectorielle des deux vecteurs $(a; b)$ et $(c; d)$ pour donner le vecteur résultant $(a + c; b + d)$. Cette opération est représentée par la flèche rouge dans le graphique ci-dessus.

Multiplication dans le plan

Nous avons déterminé que la multiplication de deux complexes donnait un autre nombre avec une norme qui valait le produit des normes des deux nombres de départ. La norme, étant la distance qui sépare un point donné de l'origine $(0, 0)$ dans le plan peut se calculer grâce à la formule de Pythagore.

$$\begin{aligned}
Norme\ de\ (a+ib) &= Norme\ de\ (a;b) = \sqrt{a^2+b^2}\\
Norme\ de\ (c+id) &= Norme\ de\ (c;d) = \sqrt{c^2+d^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+ib)\times(c+id) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\\
\|(a+ib)\times(c+id)\| &= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\
&= \sqrt{a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2}\\
&= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\\
&= \sqrt{(a^2+b^2)\times c^2+(a^2+b^2)\times d^2}\\
&= \sqrt{(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)}\\
&= \sqrt{(a^2+b^2)}\times\sqrt{(c^2+d^2)}
\end{aligned}$$

Nous avons pu observer graphiquement que le vecteur formé par chaque nombre dans le plan forme un angle avec l'axe des réels à l'origine $(0,0)$. La multiplication de deux nombres $(a+bi)$ et $(c+di)$ donne $(ac-bd)+(ad+bc)i$ et forme un angle avec l'axe des réels à l'origine $(0,0)$ qui vaut la somme des deux angles formés de la même manière par $(a+bi)$ et $(c+di)$.

La multiplication de deux nombres donne un nombre avec une norme qui vaut le produit des normes des deux nombres et avec un angle avec l'axe des réels à l'origine qui vaut la somme des deux angles formés de la même manière des deux nombres.

Ces deux propriétés de la multiplication sont représentées par la flèche verte dans l'exemple sur le graphique ci-dessus.

Règles d'opération avec $i^2 = j^{=}k^2 = ijk = -1$

Avec les nombres i, j et k, à la place d'avoir une partie réelle et une partie non réelle, nous avons une partie réelle et 3 parties non réelles. C'est donc un nombre du type : $a+bi+cj+dk$.

L'addition

L'addition Pour trouver une formule générale pour la somme de tels nombres, nous avons tout d'abord travaillé avec des exemples, tels que :

$$\begin{aligned}
&(2+3i+4j+3k)+(3+4i+2j+4k)\\
=&(2+3)+(3i+4i)+(4j+2j)+(3k+4k)\\
=&(5)+(7i)+(6j)+(7k)
\end{aligned}$$

Puis nous avons généralisé :

$$\begin{aligned}
&(a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk)\\
=&(a+e)+(bi+fi)+(cj+gj)+(dk+hk)\\
=&(a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k
\end{aligned}$$

La différence

Pour la différence, nous avons travaillé exactement de la même manière que pour la somme.

$$\begin{aligned}
&(2+3i+4j+3k)-(3+4i+2j+4k)\\
=&(2-3)+(3i-4i)+(4j-2j)+(3k-4k)\\
=&-1-i+2j-k
\end{aligned}$$

En général :

$$\begin{aligned}
&(a+bi+cj+dk)-(e+fi+gj+hk)\\
=&(a-e)+(bi-fi)+(cj-gj)+(dk-hk)\\
=&(a-e)+(b-f)i+(c-g)j+(d-h)k
\end{aligned}$$

La commutativité

Nous avons observé grâce à une démonstration assez simple que $ij = k$. Voici cette démonstration :

$$\begin{aligned} ijk &= -1 \\ ij &= \frac{-1}{k} \\ ij &= \frac{k^2}{k} \\ ij &= k \end{aligned}$$

Nous avons découvert que la multiplication n'était pas commutative, en effet : Si $ij = k$, alors $jk = i$ et $ki = j$ (il suffit de diviser par i ou j à la place de k). Or, on observe que $ij = k$, mais $ji = -k$. En voici la démonstration :

$$\begin{aligned} i &= jk \\ ji &= j^2k \\ ji &= -k \end{aligned}$$

Donc $ij \neq ji$. Cela nous a beaucoup servi pour développer les règles de multiplication et de division.

La multiplication

En ce qui concerne la multiplication de deux nombres : $(a + bi + cj + dk) \times (e + fi + gj + hk)$, nous avons déduit qu'il suffisait d'appliquer la distributivité tout en tenant compte de la non commutativité et que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

$$\begin{aligned} &(a + bi + cj + dk) \times (e + fi + gj + hk) \\ &= ae + afi + agj + ahk + bei + bfi^2 + bgij + bhik \\ &\quad + cej + cfji + cgj^2 + chjk + dek + dfki + dgkj + dhk^2 \\ &= ae - bf - cg - dh + afi + agj + ahk + bei + cej + dek \\ &\quad + bgk - bhj - cfk + chi + dfj - dgi \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i \\ &\quad + (ag + ce - bh + df)j + (ah + de + bg - cf)k \end{aligned}$$

La division

Mettons tout d'abord en évidence un produit remarquable des nombres du type « $a + bi + cj + dk$ », cela nous sera utile pour établir la division de deux de ces nombres.

$$\begin{aligned} &(a + bi + cj + dk) \times (a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 - abi - acj - adk + abi - b^2i^2 - bcij - bdik \\ &\quad + acj - bcji - c^2j^2 - cdjk + adk - bdki - cdkj - d^2k^2 \end{aligned}$$

Sachant que $ij = k$, $ji = -k$ $ik = -j$, $ki = j$, $jk = i$ et $kj = -i$, nous arrivons à :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bck + bdj + bck - cdi - bdj + cdi = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

En appliquant cette propriété à la division on a :

$$\begin{aligned} &\frac{a + bi + cj + dk}{e + fi + gj + hk} \times \frac{e - fi - gj - hk}{e - fi - gj - hk} \\ &= \frac{(ae + bf + cg + dh) + (be - af - ch + dg)i}{e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \\ &\quad + \frac{(ce - ag + bh - df)j + (de - ah - bg + cf)k}{e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \end{aligned}$$

Les produits remarquables

Comme ces nombres sont sous la forme $(a + bi)$, lorsqu'on l'a élevée au carré, il suffisait d'appliquer le produit remarquable soit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Soit pour $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2$, on sait que $i^2 = -1$ et ainsi

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Nous avons répété l'opération et développé les calculs jusqu'à $(a + b)^4$ afin de trouver une logique à appliquer à $(a + b)^n$. Il a fallu trouver une logique pour les exposants de a et b ainsi que les coefficients devant chaque terme.

Pour les exposants, la logique était assez évidente et facilement trouvable en développant les différentes puissances de $(a+b)^n$ de 0 jusqu'à 4. Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a^1b^0 + a^0b^1 \\
(a+b)^2 &= a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4
\end{aligned}
$$

On peut voir facilement que l'exposant de a passe de la valeur de n à 0 alors que l'exposant de b passe de 0 à n et que la somme des exposants vaut toujours n.

Pour ce qui est des coefficients, ce fût plus compliqué à trouver. Au départ, on s'est rendu compte que le premier et le dernier coefficient vaut toujours 1 et le deuxième et l'avant dernier vaut toujours n, de plus les coefficients se répètent toujours deux fois sauf si le nombre de termes est impair alors ils se répètent mais sont séparés par une valeur au milieu.

Pour trouver la logique derrière les coefficients du centre, il a fallu aller plus loin. On a placé les coefficients en forme de triangle comme suit :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Ainsi on peut observer que chaque nombre est égal à la somme des deux valeurs au-dessus d'elle. À partir de là, on a formalisé et découvert que :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k! \times (n-k)!} \right) a^{(n-k)} \cdot b^k.$$

En effet, on peut désormais l'appliquer aux complexes en prenant en compte l'exposant.

Si, pour $k \in \mathbb{N}_0$,

— $k = 4n$, $b \in \mathbb{R}$ et ne change pas de signe ;

— $k = 4n - 2$, $b \in \mathbb{R}$ et change de signe ;

— $k = 4n - 3$, $b \notin \mathbb{R}$ et ne change pas de signe ;

— $k = 4n - 1$, $b \notin \mathbb{R}$ et change de signe.

L'application au second degré

On sait désormais que grâce à de tels nombres, nous pouvons calculer la racine carrée d'un nombre négatif. Dès lors, on s'est demandé s'il était possible de trouver une solution aux équations du second degré dont le discriminant est négatif.

Prenons comme exemple l'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$

$$\rho = 4 - 8 = -4$$

Donc, on a deux solutions : $\frac{-b+\sqrt{\rho}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\rho}}{2a}$.

Si on applique cela à notre exemple, on trouve

$$\frac{-2+\sqrt{-4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-2-\sqrt{-4}}{2}$$

Mais on sait que $-4 = 4.(-1)$ et $-1 = i^2$. Donc $-4 = 4i^2$.

On remplace dans les solutions et on trouve

$$X_1 = \frac{-2+\sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$
$$X_2 = \frac{-2-\sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

Et donc en général, toute équation du second degré, ayant un discriminant $\rho \neq 0$, admet deux solutions :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}.$$

Conclusion

En conclusion, nous avons pu appliquer les opérations des réels que nous connaissions à des nombres inconnus. Cela a ouvert nos possibilités de calcul car nous avons adhéré à quelque chose qui nous semblait au départ impossible soit $i^2 = -1$.

Ces nombres du type $(a + ib)$ nous ont permis de trouver des solutions à des problèmes qui nous semblaient être impossible au départ, tel que des racines à une équation du second degré à discriminant $\rho < 0$.

Nous avons également élargi notre champ de connaissance grâce aux nombres j et k. Cependant, de nombreuses propriétés sur ces nombres nous sont encore inconnues, telles que leur représentation sur un plan.

Nous remercions les universités de Namur et de Liège pour leur soutien ainsi que les professeurs Dhyne et Dubois pour leur aide. Nous remercions également le département de mathématiques de Nancy pour nous avoir accueillis pour notre présentation ainsi que tous les organisateurs du projet Math en Jeans.

Le jeu Dobble

Thelma Lambert, Victoria Lopez, Valentin Van Raes et Matteo Ruth

Élèves de 5[e] et 6[e] secondaire à
l'Athénée royal Charles Rogier Liège 1

Avec l'aide de leurs enseignants
Yvan Haine et Eveline Moitroux

et des chercheurs
Kevin Balhan et Laurent De Rudder (ULiège)

Résumé : Dobble se joue avec des cartes sur lesquelles sont représentées des symboles. Chaque carte a un unique symbole en commun avec n'importe quelle autre carte du jeu. Dans cet article, les élèves s'intéressent à la construction d'un tel jeu de cartes, étant donné un nombre de symboles par carte. Dans un premier temps, ils proposent une représentation du jeu sous forme de graphe. Cette représentation leur permet d'énoncer deux conjectures. Ces conjectures sont ensuite étudiées à l'aide d'une représentation basée sur l'arithmétique modulaire et la géométrie projective.

1 Introduction

1.1 Jeu

Le Dobble est un jeu de société qui se joue avec des cartes. Celles-ci contiennent toutes le même nombre de symboles choisis de sorte qu'il y ait toujours un unique symbole en commun entre deux cartes quelconques. De plus, un même symbole ne peut appartenir qu'à une seule paire de cartes. Le jeu se déroule de la façon suivante : on distribue les cartes face cachée aux joueurs et on en place une au centre. Au signal, les joueurs retournent leur carte et tentent de retrouver le symbole commun entre celle-ci et celle placée au milieu. Le but du jeu étant de le retrouver en premier.

1.2 Problèmes

Nous avons tenté de répondre aux trois questions suivantes :
Soit n le nombre de symboles par carte,

- Quel est le nombre maximal k de cartes ?
- Quel est alors le nombre total de symboles différents ?
- Comment construire le jeu ?

2 Phase de recherche

2.1 Cas triviaux

Nous avons commencé par représenter le jeu sous forme de graphe. Nous représentions les cartes par des ronds et les symboles par des lettres de couleurs. Nous représentions donc chaque lien par une droite de la couleur de la lettre en commun. Ainsi nous avons directement fait deux constatations

— Peu importe le nombre de cartes, elles pourraient toutes avoir le même symbole en commun. Mais ce ne serait pas très ludique puisqu'on saurait quel est le symbole commun, ce qui n'est pas très intéressant.

— Avec deux symboles par carte ($n = 2$), on obtient au maximum trois cartes contenant toutes 2 symboles. Il y a 3 symboles au total.

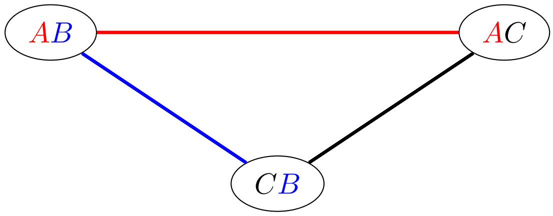
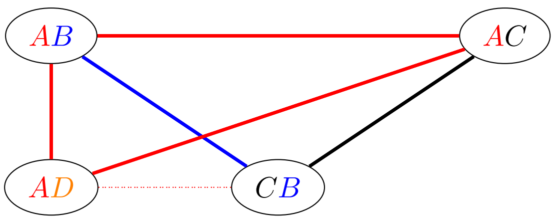


Figure 1 – Représentation graphique avec 2 symboles par carte

Par exemple, avec les symboles A, B et C, on construit les cartes AB, AC et BC, qui ont chacune une lettre en commun avec les deux autres.

Si on rajoute un quatrième symbole D pour faire une quatrième carte AD, on voit que celle-ci a le symbole A en commun avec AB et AC, mais il n'y a aucun symbole commun entre BC et AD.



2.2 Conjecture 1

Le jeu contient 55 cartes, sur chacune d'elle apparaissent 8 symboles et il y a 57 symboles en tout.
En jouant avec ces nombres, nous avons obtenu une formule intuitivement :

$$k = n(n-1) + 1$$

où n est le nombre de symboles par carte et k est le nombre total de symboles.

2.3 Représentation graphique

Pour faciliter notre démonstration et avoir les idées plus claires de cette représentation, nous avons commencé par l'appliquer à un jeu comptant 3 symboles par cartes. Nous obtenions bien 7 symboles (qui est aussi la valeur de k dans notre formule lorsqu'on remplace n par 3) et 7 cartes en tout. Cette méthode nous a permis de distinguer le nombre de liens entre chacune des cartes et le nombre de liens total.

- Cartes = ronds ;
- Symboles = lettres de couleurs ;
- Symbole commun à deux cartes = droite de la couleur du symbole commun et reliant ces deux cartes

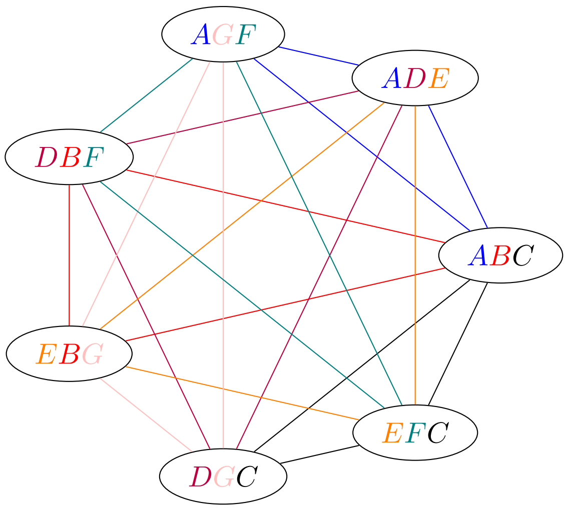


Figure 2 – Représentation graphique d'un jeu à n=3 (symboles/carte) et k=7 (cartes et symboles)

Cependant, dès qu'on augmentait le nombre de symboles par carte pour passer à 4 par exemple, le graphe devenait fort désorganisé et on n'y distinguait plus grand-chose. Avec 4 symboles par cartes, on a obtenu 13 cartes et 13 symboles différents.

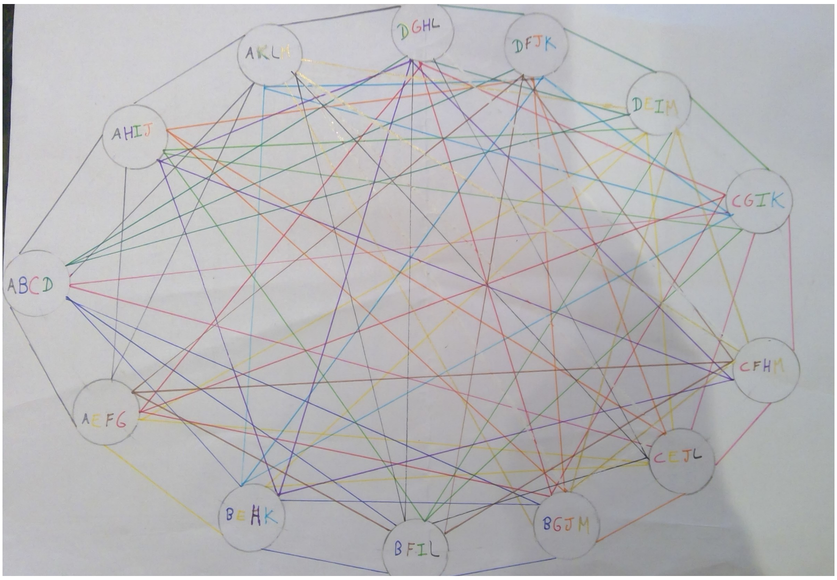


Figure 3 – Représentation graphiques pour n=4 (symboles/carte) et k = 13 (cartes et symboles)

2.4 Conjecture 2

Le nombre total de symboles est égal au nombre de cartes différentes possibles :

$$k = n(n-1) + 1.$$

3 Représentation géométrique

Nous sommes donc passés à une représentation géométrique. Elle se construit à l'inverse de la représentation graphique étant donné que nous repésentons ici les symboles par des points, les cartes par des droites et donc le symbole commun à deux cartes par le point d'intersection des deux droites correspondantes. Ici, les cartes sont représentées par des droites, les symboles par des points et donc les symboles communs par les points d'intersection des droites.

Le défi consiste donc à tracer toutes les droites possibles de façon à ce que chacune passe exactement par n points et que deux quelconques

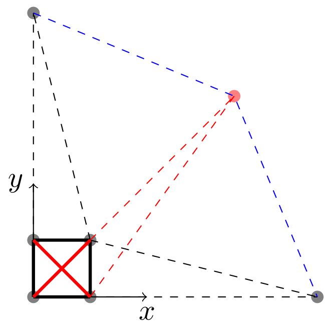


FIGURE 4 – Représentation géométrique dans le cas $n = 3$

d'entre elles soient sécantes.

Nous avons repris notre cas de base avec 3 symboles par carte. Dans un repère orthonormé, nous avons commencé par tracer les points aux points de coordonnées entières dans $[0, n-2]$. Dans le cas où $n = 3$, cela revient à tracer les points aux 4 sommets d'un carré de $n-1$ points de côté. Ensuite, nous avons tracé deux droites parallèles à l'axe Y. Puisque chaque droite représente une carte et que chaque carte doit avoir un symbole commun avec chaque autre carte, il doit toujours y avoir une intersection entre une droite et chacune des autres droites. C'est pour cela que nous avons créé un point d'intersection à l'infini entre ces deux parallèles.
Nous avons ensuite tracé deux droites parallèles à l'axe X ainsi que leur point d'intersection à l'infini, puis les deux diagonales du carré. Notons bien que ces diagonales sont deux droites parallèles (car là où "elles se croisent", il n'y a pas de point) et leur point d'intersection est donc à l'infini (point en haut à droite).
Ainsi, nous avons ainsi obtenu 6 droites. Il nous en fallait une septième qu'on a tracée de façon à ce qu'elle relie les 3 points d'intersection à l'infini.

Comme nous avions complètement modifié la géométrie classique, nous étions un peu perdus et nous avons décidé d'essayer cette représentation avec un nombre de symboles par carte n plus élevé. Nous avons commencé par $n = 5$. On comptait alors 16 points à coordonnées entières dans $[0, n-$

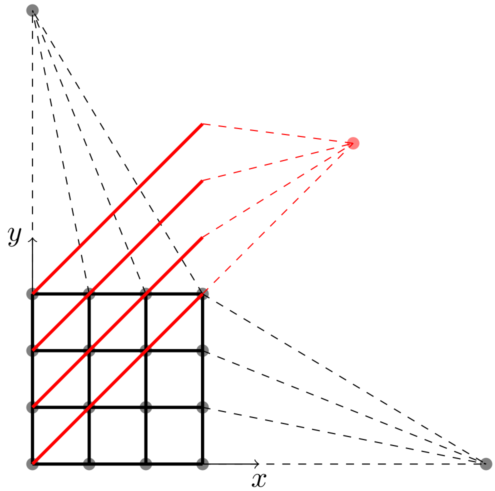


Figure 5 – Difficultés à représenter le cas $n = 4$ en géométrie finie

2], formant un carré de 4 points de côté. Comme précédemment, nous avons tracé les droites parallèles à l'axe Y, ici au nombre de 4, et leur point d'intersection à l'infini. Nous avons fait de même avec les parallèles à l'axe X et avec les obliques de vecteur directeur $(1; 1)$. Cependant, ces obliques "sortaient" du carré 4×4. Nous avons alors cherché un moyen d'y reporter les points extérieurs. Pour ce faire, nous avons utilisé le calcul modulo.

4 Calcul modulo

Commençons par rappeler brièvement ce qu'est le calcul modulo dans le cadre algébrique.
Si a et n sont deux entiers ($n \neq 0$), a modulo n est le reste de la division de a par n. On le note $a \bmod n$.

Par exemple :

- 11 mod 2 = 1 car 11 divisé par 2 donne un quotient de 5 et un reste de 1.
- 9 mod 3 = 0 car 9 est divisible par 3 et a donc un reste nul.

Parmi les propriétés du calcul modulo, citons

$$a \bmod n = (a + kn) \bmod n, \forall k \in \mathbb{Z}$$

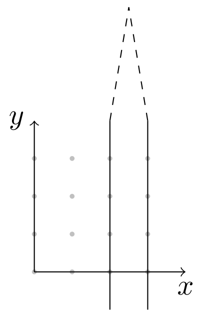
Par exemple :

- 7 mod 3 = 1
- (7+3) mod 3 = 1
- (7-3) mod 3 = 1
- (7+(4×3)) mod 3 = 1
- (7-(3×3)) mod 3 = 1

5 Géométrie projective finie

5.1 Eléments de base

- Repère orthonormé
- Nombre fini de points disposés dans un carré de $n - 1$ points de côté (n étant le nombre de symboles par carte), d'où l'utilité de l'algèbre modulaire. En effet, toute coordonnée supérieur à $n - 1$ est remplacée par son équivalent modulo n.
- Deux droites parallèles ont un point d'intersection à l'infini
- Une droite possède donc $(n - 1) + 1$ points



5.2 Lien avec le problème

Rappelons que

- Symboles = points
- Cartes = droites

Dans un carré de 4 points de côté, les cartes possèdent 5 symboles.

6 Solution

Nous cherchons donc à prouver qu'il est possible de créer un jeu comptant $n(n-1)+1$ cartes et symboles. En géométrie projective finie, ceci revient à prouver qu'il est possible de construire $n(n-1)+1$ cartes et points à partir du carré de $(n-1)^2$ points de côté et en associant à chaque direction un point à l'infini.

6.1 Cas optimal : $n-1$ premier

Nous avons réussi à démontrer notre conjecture dans le cas où $n-1$ est un nombre premier.

Hypothèses

n symboles/carte

$n-1$ premier

Thèses

$n(n-1)+1$ symboles différents, c'est-à-dire points

$n(n-1)+1$ cartes, c'est-à-dire droites

Nombre de symboles

Occupons-nous d'abord de démontrer la conjecture relative au nombre de symboles.

Pour ce faire, transformons la thèse en géométrie finie. Il nous faut $n(n-1)+1$ points. Nous avons déjà à disposition les $(n-1)^2$ points du carré délimitant la géométrie finie que l'on peut donc soustraire du nombre de points que nous cherchons à construire. Il nous manque donc

$$\begin{aligned} n(n-1)+1-(n-1)^2 &= n^2-n+1-(n^2-2n+1) \\ &= n \end{aligned}$$

points à l'infini, c'est-à-dire n directions.

Cherchons alors combien de directions au maximum il est possible de créer en géométrie modulaire.
Il existe :

- les droites verticales, c'est-à-dire de vecteur directeur $(0;1)$ qui constituent une direction
- les droites horizontales, c'est-à-dire de vecteur directeur $(1;0)$ qui constituent une deuxième direction
- les droites obliques, c'est-à-dire de vecteur directeur $(1;m)$ (c'est-à-dire d'équation : $y=mx$) où $\boxed{m \in \mathbb{N} \text{ tq } 0 < m < n-1}$ qui constituent $n-2$ directions puisque m peut prendre $n-2$ valeurs.

Au total, nous avons donc bien n directions pour autant que la condition sur $0 < m < n-1$ soit vérifiée.
Or toutes les autres valeurs entières de m sont à rejeter puisque

- Si $m=0$ ou $m=k(n-1)$, $y=mx$ est confondue avec $y=0$.
- Si $m<0$, $y=mx$ est confondue avec $y=[m-k(n-1)]x$ où $k \in \mathbb{Z}_0$
  Voici un exemple pour vous aider à visualiser.

  Modulo 3 : $y=-x$ confondue avec $y=(-1+3)x=2x$

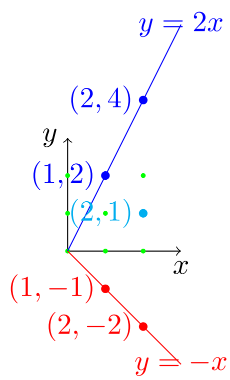


Figure 6 – Deux droites confondues $y = -x$ et $y = 2x$ car passant par des points dont les coordonnées sont égales modulo 3

- Si $m > n-1$, $y = mx$ est également confondue avec $y = [m-k(n-1)]x$ où $k \in \mathbb{Z}_0$

  Modulo 3 : $y = 5x$ confondue avec $y = (5-3)x = 2x$

Il nous faut encore démontrer que toutes les droites de toutes les directions ont un unique point commun. Cela parait logique concernant les droites horizontales et verticales et il reste donc les droites obliques.
La droite $y = mx$ ne peut être confondue (avoir deux points d'intersection distincts)

— ni avec la droite $y = 0$
— ni avec la droite $y = m'x$ $(m' \neq m)$

Comme toutes les droites d'équation $y = mx$ passent par $(0;0)$, cela revient à dire qu'elles ne peuvent pas

— passer par $(x;0)$ si $x \neq 0$ (elles auraient 2 points communs avec $y = 0$)
  Cette configuration est possible que si et seulement si

$$mx = k(n-1) \Leftrightarrow m = k'(n-1) \text{ ou } x = k''(n-1) \; (k, k', k'' \in \mathbb{Z}_0)$$

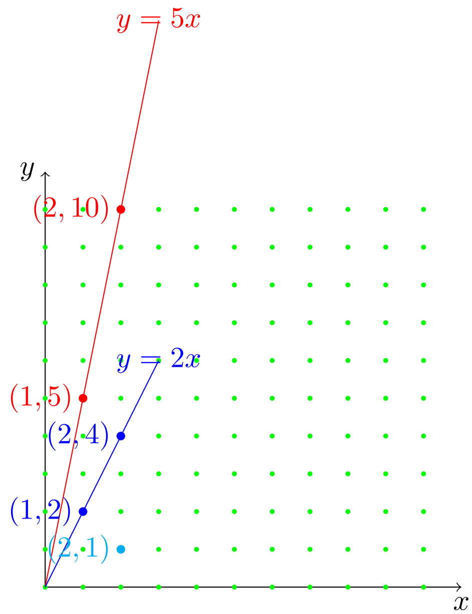


FIGURE 7 – Deux droites confondues $y = 5x$ et $y = 2x$ car passant par des points dont les coordonnées sont égales modulo 3

car $n - 1$ est premier et un produit n'est multiple d'un nombre premier que si au moins un des facteurs est multiple de ce nombre premier.
Or, ni m ni x ne peuvent être multiples de $n-1$ puisqu'ils sont tous les deux strictement positifs et inférieurs à $n - 1$.

— avoir d'autres points communs entre elles.
Ce cas se présente si et seulement si

$$\begin{aligned} mx - m'x = k(n-1) \quad &\Leftrightarrow (m - m')x = k(n-1) \\ &\Leftrightarrow m - m' = k'(n-1) \text{ ou } x = k''(n-1) \\ &(k, k', k'' \in \mathbb{Z}_0) \end{aligned}$$

pour la même raison que ci-dessus.
Or, $m - m'$ ne peut être multiple de $n - 1$ puisque m et m' sont

strictement positifs et inférieurs à $n-1$ donc leur différence est, en valeur absolue, strictement inférieure à $n-1$.

Au final, m peut prendre exactement $n-2$ valeurs, ce qui donne $n-2$ directions obliques et donc n directions au total (en ajoutant les droites horizonales et verticales).

Nombre de cartes

Etant donnés les points (symboles), on peut construire $n(n-1)+1$ droites passant par n de ces points.

Occupons-nous maintenant de la conjecture relative au nombre de cartes.
Pour ce faire, interprétons la thèse en géométrie modulaire.

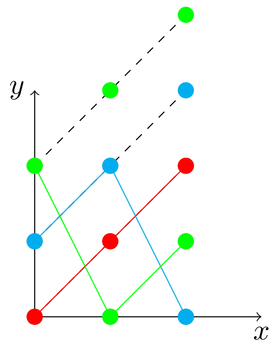
Il nous faut $n(n-1)+1$ droites. Nous savons qu'il existe une droite "à l'infini" que nous allons soutraire. De plus, il a été démontré qu'il est possible de créer n directions. Nous devons donc prouver qu'il est possible de créer

$$\frac{n(n-1)+1-1}{n} = n-1$$

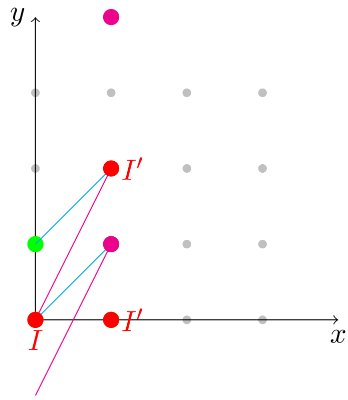
droites par direction.

Chaque direction est caractérisée par le coefficient directeur m de ses droites tandis que, au sein d'une même direction, le terme indépendant p différencie les droites de même coefficient directeur.
Envisageons deux cas :

— Soit un m fixé.
  Toutes les droites d'équation $y = mx + p$ sont parallèles.
  Le terme indépendant p est tel que $0 \leq p < n-1$ et peut donc prendre $n-1$ valeurs.
  Chacun des $(n-1)^2$ points du carré appartient donc à une et une seule droite d'équation $y = mx+p$ où m est fixé. On l'illustre à l'aide de l'exemple ci-dessous dans lequel que les 9 points appartiennent chacun à une seule droite.



— Pour tous m et m' différents, nous savons que les droites d'équation $y = mx$ et $y = m'x$ n'ont qu'un point d'intersection.
Sur le dessin ci-dessous, il est appelé I.
Puisque les droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p$ leur sont respectivement parallèles, il vient qu'elles ont également un unique point d'intersection.
Sur le dessin ci-dessous, il est appelé I'.



Conclusion

Nous pouvons enfin conclure le cas où $n - 1$ est un nombre premier. En géométrie modulaire, nous avons démontré que lorsque chaque droite passe par n points, le modèle complet compte $n(n-1)+1$ droites et $n(n-1)+1$ points. De plus, puisqu'il y a n directions et que tous les points appartiennent à une droite de chaque direction, chaque point est

utilisé n fois.
Pour le jeu, cela revient à dire que lorsque chaque carte présente n symboles, le jeu complet compte $n(n-1)+1$ cartes et $n(n-1)+1$ symboles différents. De plus, chaque symbole apparait n fois au total.
Ce cas est bien le cas optimal car il serait impossible qu'un symbole apparaisse plus de n fois, à moins que ce soit le symbole commun à toutes les cartes. En effet, il faudrait alors qu'une carte ait un symbole commun avec plus de n autres cartes, sans utiliser l'unique symbole que celles-ci ont en commun. Cela nécessite que la carte compte plus de n symboles, ce qui n'est pas permis.
Nous terminons ce cas par quelques exemples :

Nb de symboles/carte	Nb de cartes	Nb de symboles
n	$n(n-1)+1$	$(n-1)+1$
3	7	7
4	13	13
6	31	31
8	57	57
14	183	183

6.2 Cas non-optimaux

Dans le cas où $n-1$ n'est pas un nombre premier, nous avons réussi à démontrer un nombre de cartes inférieur à $n(n-1)+1$, même si ce nombre ne nous parait pas optimal.

$n-1$ pair

Lorsque $n-1$ est un nombre pair différent de 2 (qui est un nombre premier), nous savons qu'il est toujours possible de créer 3 directions :

- les droites horizontales (équation : $y=p$)
- les droites verticales (équation : $x=p$)
- les droites obliques de vecteur directeur $(1;1)$ (c'est-à-dire d'équation : $y=x+p$)

Le nombre minimal de cartes est égal à

$$3(n-1)=3n-3$$

et le nombre minimal de symboles à

$$(n-1)^2 + 3 = n^2 - 2n + 4.$$

Si $n = 5$, nous sommes sûrs que cette méthode n'est pas optimale car une méthode longue et ennuyeuse a permis de créer le jeu complet, c'est-à-dire avec $n(n-1)+1$ cartes et symboles.

A nouveau, quelques exemples qui illustrent ce cas :

Nb symboles/carte	Nb de cartes	Nb de symboles
n	$3n-3$	n^2-2n+4
5	12	19
7	18	39
9	24	67

6.3 $n-1$ impair

Lorsque $n-1$ est un nombre impair non-premier (et donc supérieur à 5), nous savons qu'il est toujours possible de créer 4 directions :

- les droites horizontales (équation : $y = p$)
- les droites verticales (équation : $x = p$)
- les droites obliques de vecteur directeur $(1; 1)$ (c'est-à-dire d'équation : $y = x + p$)
- droites obliques de vecteur directeur $(1; 2)$ (c'est-à-dire d'équation : $y = 2x + p$) En effet, la droite $y = 2x$ n'a qu'un point d'intersection avec $y = 0$ et avec $y = x$.
  Pour tout $x \leq \dfrac{n-2}{2}$, l'ordonnée sera $2x \leq n-1$, c'est-à-dire paire.
  De plus, pour tout $x > \dfrac{n-2}{2}$, l'ordonnée sera supérieure à $n-1$ et donc égale à $2x-(n-1)$ c'est-à-dire impaire.
  Cela implique que la droite n'a qu'un point d'intersection avec $y = 0$ puisque $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $2x-(n-1) \neq 0$. En outre, elle n'a qu'un point d'intersection avec $y = x$ car $2x = x \Leftrightarrow x = 0$ et $2x-(n-1) \neq x \Leftrightarrow x = n-1$ (impossible puisque $x < n-1$)

Le nombre minimal de cartes est égal à

$$4(n-1) = 4n-4$$

et le nombre minimal de symboles à

$$(n-1)^2 + 4 = n^2 - 2n + 5.$$

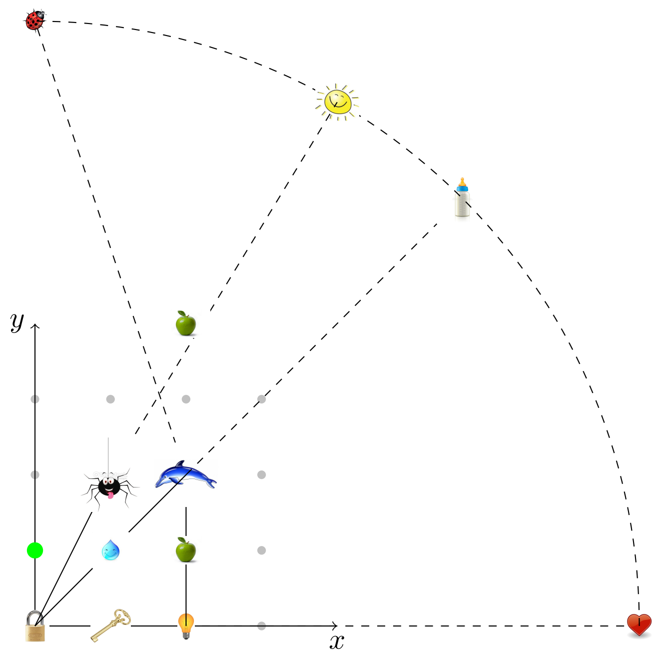
A nouveau, quelques exemples qui illustrent ce cas :

Nb symboles/carte	Nb de cartes	Nb de symboles
n	$4n-4$	n^2-2n+5
10	36	85
16	60	229

6.4 Conclusion

Nous pouvons enfin répondre aux trois questions que nous nous posions au début de cet article.

- **Quel est le nombre maximal de cartes ?**
  Il peut au maximum y avoir $n(n-1)+1$ cartes. Nous pensons que ce jeu existe toujours et l'avons démontré dans le cas où $n-1$ est premier. S'il ne l'est pas, des cas non-optimaux ont été prouvés.
- **Quel est alors le nombre total de symboles différents ?**
  Nous avons démontré le nombre total de symboles différents associé au nombre de cartes dans les différents cas.
- **Comment construire le jeu ?**
  Grâce à la géométrie finie, il est possible de créer le jeu en associant à chaque point un symbole puis en considérant chaque droite comme une carte.
  Dans l'exemple ci-dessous, les cartes présentent 4 symboles. Pour trouver la carte associée à chaque droite, il suffit de regarder les points par lesquels elle passe en géométrie finie (au besoin en utilisant l'algèbre modulaire) et d'ajouter le point à l'infini. Exception pour la droite à l'infini pour laquelle il suffit de prendre les n points à l'infini.



y
x

Permutations de chiffres

Augustin CRESPIN, Jeremy MASSAMBA,
Philippe TEVOEDJRE et Louise TRAVERSIN

Élèves de 5e secondaire au
Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais à Liège.

Avec l'aide de leur enseignant
Julien Jeunechamps

et des chercheurs
Céline Esser et Julien Raskin (ULiège)

Résumé : Dans cet article, les auteurs travaillent sur l'écriture en base 2, 3 et 10 de différents nombres. Le problème se formule comme suit : deux dieux jumeaux sont nés dans l'Olympe, Bin et Ter. Étant dieux, ils ont des pouvoirs spéciaux. Bin calcule dans la base 2 et Ter dans la base 3. Ils jouent en appliquant des permutations circulaires sur les chiffres des nombres. Les deux dieux préfèrent quand les nombres diminuent. Différentes questions en découlent : quels sont les nombres qui peuvent être transformés en 1 par les jumeaux ? Existe-t-il des nombres qui peuvent devenir arbitrairement grands ?
Dans l'article, après une première approche expérimentale, les élèves démontrent, par l'absurde que tous les nombres peuvent atteindre la valeur minimale 1 après diverses opérations de Bin et Ter. Lors de leurs développements, les élèves sont notamment arrivés à la célèbre conjecture de Catalan de 1844 (démontrée en 2002). Ils conjecturent ensuite que tous les nombres ne peuvent pas grandir indéfiniment à l'aide des opération Bin et Ter. Pour conclure, les élèves proposent des pistes d'ouverture à savoir le changement de base des deux dieux initiaux ou la présence d'un troisième dieu associé à une autre base.

1 Position du problème

Des dieux jumeaux sont nés dans l'Olympe, on les nomme Bin et Ter. Bin calcule dans la base 2 et Ter dans la base 3. Ces dieux ont un pouvoir spécial, ils appliquent des permutation(s) circulaire(s) [5] sur les chiffres des nombres dans le but de les faire diminuer.

Par exemple [6],

$$\begin{aligned}111101_{(2)} &\xrightarrow[\text{Bin}]{} 111110_{(2)}\\ 102102_{(3)} &\xrightarrow[\text{Ter}]{} 210210_{(3)}\end{aligned}$$

Les deux dieux jouent en alternance.

Ainsi,

$$\begin{aligned}7_{(10)} = 21_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 12_{(3)} = 5_{(10)} = 101_{(2)}&\\ \xrightarrow[\text{Bin}]{} 011_{(2)} = 11_{(2)} = 3_{(10)} = 10_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 1_{(3)} = 1_{(10)}&\end{aligned}$$

2 Rappels relatifs aux bases

En base 10, on utilise 10 chiffres 0, 1, ..., 9 et on développe les nombres selon les puissances de 10 :

$$\begin{aligned}8602_{(10)} &= 8.1000 + 6.100 + 0.10 + 2.1\\ &= 8.10^3 + 6.10^2 + 0.10^1 + 2.10^0.\end{aligned}$$

En binaire (ou en base 2), on utilise 2 chiffres 0, 1 et on développe selon les puissances de 2 :

$$11010_{(2)} = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^1.$$

5. Par exemple, les permutations circulaires de ABCD sont BCDA, CDAB, DABC. Parmi les permutations circulaires de ABCDE, on compte DEABC, CDEAB, EABCD, BCDEA, ...

6. L'indice (2) indiquera un nombre écrit en binaire, (3) en ternaire et (10) en décimal.

En ternaire (ou en base 3), on utilise 3 chiffres 0, 1, 2 et on développe selon les puissances de 3 :

$$21012_{(3)} = 2.3^4 + 1.3^3 + 0.3^2 + 1.3^1 + 2.3^0.$$

Dans toute base, un zéro en première place d'un nombre n'est pas significatif et doit donc être supprimé. Par exemple, $0123 = 123$.

2.1 Conversion d'un nombre binaire en nombre décimal

Prenons en binaire le nombre $a = 10010111$ contenant 8 chiffres (0 ou 1) et dressons le tableau suivant en commençant à la puissance 7 de 2 ($7 = 8 - 1$).

	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		
	128	64	32	16	8	4	2	1	
	$\Downarrow$			$\Downarrow$		$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
a en binaire	1	0	0	1	0	1	1	1	
	128			$+16$		$+ 4$	$+ 2$	$+ 1$	$= 151$

Ainsi, 10010111 en base 2 s'écrit 151 en base 10 : $10010111_{(2)} = 151_{(10)}$.

2.2 Conversion d'un nombre ternaire en nombre décimal

Prenons en ternaire le nombre 120201 contenant 6 chiffres (0 ou 1 ou 2) et dressons le tableau suivant en commençant à la puissance 5 de 3 ($5 = 6 - 1$).

	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		
	243	81	27	9	3	1	
	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$	
a en ternaire	1	2	0	2	0	1	
	243	$+2 \times 81$		$+2 \times 9$		$+ 1$	$= 424$

Ainsi 120201 en base 3 s'écrit 424 en base 10 : $120201_{(3)} = 424_{(10)}$.

2.3 Conversion d'un nombre décimal en nombre binaire

Considérons en base 10 le nombre 151.

En faisant défiler les puissances de 2, on constate que $128 < 151 < 256$ ou encore $2^7 < 151 < 2^8$. On dresse alors le tableau suivant :

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1	0	0	1	0	1	1	1

$$\left.\begin{array}{r} 151 - 128 = 23 \\ 23 - 16 = 7 \\ 7 - 4 = 3 \\ 3 - 2 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{ en retirant chaque fois du nombre restant la plus haute puissance possible de 2.}$$

Donc, $151_{(10)} = 10010111_{(2)}$.

2.4 Conversion d'un nombre décimal en nombre ternaire

Considérons en base 10 le nombre 424.

En faisant défiler les puissances de 3, on constate que $81 < 424 < 729$ ou encore $3^4 < 424 < 3^5$. On dresse alors le tableau suivant :

3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
729	243	81	27	9	3	1
	1	2	0	2	0	1

$$\left.\begin{array}{r} 424 - 243 = 181 \\ 181 - 81 = 100 \\ 100 - 81 = 19 \\ 19 - 9 = 10 \\ 10 - 9 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{ en ôtant chaque fois du nombre restant la plus haute puissance possible de 3.}$$

Donc, $424_{(10)} = 120201_{(3)}$.

3 Première approche expérimentale

En travaillant sur différents nombres, on a constaté qu'ils arrivaient tous à 1.

Ainsi

$$\begin{aligned}
29_{(10)} &= 1002_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 0021_{(3)} = 21_{(3)} = 7_{(10)} = 111_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin inopérant}]{} 7_{(10)} \\
7_{(10)} &= 21_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 12_{(3)} = 5_{(10)} = 101_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 011_{(2)} = 11_{(2)} \\
11_{(2)} &= 3_{(10)} = 10_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 1_{(3)} = 1_{(10)}
\end{aligned}$$

De même pour 424 : en commençant par le ternaire

$$\begin{aligned}
424_{(10)} &= 120201_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 011202_{(3)} = 11202_{(3)} = 128_{(10)} = 2^7_{(10)} \\
2^7_{(10)} &= 10000000_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 00000001_{(2)} = 1_{(2)} = 1_{(10)}
\end{aligned}$$

et en commençant par le binaire

$$\begin{aligned}
424_{(10)} &= 110101000_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 000110101_{(2)} = 110101_{(2)} = 53_{(10)} \\
53_{(10)} &= 1222_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter inopérant}]{} 53_{(10)} \\
53_{(10)} &= 110101_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 010111_{(2)} = 10111_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 01111_{(2)} = 15_{(10)} \\
15_{(10)} &= 120_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 12_{(3)} = 5_{(10)} = 101_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 11_{(2)} = 3_{(10)} \\
3_{(10)} &= 10_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 1_{(3)} = 1_{(10)}.
\end{aligned}$$

On constate qu'on arrive bien à 1, que parfois les dieux sont inefficaces, qu'un même dieu peut permuter plusieurs fois d'affilée (ce qui revient à faire une permutation circulaire de plus d'un chiffre) et qu'il n'est pas obligé de faire la permutation circulaire la plus efficace.

4 Un théorème d'impossibilité

Principe de la démonstration

Quand un nombre arrive chez Bin en binaire, par permutation(s), Bin pourra toujours le faire diminuer ou le laisser égal à lui-même. De même, quand un nombre arrive chez Ter en ternaire, par permutation(s), Ter pourra toujours le faire diminuer ou le laisser égal à lui-même.

On finira donc par aboutir à 1 sauf si un même nombre ne diminue ni en binaire ni en ternaire.

On va prouver que de tels nombres n'existent pas, ce qui démontre que tous les nombres finiront à 1.

Dans la suite, nous noterons le même nombre a sous la forme $a_{(3)}$ s'il est écrit en ternaire, $a_{(2)}$ s'il est écrit en binaire et $a_{(10)}$ pour son écriture décimale.

Nombres ne diminuant pas en binaire

Si un nombre contient un 0, il pourra toujours diminuer strictement par permutation(s) circulaire(s) en plaçant le 0 à la première place :

$$1110_{(2)} = 0111_{(2)}.$$

Le seul cas de non diminution est celui des nombres ne contenant pas de 0 donc composés uniquement de 1. Transformons en base 10 les nombres composés uniquement de 1 en binaire.

Si

$$a_{(2)} = (\underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ fois}})_{(2)},$$

alors

$$\begin{aligned} a_{(10)} &= 1.2^{r-1} + 1.2^{r-2} + \cdots + 1.2^1 + 1.2^0 \\ &= 2^{r-1} + 2^{r-2} + \cdots + 2^1 + 1 \\ &= \boxed{(2^r - 1)_{(10)}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (11111)_{(2)} &= 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 \\ &= 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ &= 31 = (2^5 - 1)_{(10)}. \end{aligned}$$

Nombres ne diminuant pas en ternaire

Comme ci-dessus, si un nombre contient un 0, il pourra toujours diminuer strictement par permutation(s) circulaire(s). Les seuls cas de non-diminution sont les nombres ne contenant pas de 0 donc composés uniquement de 1 OU uniquement de 2 OU certains composés de 1 ou de 2 (ils seront caractérisés plus tard).

a. Nombres composés uniquement de 2 en ternaire

Si

$$a_{(3)} = (\underbrace{2 \cdots 2}_{q \text{ fois}})_{(3)},$$

alors

$$\begin{aligned} a_{(10)} &= 2.3^{q-1} + 2.3^{q-2} + \cdots + 2.3^1 + 2.3^0 \\ &= 2(3q - 1 + 3^{q-2} + \cdots + 3^1 + 1) \\ &= 2\frac{3^q - 1}{3 - 1} \quad \text{(cf. annexe)} \\ &= \boxed{(3^q - 1)_{(10)}} \end{aligned}$$

Bin ne pourrait pas faire diminuer le nombre a si

$$a_{(2)} = (\underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ fois}})_{(2)} = \boxed{(2^r - 1)_{(10)}}$$

donc si $a_{(10)} = 3^q - 1 = 2^r - 1$ ou $3^q = 2^r$, ce qui est impossible car 3^q est impair et 2^r est pair.

b. Nombres composés uniquement de 1 en ternaire

Si

$$a_{(3)} = (\underbrace{1 \cdots 1}_{q \text{ fois}})_{(3)},$$

alors

$$\begin{aligned} a_{(10)} &= 1.3^{q-1} + 1.3^{q-2} + \cdots + 1.3^{1} + 1.3^{0} \\ &= 3q - 1 + 3^{q-2} + \cdots + 3^{1} + 1 \\ &= \frac{3^{q} - 1}{3 - 1} \quad \text{(cf. annexe)} \\ &= \boxed{\left(\frac{3^{q} - 1}{2}\right)_{(10)}} \end{aligned}$$

Bin ne pourrait pas faire diminuer le nombre a si

$$a_{(2)} = (\underbrace{1 \cdots 1}_{r \text{ fois}})_{(2)} = \boxed{(2^{r} - 1)_{(10)}}$$

donc si $\frac{3^{q}-1}{2} = 2^{r} - 1$, soit $3^{q} = 2^{r+1} - 1$, ce qui est impossible par la conjecture (1844) devenue enfin théorème de Catalan[7] en 2002, soit 58 années de recherche, qui énonce que

« Les deux seules puissances d'entiers consécutives sont 8 et 9. »

Comme

$$8_{(10)} = 2^{3}_{(10)} = 1000_{(2)} \xrightarrow[\text{Bin}]{} 0001_{(2)} = 1_{(10)}$$

et

$$9_{(10)} = 3^{2}_{(10)} = 100_{(3)} \xrightarrow[\text{Ter}]{} 001_{(3)} = 1_{(10)},$$

le processus de diminution ne s'arrêtera effectivement pas.

7. Eugène Charles Catalan (1814–1894), franco-belge, professeur d'analyse à l'ULiège dès 1865.

c. Nombres composés uniquement de 1 et de 2 en ternaire

Si ces nombres se terminent par 1, Ter peut les diminuer par une permutation circulaire amenant 2 à la place de 1 : $1221 \underset{\text{Ter}}{\longrightarrow} 1122$.

Les nombres composés de 1 et de 2 et ne diminuant pas se terminent donc par 2. Si $a_{(3)}$ est un mélange non diminuable de q chiffres 1 ou 2 et si $b_{q-1}, \ldots, b_1$ sont 1 ou 2, alors

$$a_{(3)} = \left(b_{q-1}.3^{q-1} + b_{q-2}.3^{q-2} + \cdots + b_1.3^1 + 2.3^0\right)_{(10)}.$$

Comme avant, Bin ne pourrait pas faire diminuer le nombre a si

$$b_{q-1}.3^{q-1} + b_{q-2}.3^{q-2} + \cdots + b_1.3^1 + 2 = 2^r - 1,$$

soit

$$b_{q-1}.3^{q-1} + b_{q-2}.3^{q-2} + \cdots + b_1.3^1 + 3 = 2^r.$$

Le membre de gauche est un multiple de 3, c'est-à-dire $3k$ avec k entier, et on aurait

$$3.k = 2^r, \text{ ou encore } k = \frac{2^r}{3}$$

et k ne serait plus un nombre entier.

5 Les arbitrairement grands

On nous a aussi posé la question de savoir si, par le même processus de changements de bases et de permutation(s), tous les nombres pouvaient grandir indéfiniment. Non, car

$$5_{(10)} = 101_{(2)} \underset{\text{Bin}}{\longrightarrow} 110_{(2)} = 6_{(10)} = 20_{(3)},$$
$$5_{(10)} = 12_{(3)} \underset{\text{Ter}}{\longrightarrow} 21_{(3)} = 7_{(10)} = 111_{(2)}$$

et on constate que 5 ne grandit pas, que l'on commence en binaire ou en ternaire. Nous n'avons pas eu le temps de vérifier s'il existait des nombres qui pourraient croître indéfiniment.

6 Annexe

On sait que

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= (x-1)(x+1)\\x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)\\x^4 - 1 &= (x-1)(x^3+x^2+x+1),\end{aligned}$$

ce qui se généralise en

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1).$$

Cette formule peut se démontrer en utilisant la grille de Hörner. On l'utilisera sous la forme

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

7 Ouverture

L'expérience a été enrichissante et pourrait être prolongée par exemple en prenant d'autres bases que 2 et 3 (on a soupçonné qu'elles devraient être premières entre elles) ou en introduisant un troisième dieu ...

Nous tenons à remercier l'organisation MATh.en.JEANS car sans elle, rien ne se ferait, l'ULiège et ses 2 assistants, Céline Esser et Julien Raskin et l'association des Anciens Elèves de notre collège qui est intervenue financièrement dans notre déplacement au congrès de Nancy.

Propagation du virus

Louis Gauthy et Adrien Kellens

Élèves de 6e secondaire au
Collège Sainte-Véronique

Avec l'aide de leurs enseignants
Sébastien Kirsch, Anne Lacroix et Sandrine Schieres

et des chercheurs
Stépanie Aerts, Marie Ernst, Marion Vandermeer et
Julien Leroy (ULiège)

Résumé : Une population d'humains est contaminée par un virus agressif. Un individu sain rencontrant un individu malade a une chance sur six d'être contaminé. Dans cet article, les auteurs étudient la propagation d'un tel virus dans le cas où les individus sont alignés. Plus précisément, ils parviennent à calculer la probabilité que k personnes soient contaminées après r rencontres pour tous k et r. Les techniques utilisées sont les probabilités et l'analyse combinatoire, en particulier le triangle de Pascal. Enfin, les auteurs suggèrent comme suite possible de ce travail d'étudier le cas d'une propagation en deux dimensions.

1 Présentation du sujet

Le sujet de recherche était le suivant : un malade portant un virus a une chance sur six de contaminer ses voisins. Ces voisins sont disposés soit en une dimension (en ligne) ou en deux dimensions. Notre but est de comprendre comment la maladie se propage et ainsi de dire après combien de rencontres un groupe de personnes est sûr d'avoir attrapé la maladie.

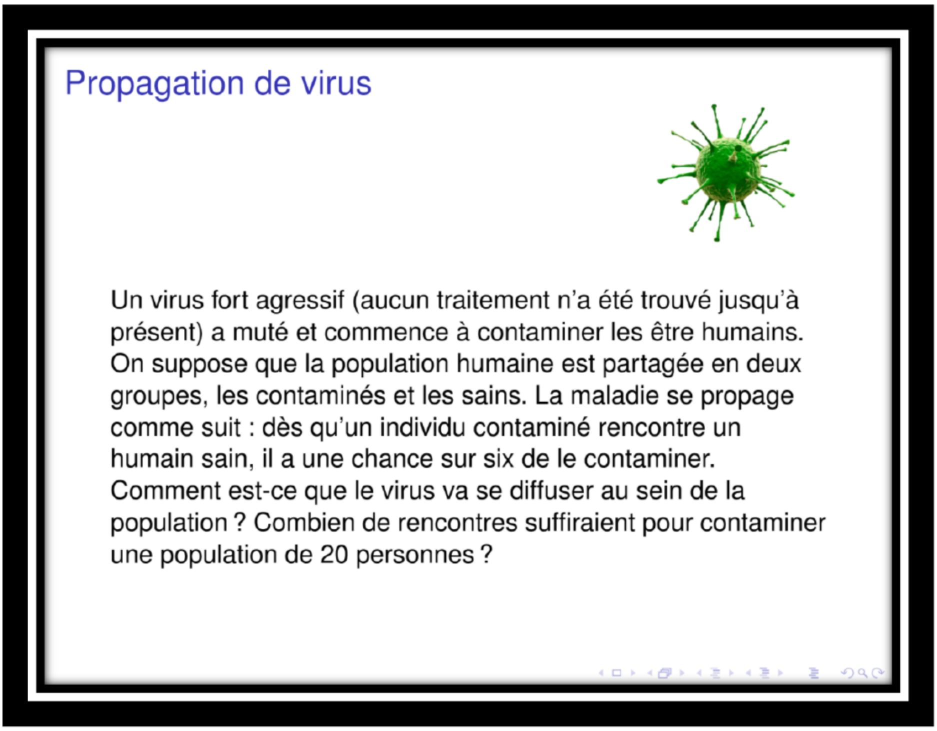


Figure 8 – Présentation PowerPoint de la propagation du virus

2 Annonce des résultats obtenus

A travers nos recherches, nous avons pu modéliser de deux façons différentes une maladie qui se propage dans une chaine de personnes saines au cours du temps.

Nous avons d'abord envisagé une première méthode, qui s'est finalement avérée erronée.

C'est pourquoi nous retiendrons seulement la deuxième, qui est correcte. En effet cette dernière tient compte de notions de statistiques et d'analyse combinatoire que nous avons assimilées pour cet effet. Nous avons réussi à tirer de cette modélisation une méthode qui permet de la généraliser. Cette méthode permet de calculer la probabilité qu'au moins une personne soit contaminée en plus du premier malade, à n'importe quel moment. Cette méthode se fait en deux étapes :

1. Calculer les probabilités de chaque cas grâce au triangle de Pascal.
2. Additionner ces probabilités.

3 Théorie envisagée

Nous avons d'abord commencé par représenter les deux exemples qui nous étaient fournis dans l'explication.

3.1 Première approche (limitée)

Propagation en ligne

En regardant d'abord la représentation en ligne, nous avons représenté chaque vague de contamination par une couleur. La première ligne (noire) représente la première rencontre : les voisins directs du malade ont une chance sur six d'être contaminés, les voisins des voisins directs ont une chance sur six d'être contaminés par la chance sur six des voisins directs du malade, et ainsi de suite à l'infini (représenté en gras). La deuxième vague (deuxième rencontre) est représentée en bleu : les voisins directs du malade ont une chance en plus d'être contaminés ($\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$) comme indiqué à la table 1. Les voisins des voisins directs ont désormais une chance d'être contaminé vu que les voisins directs ont potentiellement attrapé la maladie. Ils auront donc une chance sur six d'être contaminé ($\frac{1}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$). La table 1 ci-dessous représente cette propagation.

			$\cdot\frac{1}{6}$		$\cdot\frac{1}{6}$				
0	0	0	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	
		$\cdot\frac{1}{6}$	$\cdot\frac{2}{6}$		$\cdot\frac{2}{6}$	$\cdot\frac{1}{6}$			$+\frac{1}{6}$
0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	0	0	
	$\cdot\frac{1}{6}$	$\cdot\frac{2}{6}$	$\cdot\frac{3}{6}$		$\cdot\frac{3}{6}$	$\cdot\frac{2}{6}$	$\cdot\frac{1}{6}$		$+\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	0	
$\cdot\frac{1}{6}$	$\cdot\frac{2}{6}$	$\cdot\frac{3}{6}$	$\cdot\frac{4}{6}$		$\cdot\frac{4}{6}$	$\cdot\frac{3}{6}$	$\cdot\frac{2}{6}$	$\cdot\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$
$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{54}$	
$\cdot\frac{2}{6}$	$\cdot\frac{3}{6}$	$\cdot\frac{4}{6}$	$\cdot\frac{5}{6}$		$\cdot\frac{5}{6}$	$\cdot\frac{4}{6}$	$\cdot\frac{3}{6}$	$\cdot\frac{2}{6}$	$+\frac{1}{6}$
$\frac{5}{54}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{54}$	
$\cdot\frac{3}{6}$	$\cdot\frac{4}{6}$	$\cdot\frac{5}{6}$	$\cdot\frac{6}{6}$		$\cdot\frac{6}{6}$	$\cdot\frac{5}{6}$	$\cdot\frac{4}{6}$	$\cdot\frac{3}{6}$	
$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{6}$	1	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$	$+\frac{1}{6}$

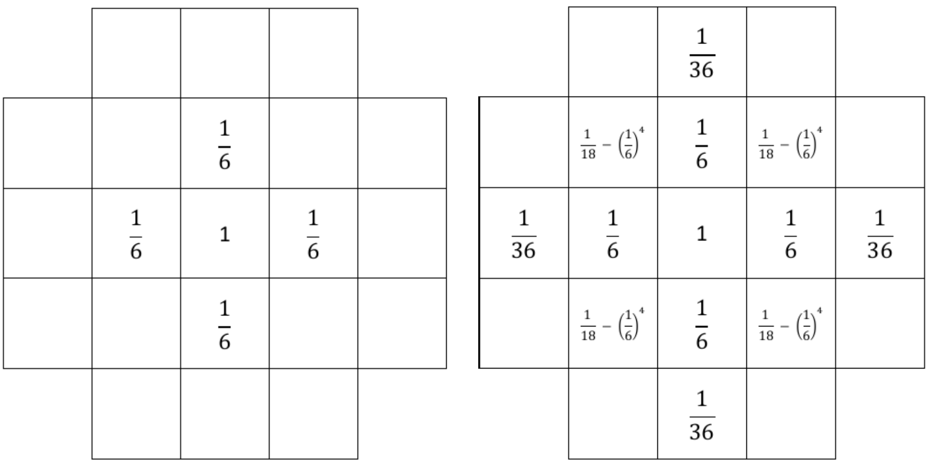
TABLE 1 – Représentation graphique de la propagation linéaire.

Cependant, nous avons aussi pris comme convention que le nombre de voisins « contaminables » correspond à la vague. Par exemple, lors de la première vague, seulement le voisin direct est susceptible d'être contaminé, les autres après ce voisin restent sains. Lors de la seconde vague, seuls les deux voisins les plus proches du malade sont susceptibles d'être contaminés, et ainsi de suite.

Après avoir représenté et étudié cette propagation de façon linéaire, nous en avons conclu que pour que le voisin du malade soit aussi contaminé, il faudrait avoir au maximum 6 rencontres. Pour que le second voisin du malade soit contaminé, il faudra au maximum 7 rencontres et ainsi de suite.

Propagation à deux dimensions

Nous avons ensuite essayé de représenter la situation dans un plan, où le malade est situé au milieu du plan et a dès lors quatre voisins, après une vague (t=1).



(a) t=1 (b) t=2

Figure 9 – Représentation graphique de la propagation à deux dimensions.

Il semblerait que la ligne et la colonne centrale se comportent de la même façon que la représentation linéaire. Ce qui change, c'est qu'il faut considérer les éléments hors de ces deux lignes (en gras). Pour ceux-ci, Admettons qu'on s'intéresse à la contamination de A et que A possède deux voisins : B et C. La probabilité que A soit contaminé est : *P(B est contaminé) * P(B contamine A) + P(C est contaminé) * P(C contamine A) - P(B et C sont contaminé) * P(B et C contaminent tous les deux A).* Si on regarde ça lors de la 2ème vague, nous obtenons :

$$\frac{1}{6}.\frac{1}{6}+\frac{1}{6}.\frac{1}{6}-\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{18}-\left(\frac{1}{6}\right)^4.$$

Cependant, une fois ces deux représentation faites et étudiées, nous avons été réorientés, car il est vrai que si on considère ces ceux-ci, la réponse à la question de départ - combien de rencontres faut-il pour qu'une personne soit contaminée- serait six rencontres pour les plus proches, puis trente-six rencontres, pour leurs voisins, et ainsi de suite. On nous a fait remarquer que si on lance une pièce de monnaie, on n'est pas toujours sûr de retomber la première fois sur face puis la seconde fois sur pile. Ce que l'on veut dire par là, c'est que les voisins peuvent être contaminés dès la première rencontre comme ils peuvent être contaminés à la sixième rencontre, et donc qu'on devait chaque fois diviser en deux cas : la chance sur six d'être sûr d'être contaminé et les cinq chances sur six d'être sûr de ne pas être contaminé.

3.2 Approche corrigée

Nous avons donc adapté les recherches pour avoir un résultat plus proche de la réalité, et donc plus correct. Pour pallier à cette incohérence avec la réalité, il faut donc observer les effets des vagues en considérant au cas par cas les avancées de la maladie dans la chaîne des voisins et puis, une fois que toutes les combinaisons, tous les cas possibles sont envisagés, les additionner. C'est-à-dire qu'il faut additionner les pourcentages des cas où nous arrivons à un même voisin.

Avant toutes choses, nous avons remarqué qu'il se passait la même chose à droite ou à gauche du malade de base, nous en avons donc conclu que la ligne était symétrique et nous avons décidé de ne travailler que d'un seul côté, les deux étant pareils. Pour illustrer cette nouvelle approche nous avons choisi de dessiner des schémas dans lesquels nous pouvons facilement visualiser toutes les différentes propagations que la maladie peut avoir, tous les chemins qu'elle peut suivre au cours du temps (une unité de temps qui sera d'une heure est une unité choisie arbitrairement). Nous considérons qu'une rencontre entre deux voisins respectifs a lieu chaque heure, donc chaque heure il y a un risque pour un voisin de contaminer son propre voisin et d'être contaminé lui aussi, comme illustré ci-dessous.

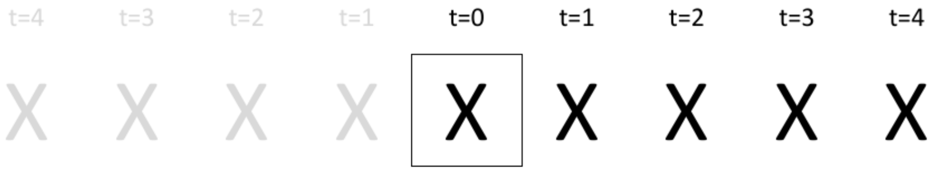


Figure 10 – Représentation graphique de la position des personnes.

Première vague (t=1)

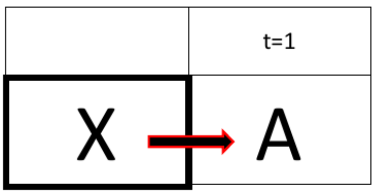


Figure 11 – Représentation des voisins de droite du malade (t=1)

Le point de départ de ce schéma est bien entendu notre malade (représenté en noir). Ensuite après une heure, deux cas de figure pour notre virus sont possibles :

1. Le malade de base a contaminé son voisin (A)
2. Le malade de base n'a pas contaminé son voisin (A).

Par nos consignes de départ nous savons que le virus a 1/6 soit 16,5% de chances contamination pour une rencontre. Il y a donc 1 chance sur 6 que le cas de figure 1 arrive et 5 chances sur 6 que le cas 2 arrive.

Tous les différents cas de figures (avec les probabilités qu'ils aient lieu) sont représentés en ce petit schéma mais pour seulement une unité de temps (t=1=1h). Regardons maintenant comment la maladie va évoluer pour la deuxième heure.

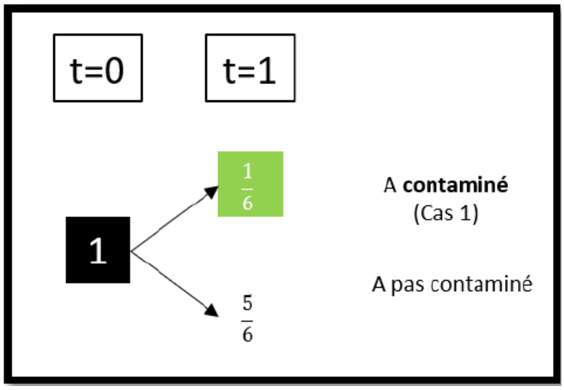


Figure 12 – Propagation du virus pendant la première heure.

Deuxième vague (t=2)

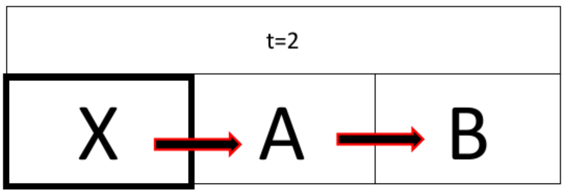


Figure 13 – Représentation des voisins de droite (t=2).

En considérant que le virus a déjà contaminé le premier voisin du malade, nous sommes donc dans le cas 1 qui a une chance sur six d'arriver, on sait qu'à la rencontre entre le premier et deuxième voisin il y aura une chance sur six que le virus se transmette (cas 1.1) et cinq chances sur six qu'il ne se transmette pas (cas 1.2). Il y a donc une chance sur six d'une chance sur six, soit une chance sur trente-six, que le cas 1.1 se produise après deux heures et cinq chances sur six d'une chance sur six, soit cinq chances sur trente-six que le cas 1.2 se produise après deux heures.

Considérons à présent le cas où A n'est pas encore malade. Avec le même raisonnement on trouve cinq chances sur trente-six pour le cas 2.1 et vingt-cinq sur trente-six pour le cas 2.2, soit le cas le plus probable après deux heures.

Une fois les probabilités de la vague 2 établies, nous pouvons encore

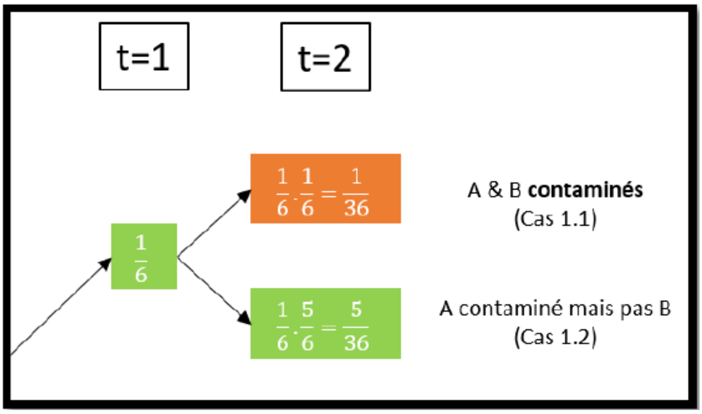


FIGURE 14 – Propagation du virus pendant la deuxième heure (#1).

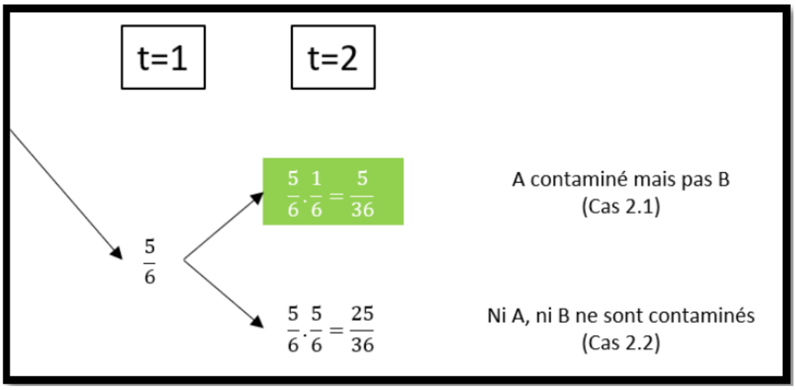


FIGURE 15 – Propagation du virus pendant la deuxième heure (#2).

simplifier ces résultats. Nous remarquons au cas de figure 1.2 et 2.1 que le virus a le même pourcentage de chance de contaminer le voisin B, respectivement au temps 1 et au temps 2. On peut donc réunir, additionner les probabilités de ces deux cas (qui sont les mêmes).

En conclusion après deux heures, nous avons une probabilité de $\frac{1}{36}$ pour que le virus contamine le deuxième voisin (A & B contaminés), une probabilité de $2.\frac{5}{36}$ pour que seulement le premier voisin soit contaminé (A) et un dernier pourcentage de $\frac{25}{36}$ pour que le virus n'ait contaminé aucun voisin.

Nous avons trouvé la suite du schéma de façon analogue, c'est-à-dire en distinguant chaque fois deux cas : celui d'une chance sur six de contaminer son voisin et celui de cinq sur six de ne pas le contaminer. Nous avons résumé toutes ces probabilités dans un tableau (en annexe).

Analyse des résultats obtenus

En développant ce schéma, nous nous sommes rendu compte qu'il existait un lien entre les probabilités de chaque voisin. Nous avons trouvé que la somme des probabilités de chaque étape peut s'écrire sous la forme $z. \left(\frac{5^x}{6^t}\right)$, on remarque que tous les «z» sont en fait ceux du triangle de Pascal.

0	1												
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Figure 16 – Triangle de Pascal.

En effet, en ajoutant chaque fois le 1 du cas où la contamination est nulle, nous avons une ressemblance avec le triangle de Pascal. Au temps 1, nous avons dans notre tableau de synthèse (annexe) le coefficient 1 qui apparait également dans le deuxième rang du triangle de Pascal. Au temps 2, nous avons les coefficients 1 et 2 qui apparaissent au rang 3 du triangle de Pascal et ainsi de suite.

Nous pouvons également ajouter que les probabilités au temps $t = e$ sont égales à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^e$.

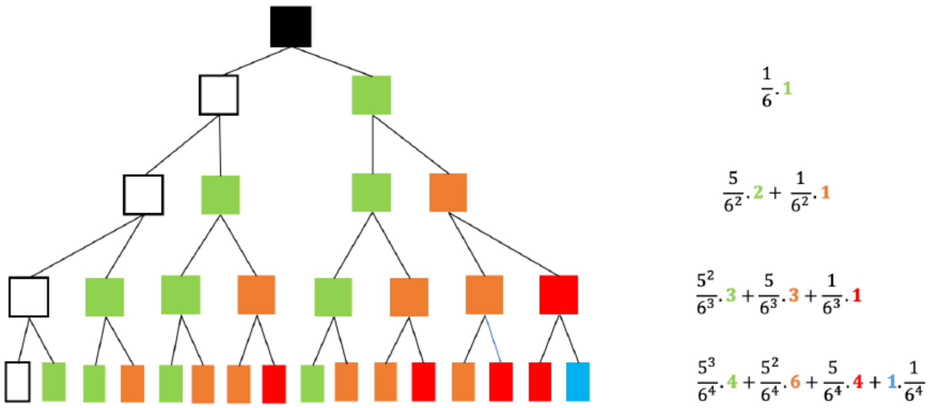


FIGURE 17 – Triangle de Pascal.

3.3 Le triangle de Pascal

Le coefficient

Une fois que nous avons découvert le lien étroit entre notre sujet de recherche et le triangle de Pascal, nous avons continué à chercher dans cette direction. Étant donné que nous n'avons encore jamais travaillé avec cet outil, nous avons d'abord commencé par le découvrir.

En utilisant le cours d'analyse combinatoire de notre professeur de mathématiques, nous avons appris que :

Le triangle de Pascal est un tableau à double entrée où nous plaçons à l'intersection de la n-ème ligne et de la p-ème colonne la valeur du coefficient C_n^p.

Puisque C_n^p n'est défini que pour $p \leq n$, ce tableau est triangulaire.

Pour calculer la formule du coefficient, nous avons utilisé les factorielles. Dès lors, le coefficient binomial C_n^p ou $\binom{n}{p}$ (écriture moderne) peut se calculer selon la formule :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

Par exemple, le coefficient de la ligne 4 et de la colonne 2 est :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6.$$

	0	1	2	3	4	5	...	p	...
0	C_0^0								
1	C_1^0	C_1^1							
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2						
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3					
...									
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	...	C_n^p	...
...									

Figure 18 – Représentation graphique du Triangle de Pascal.

Dans cette formule, nous utilisons la notation moderne car elle est plus logique : le nombre le plus grand est en haut, et il est au même niveau (numérateur) dans la formule.

De plus, le coefficient $\binom{n}{p}$ représente le nombre de façons de tirer sans reprise p objets parmi n objets discernables et de les disposer sans tenir compte de l'ordre d'apparition.

Grâce au triangle de Pascal, nous pouvons dès à présent calculer le coefficient de n'importe quelle ligne et de n'importe quelle colonne. Autrement dit, en faisant référence à notre problème, nous pouvons dès lors calculer la probabilité qu'au moins une personne soit infectée à n'importe quel moment (vague).

Une autre propriété que nous avons utilisée est que la somme des probabilités d'un moment donné vaut toujours 1. Ce qui est logique, vu que ceux qui sont sains représentent l'autre partie de la population qui n'est pas contaminée.

La probabilité

Après avoir trouvé les coefficients en fonction du temps, nous avons voulu trouver les probabilités associées à chacun des coefficients. Nous avons d'abord commencé par les représenter sous forme de tableau.

Nous avons alors remarqué que les probabilités correspondantes aux coefficients étaient croissantes de gauche à droite. Nous avons finalement trouvé une formule :

n \ p	0		1		2		3		4
0	1								
1	1		1						
	$\frac{1}{6}$								
2	1		2		1				
	$\frac{1}{6^2}$	$<$	$\frac{5}{6^2}$						
3	1		3		3		1		
	$\frac{1}{6^3}$	$<$	$\frac{5}{6^3}$	$<$	$\frac{5^2}{6^3}$				
4	1		4		6		4		1
	$\frac{1}{6^4}$	$<$	$\frac{5}{6^4}$	$<$	$\frac{5^2}{6^4}$	$<$	$\frac{5^3}{6^4}$		

FIGURE 19 – Probabilités trouvées dans le triangle de Pascal.

Probabilité correspondant au coefficient de la p-ème colonne et du n-ème rang : $\boxed{\dfrac{5^p}{6^n}}$.

En faisant le produit d'un coefficient par sa probabilité correspondante, nous pouvons trouver n'importe quel cas à n'importe quel temps. De plus, si nous additionnons les différents cas de contamination d'une même vague, nous trouvons la probabilité qu'au moins une personne soit contaminée en plus du premier.

Application des découvertes

Appliquons maintenant ce que nous venons de trouver. Si nous voulons connaître la probabilité de contamination de B (deuxième personne à côté du malade) lors de la deuxième vague (t=4), nous commençons d'abord par trouver les coefficients de chaque personne (se trouvant dans le triangle de Pascal à la ligne 4).

X	A	B	C	D
1	4	6	4	1

0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	

A présent, associons à chaque coefficient sa probabilité correspondante.

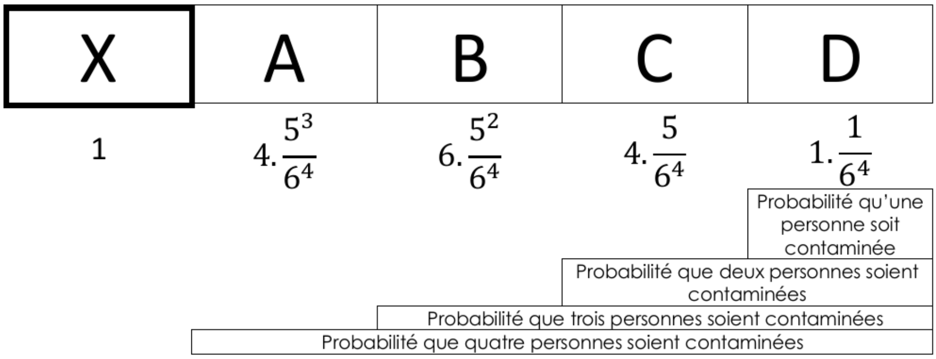
X	A	B	C	D
1	$4.\frac{5^3}{6^4}$	$6.\frac{5^2}{6^4}$	$4.\frac{5}{6^4}$	$1.\frac{1}{6^4}$

4	3	2	1	0	p / n
					0
				$\frac{1}{6}$	1
			$\frac{5}{6^2}$	$\frac{1}{6^2}$	2
		$\frac{5^2}{6^3}$	$\frac{5}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$	3
	$\frac{5^3}{6^4}$	$\frac{5^2}{6^4}$	$\frac{5}{6^4}$	$\frac{1}{6^4}$	4

Maintenant que nous avons le coefficient et la probabilité, nous pouvons dire que B a $\frac{176}{216}\left(\frac{150}{216}+\frac{25}{216}+\frac{1}{216}\right)$ chances d'être contaminé.

X	A	B	C	D
1	$4.\frac{5^3}{6^4}$	$6.\frac{5^2}{6^4}$	$4.\frac{5}{6^4}$	$1.\frac{1}{6^4}$

Reprécisons que cette probabilité est la probabilité d'avoir deux personnes malades, A et B. C'est une propagation de proche en proche, ce qui implique que si B est malade, A l'est forcément. C'est pourquoi nous additionnons les trois dernières cases. Si nous aurions voulu connaitre la probabilité que A soit contaminé, en d'autres termes qu'une personne soit contaminé, nous aurions additionné les quatre dernières cases. Comme indiqué dans le tableau ci-dessous.



4 Questions ouvertes

Nous avons maintenant une méthode pour calculer les probabilités de la contamination «en ligne».

Une suite potentiellement intéressante de ce travail serait de regarder si cette méthode peut être adaptée pour étudier le problème de la propagation à deux dimensions.

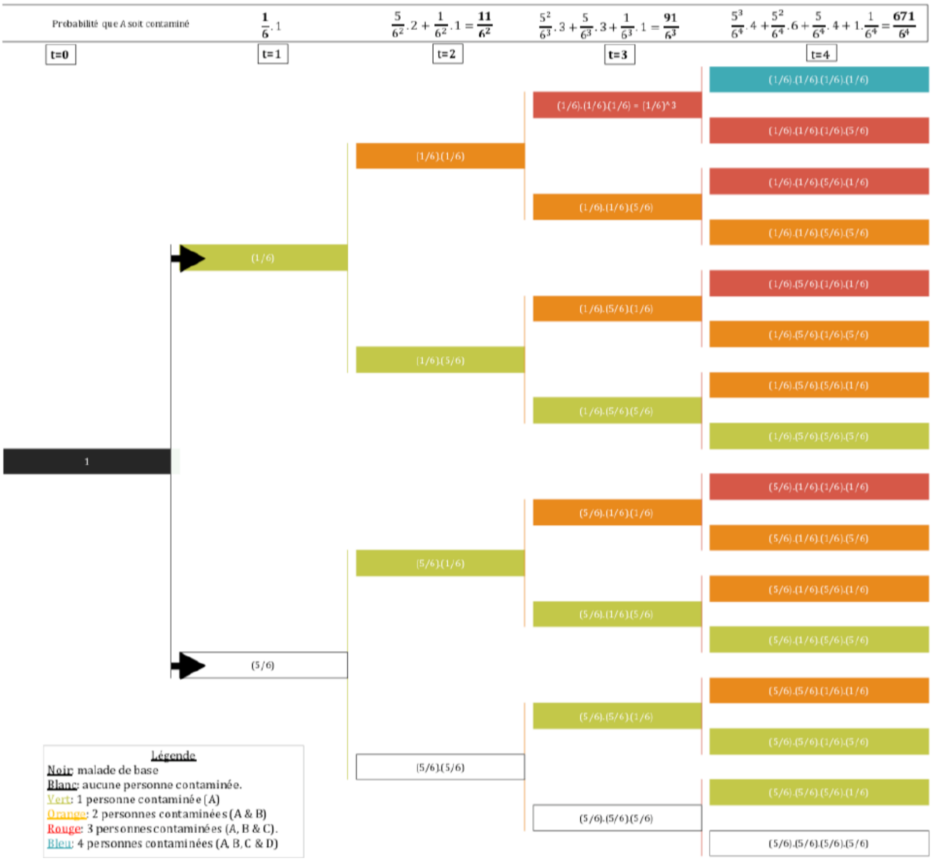
5 Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier chaleureusement notre promoteur, Madame A. Lacroix, pour toute son attention et son temps accordé tout au long de l'année.

Ensuite, nous voulons remercier toute l'équipe de chercheurs de l'Université de Liège - Mmes Aerts, Ernst et Vandermeer et M. Leroy - pour nous avoir initié à la recherche, ainsi que nos professeur Mme Schieres et M Kirsch pour leur aide enrichissante sur notre projet.

Enfin, nous remercions l'association MATh.en.JEANS d'organiser ce projet depuis quelques années désormais.

6 Annexe : arbre de probabilités



Taxi-Distance

Christophe Chenut, Nicolas de Halleux,
Hélène Lutte, Laura Schmitz et
Gudule Wyckmans

Élèves de 6e secondaire au
Collège Saint-Benoît de Maredsous

Avec l'aide de leur enseignant
Miguël Dhyne

et de la chercheuse
Eve-Aline Dubois (UNamur).

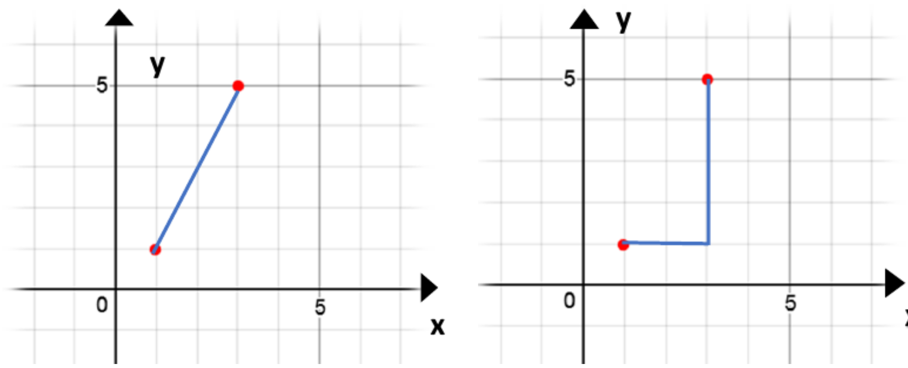
Résumé : Cet article traite des notions de distance entre deux points, contrainte par l'architecture des villes américaines qui ne permettent pas un déplacement en tout point d'un plan mais en suivant des trajectoires rectilignes perpendiculaires entre elles.

1 Présentation du sujet

1.1 Énoncé

Les chauffeurs de taxi à New-York doivent suivre le plan en quadrillage de la ville (Figure 20b). Comment mesurent-ils la longueur de leurs déplacements ? Que devient la définition du cercle avec cette conception des distances ?

1.2 Formalisation



(a) Dans un repère cartésien (b) À New-York

Figure 20

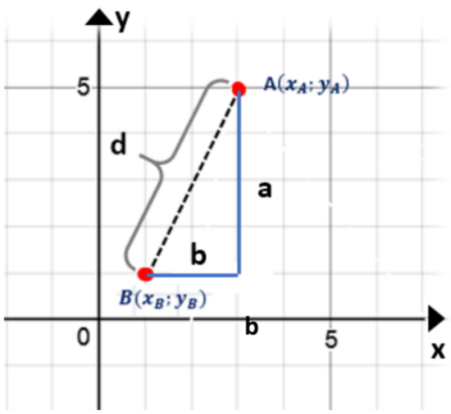
Comment calculer une distance entre deux points dans le repère ?

La distance est plus grande avec cette contrainte (Figure 20b). Celle-ci sera nommée TAXI-DISTANCE. Quelle relation peut-on établir pour calculer celle-ci ?

2 Les calculs de distance dans le plan quadrillé

2.1 Taxi-distance entre deux points

Soit deux points, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé (Figure 21a).



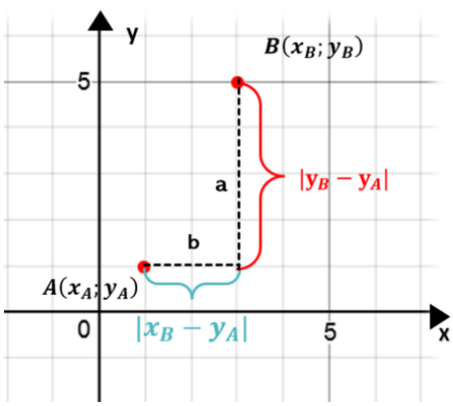
(a)

Repère cartésien

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Car, par Pythagore, $d^2 = a^2 + b^2$.
Or, $a = x_A - x_B$ et $b = y_A - y_B$.

FIGURE 21



Repère à quadrillage

Pour rejoindre le point B depuis le point A, il faut parcourir une taxi-distance d :

$$a + b = d$$

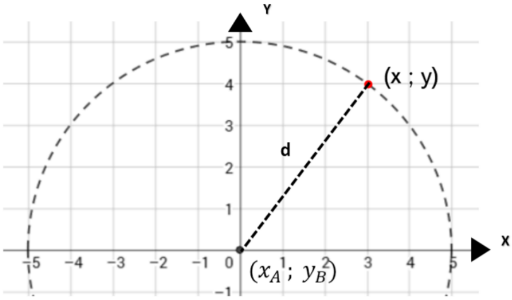
$$\text{Avec, } a = |y_B - y_A|$$

$$\text{et } b = |x_B - x_A|$$

$$\boxed{d = |y_B - y_A| + |x_B - x_A|}$$

2.2 Cercle

Définition : Courbe plane fermée dont tous les points sont à égale distance d'un point appelé centre.

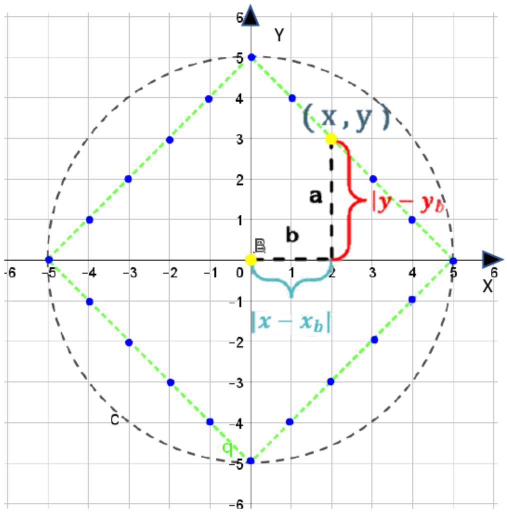


Repère cartésien

La formule générale du cercle de centre en $A(x_A; y_A)$

$$r = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$$

Soit $r^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$



(a) Ensemble de points situés à une taxi-distance 5 du point $b(0; 0)$.

Repère à quadrillage

L'ensemble de points à une taxi-distance r du centre $b(x_b; y_b)$:

$$a + b = r$$

$$\boxed{r = |y - y_b| + |x - x_b|}$$

Équation implicite avec $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$.

Figure 24

Étude graphique du taxi-cercle

On peut remarquer (Figure 24a) que tous les points qui sont à égale taxi-distance du point b (le centre du cercle), sont en bleu et sont disposés en carré sur pointe, attention les droites en pointillés ne sont là que par souci de compréhension et doivent être restreintes afin de n'obtenir que les points bleus, car les taximen ne peuvent se retrouver que sur les rues de la ville.

La définition du cercle étant « Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés **à une distance de O égale à** r. », nous respectons tout à fait cette définition en affirmant que notre taxi-cercle est un cercle car il n'y a aucune restriction sur la forme (ronde ou carrée) et sur la manière de calculer les distances entre 2 points (vol d'oiseau ou taxi-distance).

Étude mathématique

Si $r = |y - y_b| + |x - x_b|$, alors il nous est possible de calculer les équations cartésiennes du carré en isolant y. Pour ce faire, il nous faut différencier 4 cas, à cause des valeurs absolues.

<u>Cas 1 :</u> $x - x_B \geq 0$ et $y - y_B \geq 0$

$\rightarrow r = x - x_b + y - yb$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow y = -x + (x_b + y_b + r)$

Dom$f$:

$x - x_b \geq 0 \rightarrow x \geq x_b$ et $y - y_b \geq 0 \rightarrow y \geq y_b \rightarrow -x + x_b + y_b + r \geq y_b$
$\rightarrow x \leq x_b + r$

$$x_b \leq x \leq x_b + r$$

Cas :		Équation	Domaine de définition
2	$x - x_B \geq 0$ $y - y_B \leq 0$	$y = x + (-x_b + y_b - r)$	$x_b \leq x \leq x_b + r$
2	$x - x_B \leq 0$ $y - y_B \geq 0$	$y = x + (-x_b + y_b + r)$	$x_b - r \leq x \leq x_b$
2	$x - x_B \leq 0$ $y - y_B \leq 0$	$y = -x + (x_b + y_b - r)$	$x_b - r \leq x \leq x_b$

Avec $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$.

Cas pratique

Je n'ai que 5$ lorsque je prends mon taxi, ceci équivaut à $500m$ de trajet (on imagine que la distance entre 2 rues est de 100 m). Dans quel cercle puis-je me déplacer pour atteindre un automate ?

→ taxi-cercle de rayon 5 centré en ma position

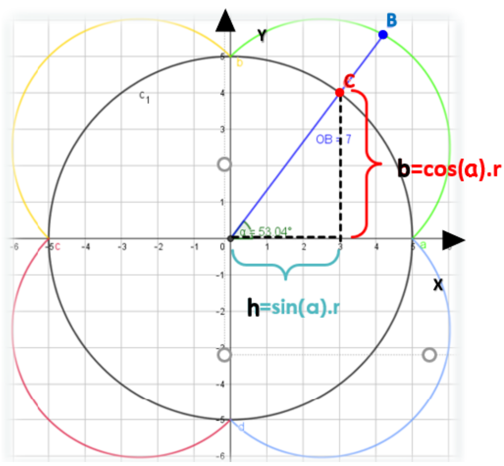
2.3 Calculer la taxi-distance entre le centre et un point du cercle (rond)

Repère cartésien

En ligne droite, la distance entre le centre du cercle et un point quelconque du cercle est égale au rayon de ce cercle.

Repère à quadrillage

La taxi-distance entre un point quelconque C de la circonférence du cercle dépend directement de l'angle formé par le segment de droite $[OC]$ et l'horizontale. Pour simplifier nos calculs, nous allons considérer un cercle de rayon r et de centre $(0;0)$ placé sur un repère quadrillé mais dont les coordonnées polaires seront $(\rho;\alpha)$. Figure 25a.



(a)

$$d = b + h$$

$$d = \cos(\alpha)\cdot r + \sin(\alpha)\cdot r$$

$$d = \rho = |OB|$$

<u>Dans le 1^er quadrant :</u>

$$d = \rho$$

$$\rho = r.(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$$

$$\mathrm{Dom} f : 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Figure 25

2^e quadrant	$d = \rho = r.(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))$	$\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$
3^e quadrant	$d = \rho = -r.(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$	$\pi \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$
4^e quadrant	$d = \rho = -r.(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))$	$\frac{3\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi$

Exemple : Si $r = 5$ et $\alpha \cong 0.925 \ \rightarrow 5.(\sin(0.925) + \cos(0.925)) = 7.002$ (Figure 25a).

2.4 Ensemble de points situés à égale taxi-distance d'un point et d'une droite

Définition parabole : Une parabole est définie comme une courbe plane dont chacun des points est situé à égale *distance d'un point fixe*, le foyer, et *d'une droite fixe*, la directrice.

Repère cartésien

Équation de la droite : $f(y) = x_1$
Équation du foyer : $A(x_A; y_A)$

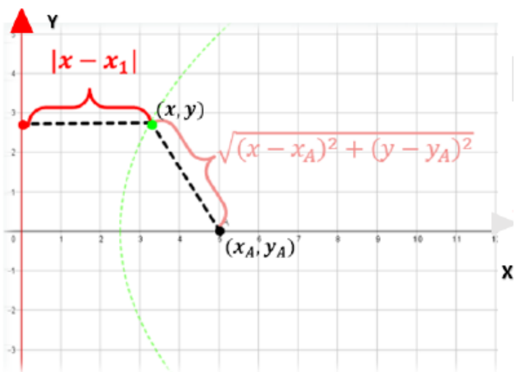


FIGURE 26 – Parabole de foyer $A(5, 0)$ et de droite directrice $x = 0$)

Distance (d_1) de $A(x_A; y_A)$ au point $(x; y)$: $\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$ (par Pythagore).
Distance (d_2) de $f(y)$ au point $(x; y)$: $|x - x_1|$
$d_1 = d_2$, soit

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = |x - x_1|.$$

Repère à quadrillage

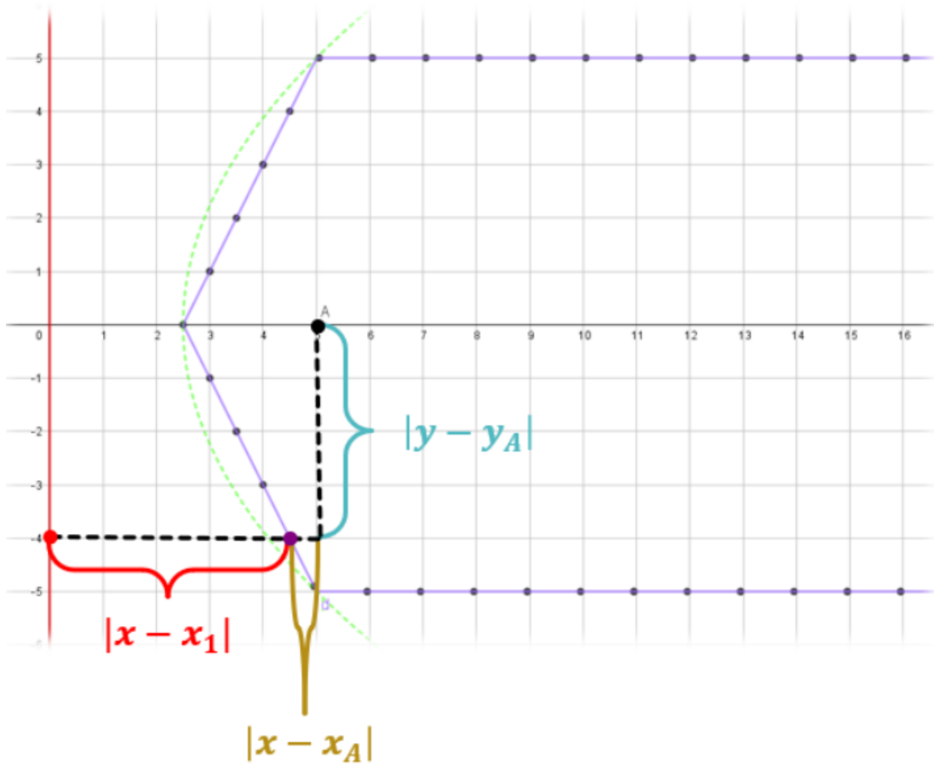


Figure 27

Équation implicite :

$$\boxed{|x - x_A| + |y - y_A| = |x - x_1|}$$

Étude graphique de la taxi-parabole

On peut remarquer que tous les points qui sont à égale distance du point A – le foyer – et de la droite $f(x) = x_1$, sont en mauve (Figure 27). L(es) équation(s) de la forme obtenue, qui affichent la droite violette, doivent être restreintes afin de n'obtenir que les points mauves, car notre taximan ne peut que se retrouver sur les rues de la ville.

La définition de la parabole étant « la parabole est définie comme l'ensemble des points du plan est situé à égale distance d'un point fixe, le foyer, et d'une droite fixe, la directrice. », nous respectons tout à fait cette définition en affirmant que notre taxi-parabole (sorte d'accolade) est une parabole car il n'y a aucune restriction sur la manière de calculer les distances (taxi-distance) entre 2 points.

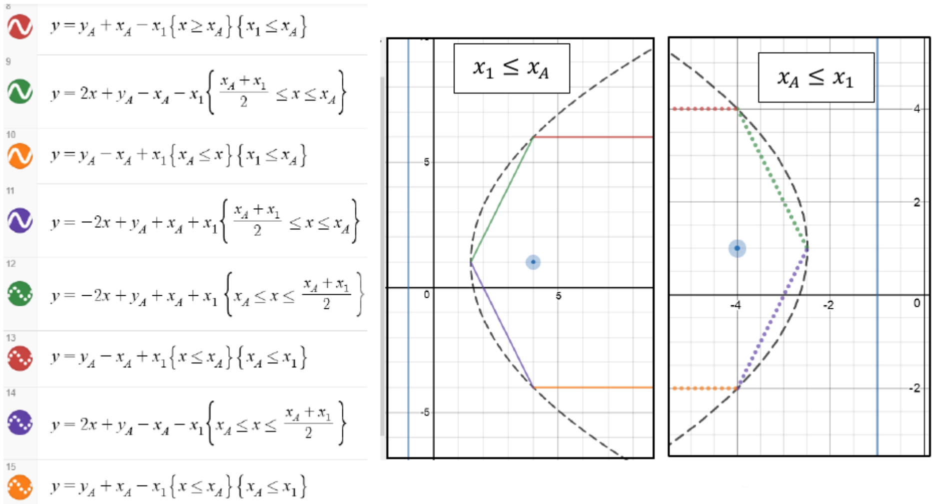
Étude mathématique

Si $|x - x_1| = |y - y_A| + |x - x_B|$ alors il nous est possible de calculer les équations cartésiennes en isolant y. Pour ce faire, il nous faut différencier 8 cas, à cause des valeurs absolues.

Cas 1 : $x - x_A \geq 0$, $y - y_A \geq 0$ et $x - x_1 \geq 0$.
$\rightarrow x - x_1 = y - y_A + x - x_B$ $\rightarrow y = y_A + x_A - x_1$
Dom$f$:
$x \geq x_1, x \geq x_A$ et $y \geq y_A$ $\rightarrow y_A + x_A - x_1 \geq y_A$ $\rightarrow x_A \geq x_1$
$\rightarrow x_A \leq x$ si $x_1 \leq x_A$

Cas :		Équation :	Domaine de définition
2	$x - x_A \leq 0$ $y - y_A \geq 0$ $x - x_1 \geq 0$	$y = 2x + y_A - x_A - x_1$	$\frac{x_A + x_1}{2} \leq x \leq x_A$ (si $x_1 \leq x_A$)
3	$x - x_A \geq 0$ $y - y_A \leq 0$ $x - x_1 \geq 0$	$y = y_A - x_A + x_1$	$x_A \leq x$ si $x_1 \leq x_A$
4	$x - x_A \leq 0$ $y - y_A \leq 0$ $x - x_1 \geq 0$	$y = -2x + y_A + x_A + x_1$	$\frac{x_A + x_1}{2} \leq x \leq x_A$ (si $x_1 \leq x_A$)
5	$x - x_A \geq 0$ $y - y_A \geq 0$ $x - x_1 \leq 0$	$y = -2x + y_A + x_A + x_1$	$x_A \leq x \leq \frac{x_A + x_1}{2}$ (si $x_A \leq x_1$)
6	$x - x_A \leq 0$ $y - y_A \geq 0$ $x - x_1 \leq 0$	$y = y_A - x_A + x_1$	$x \leq x_A$ si $x_A \leq x_1$
7	$x - x_A \geq 0$ $y - y_A \leq 0$ $x - x_1 \leq 0$	$y = 2x + y_A - x_A - x_1$	$x_A \leq x \leq \frac{x_A + x_1}{2}$ (si $x_A \leq x_1$)
8	$x - x_A \leq 0$ $y - y_A \leq 0$ $x - x_1 \leq 0$	$y = y_A + x_A - x_1$	$x \leq x_A$ si $x_A \leq x_1$

avec $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$



Cas pratique

Un client appelle un taxi, lequel des 2 taximen est le plus proche du client si le taximan A se trouve au point $A(x_A, y_A)$ et le taximan B se trouve sur l'autoroute $(f(x))$? (On considère que la vitesse de déplacement sur l'autoroute est infiniment plus grande que celle en ville, le taximan se trouve donc « partout » sur l'autoroute).

$\rightarrow$ En traçant la taxi-parabole de foyer notre position et de directrice l'autoroute, nous voyons directement les zones les plus proches de chaque taximan.

« partout » : si $v_{\text{autoroute}} = \infty \cdot v_{\text{dans la ville}} = \infty$, alors $s = \frac{d}{v_{\text{autoroute}}} = \frac{d}{\infty}, d \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow s = 0$, donc en un temps nul, je parcours n'importe quelle distance.

2.5 L'ellipse

Définition : L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, dits foyers, est constante.

Repère cartésien

Coordonnées des foyers : $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

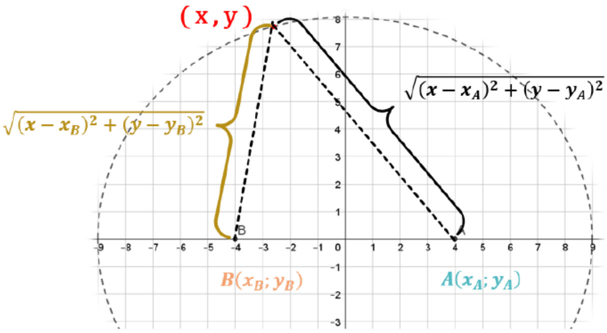


Figure 28 – Ellipse de foyer $A(4, 0)$ et $B(-4, 0)$ avec $L = 8\sqrt{5}$.

$$L = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} + \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$$

En suivant le quadrillage

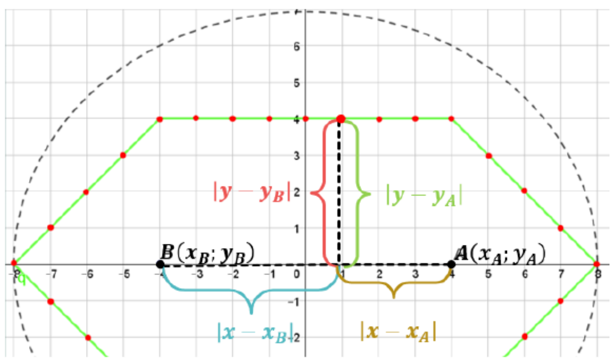


Figure 29

Équation implicite :

$$\boxed{L = |x - x_B| + |y - y_B| + |x - x_A| + |y - y_A|}$$

Étude graphique de la taxi-ellipse

On peut remarquer que tous les points dont la somme de leur distance aux points A et B – foyers –, sont en rouge (Figure 29). L(es) équation(s) de la forme obtenue, qui affichent la droite verte, doivent être restreintes afin de n'obtenir que les rouges, car notre taximan ne peut que se retrouver sur les rues de la ville.

La définition de l'ellipse étant « L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, dits foyers, est constante. », nous respectons tout à fait cette définition en affirmant que notre taxi-ellipse est une ellipse car il n'y a aucune restriction sur la manière de calculer les distances (taxi-distance) entre 2 points.

Étude mathématique

Si $L = |x-x_A|+|y-y_A|+|x-x_B|+|y-y_B|$, alors il nous est possible de calculer les équations cartésiennes en isolant y (ou x, en effet, il apparaîtra des relations). Pour ce faire, il nous faut différencier 16 cas, à cause des valeurs absolues. Par convention, on posera que L est strictement positif : $L > 0$.

<u>Cas 1 :</u> $x - x_A > 0$, $y - y_A > 0$, $x - x_B > 0$ et $y - y_B > 0$.
$\rightarrow L = x - x_A + y - y_A + x - x_B + y - y_B$

$$\rightarrow y = -x + \frac{x_A+y_A+x_B+y_B-L}{2}$$

Dom$f$:
$x > x_A$, $x > x_B$,
$-x + \frac{x_A+y_A+x_B+y_B-L}{2} > y_A \quad \rightarrow x < \frac{x_A-y_A+x_B+y_B-L}{2}$
$-x + \frac{x_A+y_A+x_B+y_B-L}{2} > y_A \quad \rightarrow x < \frac{x_A+y_A+x_B-y_B-L}{2}$

Cas :		Équation	Domaine de définition
2	$x - x_A < 0$ $y - y_A > 0$ $x - x_B > 0$ $y - y_B > 0$	$y = \frac{L - x_A + y_A + x_B + y_B}{2}$	$x_B < x < x_A$ $L > x_A + y_A - x_B - y_B$ * $L > x_A - y_A - x_B - y_B$ *
3	$x - x_A > 0$ $y - y_A < 0$ $x - x_B > 0$ $y - y_B > 0$	$x = \frac{L + x_A - y_A + x_B + y_B}{2}$	$y_B < y < y_A$ **
4	$x - x_A > 0$ $y - y_A > 0$ $x - x_B < 0$ $y - y_B > 0$	$y = \frac{L + x_A + y_A - x_B + y_B}{2}$	$x_A < x < x_B$ **

5	$x-x_A>0$ $y-y_A>0$ $x-x_B>0$ $y-y_B<0$	$x=\dfrac{L+x_A+y_A+x_B-y_B}{2}$	$y_A<y<y_B$ **
6	$x-x_A<0$ $y-y_A<0$ $x-x_B>0$ $y-y_B>0$	$L=x_A+y_A-x_B-y_B$	
7	$x-x_A<0$ $y-y_A>0$ $x-x_B<0$ $y-y_B>0$	$y=x+\dfrac{L-x_A+y_A-x_B+y_B}{2}$	$\dfrac{x_A-y_A+x_B+y_B-L}{2}<x<x_B$ $\dfrac{x_A+y_A+x_B-y_B-L}{2}<x<x_A$
8	$x-x_A<0$ $y-y_A>0$ $x-x_B>0$ $y-y_B<0$	$L=x_A-y_A-x_B+y_B$	
9	$x-x_A>0$ $y-y_A<0$ $x-x_B<0$ $y-y_B>0$	$L=-x_A+y_A+x_B-y_B$	
10	$x-x_A>0$ $y-y_A<0$ $x-x_B>0$ $y-y_B<0$	$y=x+\dfrac{-x_A+y_A-x_B+y_B-L}{2}$	$x_A<x<\dfrac{x_A+y_A+x_B-y_B+L}{2}$ $x_B<x<\dfrac{x_A-y_A+x_B+y_B+L}{2}$
11	$x-x_A>0$ $y-y_A>0$ $x-x_B<0$ $y-y_B<0$	$L=-x_A-y_A+x_B+y_B$	
12	$x-x_A<0$ $y-y_A<0$ $x-x_B<0$ $y-y_B>0$	$x=\dfrac{x_A+y_A+x_B-y_B-L}{2}$	$y_B<y<y_A$ **
13	$x-x_A<0$ $y-y_A<0$ $x-x_B>0$ $y-y_B<0$	$y=\dfrac{x_A+y_A-x_B+y_B-L}{2}$	$x_B<x<x_A$ **
14	$x-x_A<0$ $y-y_A>0$ $x-x_B<0$ $y-y_B<0$	$x=\dfrac{x_A-y_A+x_B+y_B-L}{2}$	$y_A<y<y_B$ **
15	$x-x_A>0$ $y-y_A<0$ $x-x_B<0$ $y-y_B<0$	$y=\dfrac{-x_A+y_A+x_B+y_B-L}{2}$	$x_A<x<x_B$ **
16	$x-x_A<0$ $y-y_A<0$ $x-x_B<0$ $y-y_B<0$	$y=-x+\dfrac{x_A+y_A+x_B+y_B-L}{2}$	$\dfrac{x_A+x_B+y_B-y_A-L}{2}<x<x_B$ $\dfrac{x_A+x_B-y_B+y_A-L}{2}<x<x_A$

avec $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$

* Ces conditions ne sont pas à prendre en compte car elles ne traitent que du cas où $L < 0$, ce que l'on rejette par convention.

** Il manque 2 conditions mais qui sont inutiles (voir cas 2).

Cas pratique

J'ai assez d'argent pour faire 500m en taxi or ma maison n'est pas si loin, je dois passer par un magasin sur le trajet. Puis-je y passer avec mes 500m d'autonomie ?

$\rightarrow$ Il faut tracer la taxi-ellipse de foyers, ma position et mon domicile, avec la distance L qui vaut 500. Je peux donc aller dans tous les magasins à l'intérieur de la taxi-ellipse.

2.6 L'hyperbole

Nous avons ensuite fait la même chose pour l'hyperbole.

Repère cartésien

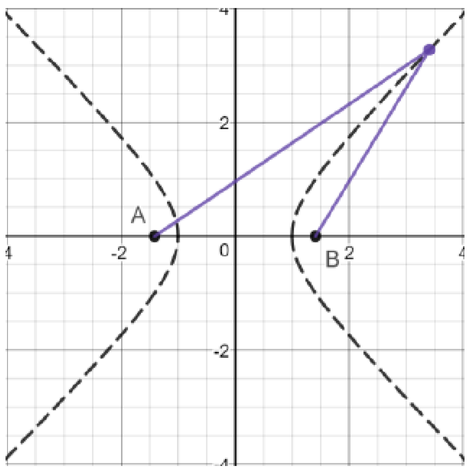


Figure 30 – Hyperbole de foyer $A(-1.5, 0)$ et $B(1.5, 0)$ avec $L = 2$.

$$L = \left| \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} - \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \right|$$

Repère à quadrillage

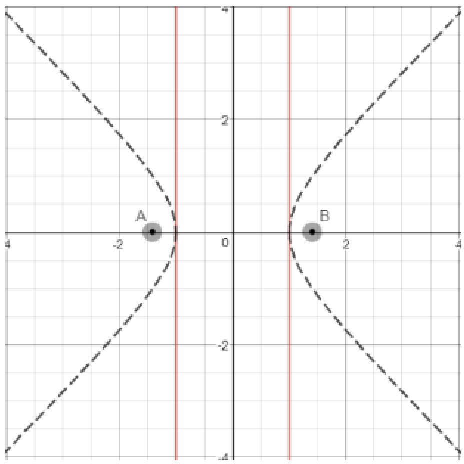


Figure 31

$$L = ||x - x_A| + |y - y_A| - |x - x_B| - |y - y_B||$$

Étude graphique

On peut remarquer ici que tous les points, dont la différence des distances de chaque point aux foyers A et B sont alignés et forment 2 droites (Figure 31). En effet, puisque la distance est la différence de chaque point aux deux foyers via les Δx et Δy, si les 2 points, comme ce cas-ci, se situe sur les mêmes ordonnées, ces distances vont se simplifier. Il y aura donc deux droites verticales. Cela fonctionne évidemment aussi si les foyers se situent sur les mêmes abscisses.

2.7 Ensemble de points à même distance de deux droites (bissectrice)

Nous avons essayé ensuite de calculer la distance entre deux droites et pour ce faire nous avons différencié deux cas qui dépendent des pentes.

Étude graphique

Nous avons posé deux droites d'équation : $f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ où a est la pente de la droite $f(x)$ et b le terme indépendant. Pour $g(x)$ la pente vaut c et le terme indépendant d.

Nous avons alors calculé les points d'intersections entre les deux droites. Ces points peuvent être calculés de la manière suivante :

$$n_x = \frac{d-b}{a-c} \text{ et } n_y = an_x + b.$$

Dans le repère orthonormé la pente de $h(x)$ peut être calculée comme étant :

$$m = \tan\left(\frac{\operatorname{atan}(a) + \operatorname{atan}(c)}{2}\right)$$

On peut donc écrire l'équation générale de $h(x)$:

$$h(x) = m(x - n_x) + n_y$$

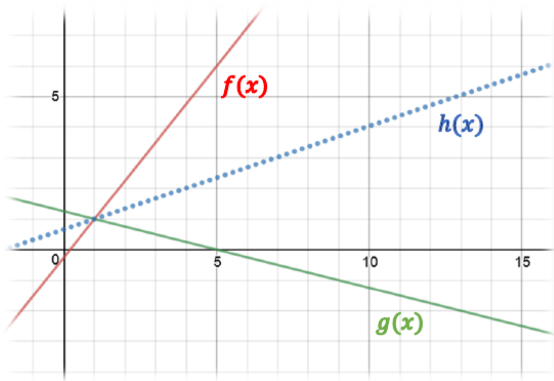
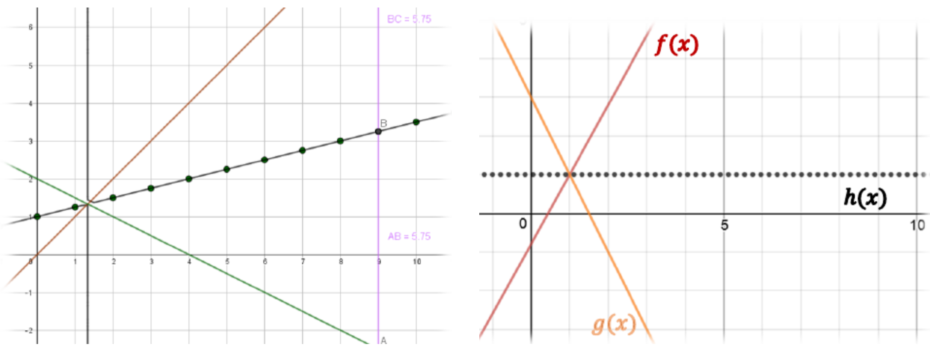


Figure 32

Malheureusement, les points de cette droite $h(x)$ ne sont pas à égales taxi-distances de $f(x)$ et $g(x)$ (dans Figure 32).

Vient alors une nouvelle définition de h qui donne 2 représentations géométriques différentes selon les 2 cas auxquels nous faisions référence précédemment.

$$h : |y - f(x)| = |y - g(x)|$$
$$\boxed{y = \frac{a+c}{2}(x - n_x) + n_y}$$
$$\Rightarrow y = \frac{f(x) + g(x)}{2}$$



(a) $-1 \leq \text{Pente} \leq 1$ (b) Pente < -1 et $1 <$ pente

2.8 Ensemble de points à égale distance de 2 points

Nous avons par la suite tenté de trouver l'ensemble des points à égale taxi-distance de 2 points.

Étude graphique de la taxi-médiatrice

Premièrement nous avons posé deux points $A(-2; 0)$ et $B(2; -3)$. Nous avons cherché graphiquement où se trouvait tous les points à égale distance de ces deux points. Ceux-ci sont représenté par la courbe rouge (Figure 34).

Étude algébrique

En nous aidant du graphique (Figure 35) nous en avons conclu que la distance à vol d'oiseau est :

$$\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$$

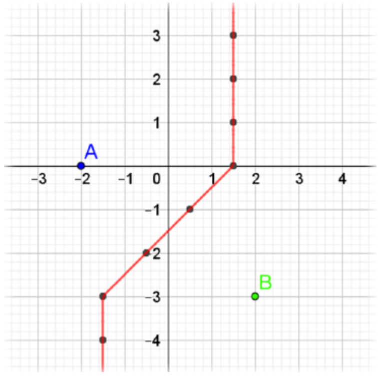


FIGURE 34

Et la taxi-distance :

$$\boxed{|x - x_B| + |y - y_B| = |x - x_A| + |y - y_A|}$$

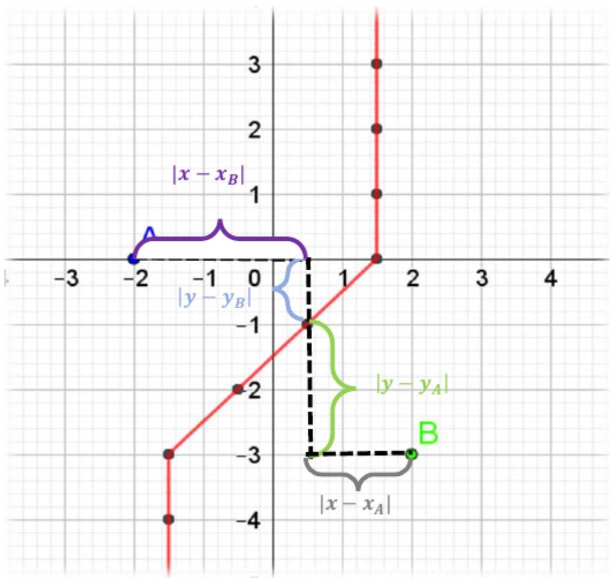


FIGURE 35

2.9 Nombre de chemins possibles dans un rectangle : $m.n$

Formalisation

Combien de chemins existe-il pour se déplacer d'un point A à un point B de manière la plus courte possible ? Le meilleur moyen d'approcher le problème est de dessiner un schéma comme bien souvent. Le lien entre les différents trajets (Figure 36) le plus évident, c'est qu'ils ont tous la même longueur !

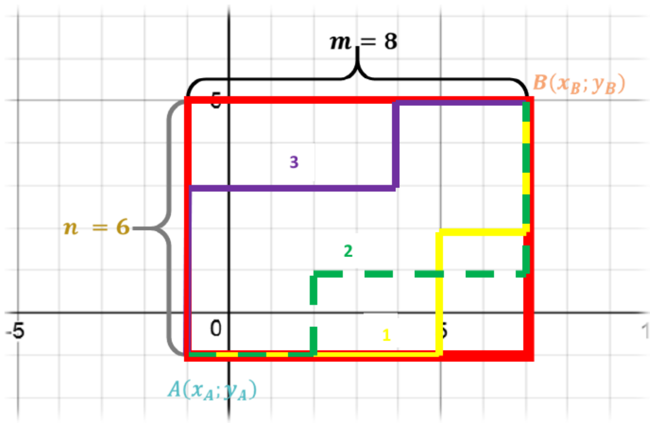


FIGURE 36

Étude mathématique

Les chemins mesurent $6+8=14$, soit $m+n$. Les parcours 1, 2, 3 sont des exemples parmi les « Z » possibilités.

Ils suivent deux règles :

→ Ne pas sortir du cadre rouge.

→ Le chemin ne peut qu'aller vers la droite (Est) et le haut (Nord), en somme, aller vers B !

Avec ces deux règles on peut faire beaucoup de chemins. L'enjeu est maintenant d'en calculer le nombre.

$$1 : \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow$$

Au total, $8\times\rightarrow$ et $6\times\uparrow$, ou $m\times\rightarrow$ et $n\times\uparrow$.

Si l'on imagine que l'on met toutes les flèches dans un sac, quelle est la probabilité de tirer la suite 1 ?

$\frac{1}{Z}$ chance, avec Z qui est le nombre de combinaisons possibles, soit :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \rightarrow & \rightarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
\frac{8}{14} & \frac{7}{13} & \frac{6}{12} & \frac{5}{11} & \frac{4}{10} & \frac{3}{9} & \frac{6}{8} & \frac{5}{7} & \frac{4}{6} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{3}{3} & \frac{2}{2} & \frac{1}{1} & = & \frac{1}{Z}
\end{array}$$

$Z = \dfrac{(8+6)!}{8!.6!}$.

Cette réponse peut être généralisée et vérifiée pour tout m et n :

$$\boxed{Z = \frac{(m+n)!}{m!n!}}$$

3 Les calculs de distance dans un repère isométrique

Ensuite, nous avons essayé d'extrapoler la taxi-distance dans une ville imaginaire faite de triangles équilatéraux et non plus de carrés comme dans New-York. Cette nouvelle notion de distance sera la Yon-distance et notre nouvelle ville factice Yonville.

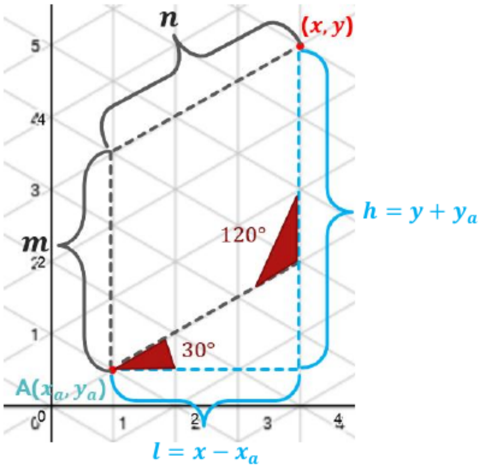
3.1 Yon-distance entre deux points

La Yon-distance en passant par le repère isométrique peut se calculer comme étant la somme de 2 distances.

Ainsi pour rejoindre le point (x, y) depuis le point $A(x_A, y_A)$, M. Tuvache doit parcourir une distance totale d comme représenté à la Figure 37.

3.2 Cercle

Nous avons alors appliqué la définition d'un cercle dans un repère isométrique. Le cercle est alors devenu un hexagone régulier. (Figure 38)



$$d = m + n$$

$$n = \frac{l}{\cos(30^\circ)} = \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

$$m = h - l\tan(30^\circ) = h - \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

$$\boxed{d = \frac{2}{\sqrt{3}}l + h - \frac{\sqrt{3}}{3}l = \frac{\sqrt{3}}{3}l + h}$$

FIGURE 37

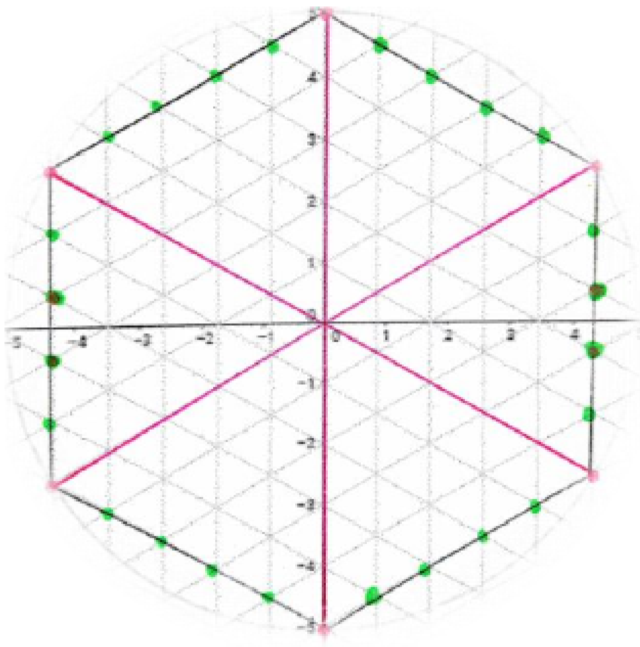


FIGURE 38 – Cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 5.

3.3 Calculer la Yon-distance entre le centre et un point du cercle (rond)

Étude graphique

Dans un repère isométrique, nous avons tenté de déterminer la distance, en passant par les droites du repère, entre un point du cercle (rond) et le centre. La Yon-distance entre un point quelconque C de la circonférence du cercle dépend directement de l'angle formé par le segment de droite $[OC]$ et l'horizontale (θ). Pour simplifier nos calculs, nous allons considérer un cercle de rayon r et de centre $(0;0)$ placé sur un repère quadrillé mais dont les coordonnées polaires seront $(\rho;\alpha)$. Figure 39.

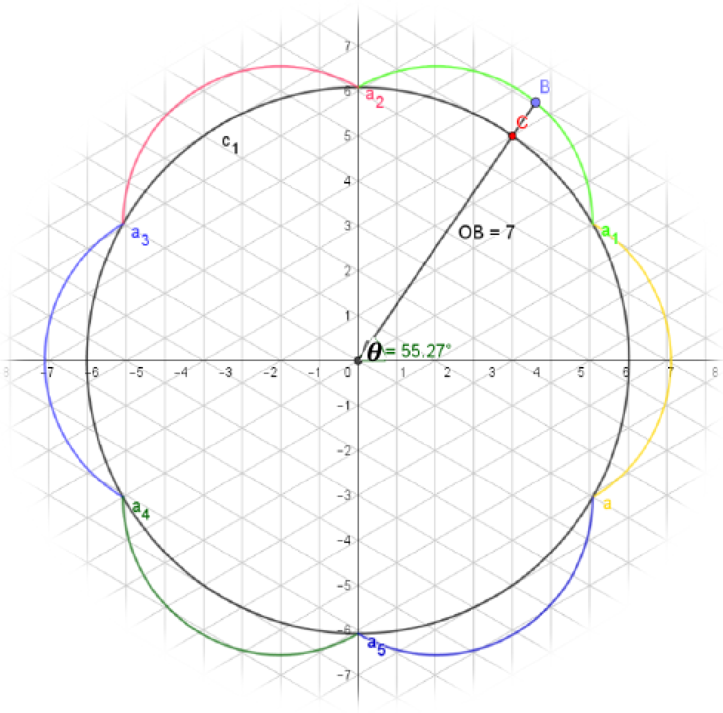


FIGURE 39

Étude mathématique

Yon-distances en fonction de l'angle

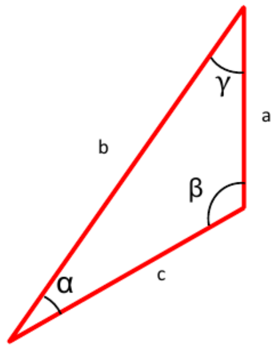


Figure 40

$$\text{Loi des sinus : } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \text{ avec } \beta = 120° \text{ et } \gamma = 60° - \alpha.$$

$$a = \frac{b\sin(\alpha)}{\sin(120°)} = \frac{2b\sin(\alpha)}{\sqrt{3}}$$

$$c = \frac{b\sin(\gamma)}{\sin(120°)} = \frac{2b\sin(60° - \alpha)}{\sqrt{3}}$$

$b = b$ et $\alpha = \theta - 30°$.

Cas :		Équation	Avec
1	De -30° à 30°	$a + c = \dfrac{2b(\sin\alpha + \sin(60° - \alpha))}{\sqrt{3}} = \text{r}$	$\alpha = 30° - \theta$
2	De 30° à 90°	$r = \dfrac{2b(\sin\alpha + \sin(60° - \alpha))}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \theta - 30°$
3	De 90° à 120	$r = \dfrac{2b(\sin\alpha + \sin(60° - \alpha))}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \theta - 90°$
4	De 150° à 210°	$\dfrac{-2b(\sin\alpha + \sin(60° - \alpha))}{\sqrt{3}} = \text{r}$	$\alpha = \theta - 150°$
5	De 210° à 270°	$r = \dfrac{-2b(\sin\alpha + \sin(60° - \alpha))}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \theta - 210°$
6	De 270° à 330°	$r = \dfrac{-2b(\sin\alpha + \sin(60° - \alpha))}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \theta - 270°$

3.4 Ensemble de points à égale Yon-distance d'un point et d'une droite

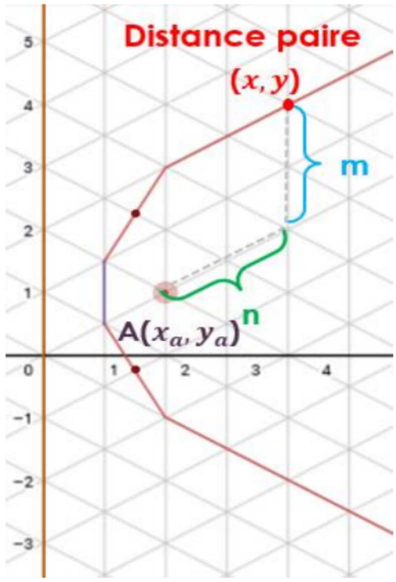
La distance entre un point, le foyer de coordonnées (x_a, y_a) et l'axe des ordonnées est donné par l'équation :

$$2x = \sqrt{3}|y - y_a| + |x - x_a|$$

Cette formule a été trouvée de la manière suivante :

La distance de A au point (x, y) doit être égale à la distance de la droite au point (x, y) : $d_d = m + n$
Or, on a (voir Section 3.1)

$$d_d = \frac{x}{\cos(30°)} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$
$$n = \frac{|x - x_a|}{\cos(30°)} = \frac{2|x - x_a|}{\sqrt{3}}$$
$$m = |y - y_a| - \frac{|x - x_a|}{\sqrt{3}}$$



Donc,

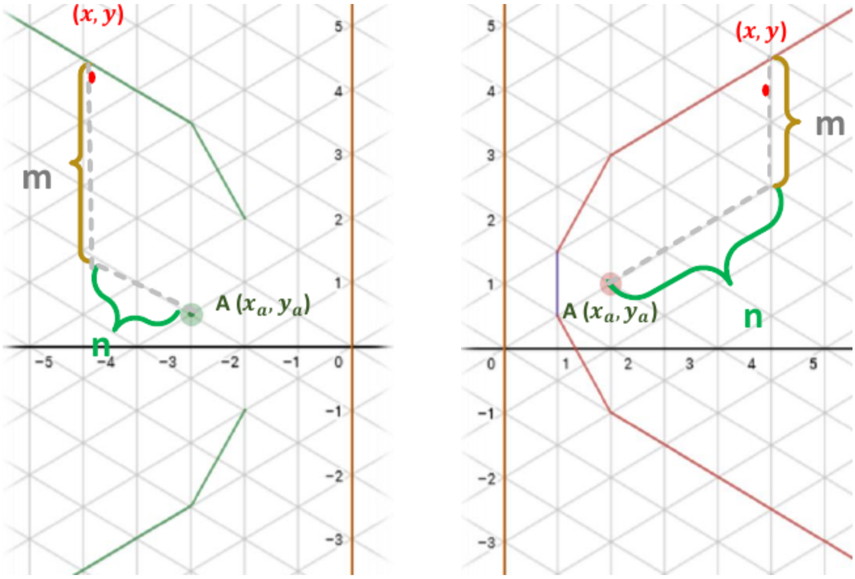
$$\frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2|x - x_a|}{\sqrt{3}} + |y - y_a| - \frac{|x - x_a|}{\sqrt{3}},$$

ou

$$2x = |x - x_a| + \sqrt{3}|y - y_a|$$

Dans ce cas, x doit être strictement positif.
Graphiquement on constate que la fonction n'est valable que quand $\frac{x_a}{2} < x$.
Et si d_d est paire, alors il faut ajouter un segment,

$$x = \frac{x_a}{2} \qquad \left\{\frac{-x_a}{2\sqrt{3}} + y_a < y < \frac{x_a}{2\sqrt{3}} + y_a\right\}.$$



(a) Si la distance est impaire (exemple $d = 3$).

(b) Si la distance est paire (exemple $d = 2$).

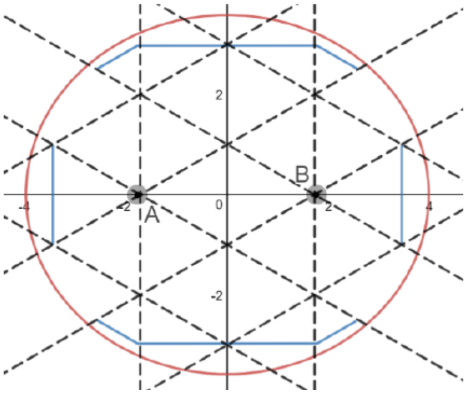
3.5 L'ellipse

Nous avons d'abord dû poser quelques conditions car selon une Yon-distance paire ou impaire et selon l'inclinaison de l'axe focale de l'ellipse cela variait.

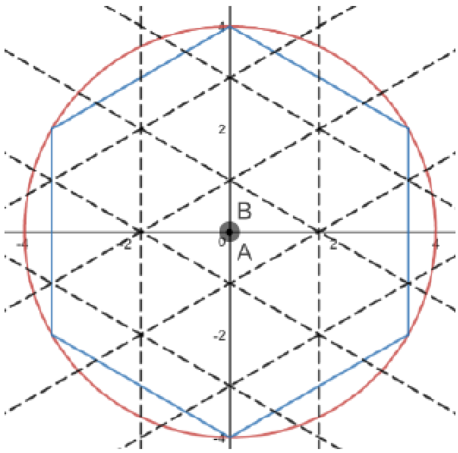
Nous avons donc d'abord commencé à imaginer une ellipse avec une distance paire entres les foyers, une distance paire totale et sur un plan horizontal de centre (0,0).

Et nous avons trouvé comme formules :

1. $\dfrac{2|x - x_A|}{\sqrt{3}} + \dfrac{2|x - x_B|}{\sqrt{3}} = 2L,$
   pour $y \in \left\{ -\left(\frac{L}{2} + \frac{x_A - x_B}{2\sqrt{3}} + y_A \right); \left(\frac{L}{2} + \frac{x_A - x_B}{2\sqrt{3}} + y_A \right) \right\}$
2. $\dfrac{|x - x_A|}{\sqrt{3}} + |y - y_A| + \dfrac{|x - x_B|}{\sqrt{3}} + |y - y_B| = 2L,$
   pour $x \in \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4} \left(2L - y_A + y_B + \frac{3}{\sqrt{3}} x_A + \frac{x_B}{\sqrt{3}} \right); \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2L - y_A + y_B + \frac{3}{\sqrt{3}} x_A + \frac{x_B}{\sqrt{3}} \right) \right\}.$



Et si l'on met les 2 foyers au même point, on obtient un hexagone qui n'est qu'un cercle.



Remerciements

Nous souhaitons remercier notre professeur, le Dr. Miguël Dhyne pour nous avoir fait découvrir ce projet et y avoir apporté sa contribution. Il nous a permis d'enrichir nos connaissances en mathématique sous un angle différent. Nous tenons également à remercier Eve-Aline Dubois pour son dévouement et le temps qu'elle nous a accordé afin que ce projet puisse voir le jour. Merci à toutes les personnes qui ont participé à la correction et fourni de précieux conseils qui nous ont permis de parfaire notre travail.

Tour de magie et suite binaire

Tatiana De Sousa, Catherine Feller,
Tania Ferreira, Phoebe Heirens et Charel Plier

Élèves de 4[e] et 5[e] secondaire au
Lycée classique de Diekirch

Avec l'aide de leurs enseignantes
Carine Batholmé et Geneviève Harles

et du chercheur
Bruno Teheux (Université du Luxembourg).

Résumé : Cet article traite du tour de magie suivant : un magicien dispose d'un jeu de 32 cartes. Il demande à l'assistance de couper plusieurs fois le paquet, puis distribue les cinq premières cartes à cinq spectateurs, et demande alors à chacun si sa carte est rouge ou noire. Sur base de cette seule information, il est capable de déterminer les valeurs exactes des cinq cartes. Pour étudier ce problème, les élèves s'intéressent tout d'abord à une version simplifiée de ce tour, utilisant huit cartes. Elles expliquent de quelle manière ordonner les cartes afin de réaliser le tour, en utilisant des suites binaires, puis généralisent leurs développements au cas d'un jeu de 32 cartes.

1 Présentation du sujet

Au début de l'année, Bruno Teheux, le chercheur qui a accompagné notre atelier, nous a montré un tour de magie avec un jeu de cartes et nous a demandé d'essayer de comprendre le tour ainsi que les mathématiques cachées derrière. Voici le tour :

Un magicien dispose d'un jeu de 32 cartes avec les 4 symboles cœur, carreau, trêfle et pique. Il demande à cinq spectateurs de couper chacun les cartes. Il distribue aux cinq spectateurs les cinq cartes qui se trouvent sur le dessus du paquet après la dernière coupe. Le magicien demande alors aux 5 volontaires si leur carte est rouge ou noire. À l'aide de ce seul indice, le magicien peut ensuite déterminer la valeur des cinq cartes. L'effet surprise des spectateurs est garanti.

2 Annonce des résultats obtenus

Pendant un certain temps, on a investigué le sujet avant de réussir à comprendre le problème mathématique et de pouvoir réaliser le tour de magie par nous-mêmes.

Dans ce petit article, nous vous détaillons nos pensées, le processus de travail durant l'année et le problème mathématique derrière le tour de magie.

3 Présentation de la démarche

3.1 Premières constatations

Tout d'abord nous avons constaté qu'il y doit être un ordre spécifique pour effectuer ce tour. Sinon, il serait impossible de savoir quelles cartes étaient distribuées. Dans la suite de l'article nous allons préciser un ordre de cartes pour lequel le tour fonctionne.

De plus, le chercheur nous a informés qu'il a fait le tour avec un jeu de 32 cartes. On a constaté que 32 représente aussi le nombre de possibilités pour ordonner 5 cartes en ne respectant que les couleurs (noir et rouge). En effet :

$$32 = 2^5,$$

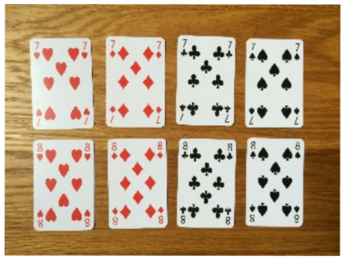
où

- 2 → nombre de couleurs (noir et rouge)
- 5 → nombre de cartes distribuées
- 32 → nombre de cartes et nombre de possibilités pour ordonner 5 cartes en ne respectant que la couleur.

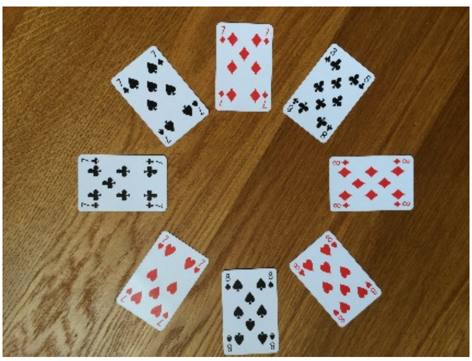
Avant d'indiquer la suite de la démarche pour trouver un ordre pour lequel le tour fonctionne, nous l'illustrons tout d'abord à l'aide d'un jeu avec moins de cartes.

3.2 Exemple avec 8 cartes

Afin d'expliquer la démarche on s'est servi d'un exemple avec moins de cartes. Prenons pour cela 8 cartes : les cartes représentant les nombres 7 et 8 pour chaque symbole.



Le premier problème qui se pose est que les cartes sont coupées plusieurs fois. Donc, soit l'ordre de cartes doit être modifié d'une façon prévisible, soit il doit rester inchangé lors de la coupe. Or, en s'imaginant les cartes ordonnées sous forme d'un cercle, donc comme une suite qui se répète éternellement, on peut couper le jeu de cartes à n'importe quel endroit sans modifier cet ordre.



On peut adapter notre calcul précédant ($2^5 = 32$) à cet exemple de 8 cartes :

$$2^3 = 8,$$

où

- 2 $\rightarrow$ nombre de couleurs (noir et rouge)
- 3 $\rightarrow$ nombre de cartes distribuées
- 8 $\rightarrow$ nombre total de cartes.

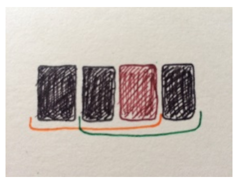
Si on fait le tour avec un jeu de 8 cartes, on doit donc distribuer 3 cartes. De plus, on a 8 possibilités d'ordonner ces 3 cartes en ne respectant que leur couleur (noir ou rouge). Pour représenter plus facilement ces combinaisons, nous nous sommes servis d'un code binaire. Dans ce code, « 0 » représente une carte noire et « 1 » représente une carte rouge.

Voici les 8 possibilités :

000 (1)	111 (5)
001 (2)	110 (6)
010 (3)	101 (7)
011 (4)	100 (8)

Avec ces 8 combinaisons, on peut former une suite binaire qui représente un ordre possible pour les 8 cartes. Dans cette suite, on doit retrouver chaque sous-suite de longueur 3 exactement une fois. Si une de ces sous-suites apparaît plus qu'une fois dans la suite, le magicien ne peut plus trouver les cartes cherchées, parce qu'il peut confondre les combinaisons.

On forme un ordre en prenant une combinaison, p.ex. 001, et en ajoutant une nouvelle carte, p.ex. 0, pour former la prochaine combinaison, donc 010. Ceci est illustré par l'image ci-contre.

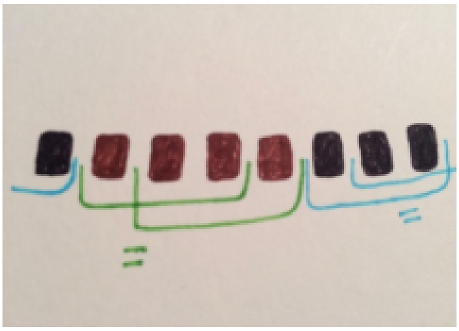


Quand on a utilisé les 8 cartes, les deux dernières cartes de l'ordre doivent former une prochaine combinaison, qui n'est pas déjà apparue, avec la première carte. La dernière carte doit alors former, avec les deux premières cartes, la dernière combinaison.

Un exemple d'une suite complète est donnée sur l'image ci-dessous : 00101110

Une suite qui ne fonctionne pas est par exemple : 01111000

Ici, on voit tout de suite que la combinaison de 111 apparaît deux fois. Aussi la combinaison de 000 se répète.



Donc, on ne peut pas utiliser cette suite pour faire le tour de magie.

Revenons à la suite 00101110. Quand on coupe par exemple cet ordre après la quatrième carte : 0010 / 1110 on obtient la suite 11100010. On peut toujours trouver toutes les 8 combinaisons de trois cartes et c'est la seule information qui est importante pour le magicien. Pour revenir à l'image du cercle, on peut dire qu'on peut couper le cercle des cartes à n'importe quel endroit et l'ordre va rester le même. Les deux suites 00101110 et 11100010 correspondent au même ordre.

En gardant ceci en tête, il existe évidemment une multitude de suites, mais il n'existe que deux ordres différents : l'ordre représenté par la suite 00101110 et l'ordre représenté par la suite inverse 01110100. Pour le voir, nous avons simplement épuisé tous les ordres possibles.

Pour que le tour de magie fonctionne, on peut par exemple prendre l'ordre représenté par la suite 00101110 et attribuer les cartes de la manière suivante :

7♣, 7♠, 7♥, 8♣, 7♦, 7♥, 7♦, 8♠

Lors du tour de magie, le magicien demande aux 3 volontaires si leur carte est rouge ou noire. Il recherche ensuite la suite donnée par les volontaires dans l'ordre pour retrouver les valeurs des 3 cartes. Pour cela le magicien peut consulter le tableau suivant :

000	8♠, 7♣, 7♠	111	7♦, 8♥, 8♦
001	7♣, 7♠, 7♥	110	8♥, 8♦, 8♠
010	7♠, 7♥, 8♣	101	7♥, 8♣, 7♦
011	8♣, 7♦, 8♥	100	8♦, 8♠, 7♣

3.3 Tour de magie avec 32 cartes

Pour trouver un ordre possible pour le jeu de 32 cartes, nous avons procédé de la même manière qu'avec les 8 cartes.

Pour commencer, nous avons noté toutes les possibilités d'ordonner 5 cartes en ne respectant que leurs couleurs (noir et rouge) sous forme de suites binaires :

00000	10000	01000	00100	00010	00001	11000	10100
10010	10001	01100	01010	01001	00110	00101	00011
11100	11010	11001	10110	10101	10011	01110	01101
01011	00111	11110	10111	11011	11101	01111	11111

Comme vu précédemment, il existe 32 possibilités.

Ensuite, nous avons cherché une suite binaire de 32 chiffres qui correspond à un ordre pour lequel le tour de magie fonctionne. Il est par exemple facile de voir qu'il faut y avoir UNE fois au maximum 5 cartes rouges successives et UNE fois cinq cartes noires successives. Plus généralement, la condition pour former une suite binaire de 32 chiffres qui correspond à un ordre pour lequel le tour de magie fonctionne est la suivante :

> La suite doit contenir comme sous-suite exactement une fois toutes les 32 possibilités de suites binaires d'ordre 5 qui correspondent aux 32 possibilités différentes de positionner 5 cartes en ne respectant que leurs couleurs.

En procédant par essai tout en respectant cette condition, nous avons trouvé la suite binaire suivante :

01100010011111011100101000001101.

Finalement, la suite des cartes que nous avons utilisée pour faire le tour de magie est la suivante :

6♣, 4♦, 3♦, 3♣, 1♣, 8♠, 2♥, 6♠, 4♣, 7♥, 2♦, 8♥, 1♥, 8♦, 5♣, 1♦,
6♦, 5♦, 8♣, 3♠, 5♥, 2♠, 4♥, 2♣, 4♠, 5♠, 1♠, 7♠, 7♦, 3♥, 7♣, 6♥.

Pour retrouver les valeurs des 5 cartes dans l'ordre sur base de la suite donnée par les volontaires, le magicien peut consulter le tableau suivant :

00000	2♣, 4♠, 5♠, 1♠, 7♠	01000	2♠, 4♥, 2♣, 4♠, 5♠
00001	4♠, 5♠, 1♠, 7♠, 7♦	01001	8♠, 2♥, 6♠, 4♣, 7♥
00010	3♣, 1♣, 8♠, 2♥, 6♠	01010	3♠, 5♥, 2♠, 4♥, 2♣
00011	5♠, 1♠, 7♠, 7♦, 3♥	01011	7♣, 6♥, 6♣, 4♦, 3♦
00100	1♣, 8♠, 2♥, 6♠, 4♣	01100	6♣, 4♦, 3♦, 3♣, 1♣
00101	8♣, 3♠, 5♥, 2♠, 4♥	01101	7♠, 7♦, 3♥, 7♣, 6♥
00110	1♠, 7♠, 7♦, 3♥, 7♣	01110	5♣, 1♦, 6♦, 5♦, 8♣
00111	6♠, 4♣, 7♥, 2♦, 8♥	01111	4♣, 7♥, 2♦, 8♥, 1♥

10000	4♥, 2♣, 4♠, 5♠, 1♠	11000	4♦, 3♦, 3♣, 1♣, 8♠
10001	3♦, 3♣, 1♣, 8♠, 2♥	11001	6♦, 5♦, 8♣, 3♠, 5♥
10010	5♦, 8♣, 3♠, 5♥, 2♠	11010	7♦, 3♥, 7♣, 6♥, 6♣
10011	2♥, 6♠, 4♣, 7♥, 2♦	11011	1♥, 8♦, 5♣, 1♦, 6♦
10100	5♥, 2♠, 4♥, 2♣, 4♠	11100	1♦, 6♦, 5♦, 8♣, 3♠
10101	3♥, 7♣, 6♥, 6♣, 4♦	11101	8♥, 1♥, 8♦, 5♣, 1♦
10110	6♥, 6♣, 4♦, 3♦, 3♣	11110	2♦, 8♥, 1♥, 8♦, 5♣
10111	8♦, 5♣, 1♦, 6♦, 5♦	11111	7♥, 2♦, 8♥, 1♥, 8♦

Comme pour l'exemple des 8 cartes, nous obtenons une autre suite binaire qui fonctionne en inversant l'ordre des nombres :

10110000010100111011111001000110.

Nos professeurs de mathématiques nous ont informés qu'il existe 1024 ($= 2^{10}$) ordres différents ainsi que leurs inverses, donc au total 2048 ($= 2^{11}$) possibilités d'arranger les 32 cartes (en ne respectant que les couleurs noir et rouge) pour que le tour fonctionne.

3.4 Autres variantes

Une autre variante du tour de magie consiste en un choix d'un autre jeu de cartes qui contient plus que seulement deux couleurs (par exemple UNO). Pour que le tour de magie fonctionne avec un autre nombre de couleurs différentes, on devrait aussi changer le nombre de cartes qu'on distribue et le nombre de cartes utilisées pour faire le tour.

4 Conclusion

Le tour de magie ne suscite pas seulement un effet de surprise pour les spectateurs, mais il est aussi très intéressant pour ceux-qui le présentent. Quand on présente le tour de magie devant un public, personne ne sait expliquer ce qui s'est passé. Mais si l'explication comment le tour fonctionne est donnée, il devient facile de le comprendre. En même temps, le tour a été très intéressant pour nous parce que nous avons beaucoup pu expérimenter, varier les nombres etc. Nous avons beaucoup apprécié de travailler sur ce problème.

Congrès de Nancy 2018

Les vendredi 23 et samedi 24 mars 2018 a eu lieu, à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université de Lorraine à Nancy, le congrès annuel accueillant les ateliers MATh.en.JEANS des académies de Nancy-Metz et Strasbourg, ainsi que les ateliers de Belgique et Luxembourg, avec la participation d'un atelier de Roumanie.

Pendant 2 jours, les jeunes ont concrétisé leur travail d'une année : ils ont présenté les résultats de leurs recherches et les ont soumis à l'épreuve de la critique, au moyen de posters, d'animations et d'exposés en amphithéâtre.

Des exposés de vulgarisation ont également été donnés par des orateurs expérimentés : Robin Jamet (médiateur en mathématiques au Palais de la découverte à Paris), Ilaria Lucardesi (Maîtresse de conférences à l'Institut Élie Cartan de Lorraine) et Sylvain Lefebvre (chercheur à lNRIA Grand-Est).

Robin Jamet animait la soirée du vendredi avec un exposé intitulé « À quoi ça ME sert mes maths ? ». Lors de cet exposé à l'humour décalé, il a présenté de nombreux objets (anodins, artistiques, architecturaux,...) avec un regard mathématique et avec pour leitmotiv « *comment convaincre votre entourage que la vie avec les mathématiques est plus belle que sans ?* ».

La clôture du congrès était quant à elle différente pour les collégiens (secondaire inférieur) et les lycéens (secondaire supérieur) : les premiers ont pu assister à l'exposé d'Ilaria Lucardesi intitulé « En forme ! », et les seconds ont pour leur part assisté à l'exposé de Sylvain Lefebvre intitulé « Des algorithmes qui créent des mondes virtuels et des objets bien réels ».

Durant son intervention, Ilaria a abordé de manière ludique un problème consistant à tracer un réseau routier minimal reliant un ensemble de maisons données. Elle a illustré son propos en présentant une solution à l'aide de bulles de savon coincées entre deux plaques de plexiglace (un bulle de savon essayant constamment de minimiser son aire autour de points de contrainte : les maisons). Ajouter une maison à un ensemble fixé pouvant drastiquement changer la disposition des bulles, Ilaria a pu faire ressentir à son jeune public la difficulté à généraliser une propriété mathématique.

Pendant ce temps, les plus grands des jeunes chercheurs découvraient avec Sylvain que les mathématiques peuplaient leurs jeux vidéos préférés. Grâce à de nombreuses illustrations, Sylvain leur a montré le lien entre l'évolution des jeux vidéos de chaque époque (en particulier, la qualité graphique de leur monde virtuel) et les mathématiques qui se cachaient dans leur ombre.

Liste des ateliers

Collège Pilâtre de Rozier (Ars sur Moselle)

Responsable de l'atelier : Delphine Wolfer
Autres enseignants : Mathieu Wolff
Chercheur(s) : David Bertolo
Sujet :
• **Le facteur du futur** *Exposé court*

Dans le but d'améliorer le rendement de distribution des lettres, la poste vient de décider d'étudier la possibilité de fournir aux facteurs des véhicules électriques autonomes autoguidés. Dans le but d'optimiser les déplacements et d'économiser les batteries, les véhicules et les facteurs ne devront passer qu'une et une seule fois dans une rue mais ils peuvent repasser plusieurs fois par une même intersection. Est-il possible de concevoir et programmer un véhicule autonome qui respecte ces contraintes ?

Lycées Louis Lapicque et Pierre Mendes-France (Epinal)

Etablissements jumelés
Responsables des atelier : Anthony Buchert et Pascale Flin
Autres enseignants : Stephane Colleoni et Sandrine Marchal
Chercheur(s) : Julien Bernat
Sujets :
• **Shot'n'Gun** *Exposé*

3 tireurs, 3 pistolets... Chacun à leur tour, les tireurs vont essayer de toucher un adversaire. Qui aura le plus de chances de rester en vie ?

• **La sauterelle cuite** *Exposé court*

Notre sauterelle a fait la fête chez des amis hier soir et elle a terminé tous les verres qu'elle a trouvés. À l'heure de rentrer chez elle, elle ne peut se déplacer que par bonds dont la longueur est un entier... Va-t-elle pouvoir rentrer à la maison ?

• **En route avec Sébastien Loeb** *Exposé*

Pourrons-nous construire un circuit automobile avec nos trois types de pièces hexagonales ? Et si Sébastien veut changer son entrainement, saurons nous modifier rapidement le circuit ?

Lycée Marguerite Yourcenar (Erstein)

Responsable de l'atelier : Isabelle-Anne David-Metzmeyer
Autres enseignants : Céline Bapst
Chercheur(s) : Myriam Maumy-Bertrand
Sujets :

• **Exploiter une base de données : sujet sensible !** *Exposé court*

Dans le cadre de l'atelier Maths en Jeans, nous avons choisi un sujet traitant de statistiques, sur un thème de société, c'est-à-dire la consommation de tabac, d'alcool ou de drogues, liées à la situation familiale ou sociale par exemple, au sein d'un lycée. Avec l'appui de la statisticienne de l'université de Strasbourg Myriam Maumy-Bertrand, nous avons cherché à déterminer des moyennes à la consommation de ces différents produits, en prenant en compte les différentes difficultés liées au sujet, telles que l'abstentionnisme, ou encore les valeurs extrêmes... Tout cela pour assurer des moyennes les plus fiables possibles.

• **Élaboration d'un questionnaire adressé aux lycéens** *Exposé court*

La clé d'un bon sondage est le questionnaire. Dans ce travail de recherche, nous allons nous intéresser à la construction et à l'élaboration d'un questionnaire. Nous allons nous confronter à la difficulté de la rédaction des questions.

• **Algorithme de tirage d'échantillons** *Exposé court*

L'étude d'une population se fait souvent à travers l'étude d'un échantillon car il est parfois impossible d'avoir accès à toutes les unités statistiques qui composent la population. Il faut donc construire un échantillon qui doit être le plus « représentatif » possible de la population d'étude. En théorie des sondages, il existe plusieurs méthodes d'échantillonnage pour construire un échantillon. Dans le cadre de nos travaux de recherche, nous nous restreindrons aux trois plus simples : tirage simple avec remise à probabilités égales, tirage simple sans remise à probabilités égales et tirage systématique. Un objectif de ce travail sera de coder un algorithme en utilisant le langage Python pour chacune des trois méthodes citées ci-dessus. De plus, la théorie des sondages montre qu'elles ont des propriétés mathématiques différentes que nous allons étudier. Le problème posé est le suivant : soit une population de 200 élèves. Nous souhaiterions savoir quel est le montant qu'ils reçoivent comme argent de poche. Pour répondre à la question nous allons dans un premier temps réaliser une estimation de ce montant à partir d'un échantillon de 40 élèves. Cet échantillon se déclinera suivant les trois méthodes d'échantillonnages citées plus haut.

Lycée Heinrich-Nessel (Haguenau) et Lycée Couffignal (Strasbourg)

Etablissements jumelés
Responsables des atelier : Stéphan Czerniak et Pierre Le Gall
Autres enseignants : Renaud Decque, Rémy Fuchs, Nihad Zolota, Audrey Drui et Didier Martin
Chercheur(s) : Nicolas Juillet
Sujets :

• **Déplacements de jetons** *Exposé court*

n jetons sont placés sur une droite graduée par des entiers naturels. Chaque coup, on déplace un jeton vers la droite du nombre de cases égal au nombre de ses voisins situés immédiatement à droite et à gauche. Un jeton peut aller sur une position déjà occupée ou sauter au-dessus d'autres jetons (il n'est pas bloqué par une position occupée). Le but est d'emmener à l'infini, le plus rapidement possible tous les jetons.

• **Chemins minimaux** *Exposé*

Un certain nombre de points sont placés dans $\mathbb{Z}^2$ (à commencer par 3 points). On cherche à les connecter à moindre coût en construisant un réseau dont les arêtes sont parmi les segments verticaux ou horizontaux de taille 1.

• **Pixels** *Exposé court*

Problème de minimisation de périmètre, à aire constante.

Collège Jacques Monod (Ludres) et Collège de la Craffe (Nancy)

Etablissements jumelés
Responsables des atelier : Pascal Lacovella et Alexis Goutet
Chercheur(s) : Anne De Roton
Sujets :

• **Lost on the Moon** *Exposé court*

Des robots se sont retrouvés pris au piège dans une tempête magnétique à la surface de la lune. Après la tempête, on a constaté que les robots ne pouvait que tourner à gauche et avancer en ligne droite en répétant en boucle un motif de base.

• **Pandémie chez les sélénites** *Exposé*

Un étrange virus affecte le nombre de points de vie des habitants de la lune. Les élèves devront comprendre son fonctionnement et étudier le comportement général de ce virus.

Lycée Bichat (Luneville)

Responsable de l'atelier : Christine Fabry
Autres enseignants : Patrick Marcolé
Chercheur(s) : Robin Riblet
Sujet :

• **Les prisonniers et les chapeaux** *Exposé court*

Un directeur de prison place un chapeau noir ou blanc sur la tête de 100 prisonniers rangés sur un escalier. Chaque prisonnier ne peut voir que les chapeaux des prisonniers sur les marches inférieures. Le directeur interroge le prisonnier du haut sur la couleur de son chapeau. Tous entendent la réponse. Il interroge ensuite chaque prisonnier à tour de rôle. Les prisonniers libérés sont ceux ayant deviné leur couleur. Quelle est la stratégie qui permet de sauver le plus de prisonniers ?

Lycée Vauban (Luxembourg)

Responsable de l'atelier : Suzanne Grosse
Autres enseignants : Elisabeth Koszul
Chercheur(s) : Paul Zimmernann, Florian Liétard
Sujet :

• **Jeu des tours de Stockmeyer** *Exposé*

Trois tours sont placées autour d'une tour centrale. Des disques de largeurs décroissantes, empilées sur la première sont à déplacer sur un autre tour extérieure en passant obligatoirement par la tour centrale et respectant les largeurs des disques. Quelles sont les méthodes les plus efficaces ? Quel est le nombre minimal de déplacements ?

Collège les Hauts de Blémont (Metz)

Etablissement jumelé : Collège Louis Armand (Moulins lès Metz)
Responsable de l'atelier : Sarah-Jane Cagnat

Autres enseignants : Michel Ruiba
Chercheur(s) : Camille Laurent-Gengoux
Sujets :

• **Les nœuds** *Exposé*

Peut-on toujours défaire un lacet noué à ses extrémités ? La réponse est non. Il est toutefois possible de faire des nœuds d'apparence fort compliqués mais qui se délient. Enfin, il y a des « petits » nœud : ceux pour lesquels il suffirait de pouvoir une fois « tricher un peu », défaire puis recoller le nœud. Et il y a ceux pour lesquels il faudra deux fois « tricher ». Et ainsi de suite...

• **Les pavages de Mac-Mahon** *Exposé*

C'est vers 1930 que le mathématicien britannique Mac Mahon, major d'artillerie dans l'Armée des Indes, créa ce jeu. Les carrés de Mac-Mahon sont des carrés identiques, partagés en quatre zones égales selon leurs diagonales. Chaque zone est coloriée et il n'y que trois couleurs possibles. Deux ou plusieurs zones d'un même carré pouvant être d'une même couleur (ou pas). Les pavages de Mac-Mahon sont les pavages à partir de carrés de Mac-Mahon tels que deux côtés adjacents sont de même couleur.

— Combien y a-t-il de carrés de Mac Mahon différents ?
— D'autres questions naturelles peuvent se poser sous forme de jeu à deux (en faisant une sorte de domino) mais aussi sous forme de défi individuel : il s'agit de réaliser une figure d'une certaine forme (un rectangle) partant d'un jeu donné. On peut évidemment imposer des contraintes jusqu'à obtenir un jeu impossible (par exemple en demandant à former un rectangle dont les côtés ont des couleurs données puis en jouant sur la parité des côtés d'une certaine couleur)...
— Et si on utilisait 4 couleurs, et si on en utilisait 5...

Collège Rabelais (Metz)

Responsable de l'atelier : Gilles Schouller
Autres enseignants : Lhoussine Lakouanane
Sujet :

• **Cryptographie** *Exposé court*

Codage par méthode Cesar et perfectionnement de la cryptographie en utilisant Polybe, chiffre ADFGVX et cryptage affine en passant par les nombres binaires et base 3.

Lycée Loritz (Nancy)

Responsable de l'atelier : Claire Moine
Autres enseignants : Olivier Colnel
Chercheur(s) : Erwan Kerrien
Sujets :
• **Amiral Hounsfield** *Exposé*
Un drone survole en ligne droite un quadrillage composée de cases noires et blanches (au hasard). Comment retrouver la configuration des cases avec le moins de survols possible ?
• **HippoHippa** *Exposé*
Peut-on exprimer tous les réels sous forme de fractions infinies ?
• **Magie !** *Exposé*
Comprendre un tour de cartes présenté par le chercheur. Puis l'étudier en détail

Collège et Lycée Saint Dominique (Nancy)

Etablissements jumelés
Responsables des atelier : Veronique Dupuits et Hervé Van Poucke
Chercheur(s) : Bruno Duchesne
Sujets :
• **Dobble** *Exposé court*
Le Dobble est un jeu de cartes présentant 8 symboles chacune. Deux cartes distinctes présentent un et un seul commun. Comment faire pour fabriquer un jeu de Dobble ?
• **Spookies** *Exposé*
Spookies est un jeu de société où les personnages doivent monter les étages d'une maison hantée. Pour accéder à l'étage supérieur, on peut choisir de lancer 2, 3 ou 4 dés. Si la somme des 2 résultats les plus élevés est supérieure ou égale au numéro de l'étage, le joueur monte et gagne plus ou moins de spookies selon le risque (nombre de dés lancés) pris. Dans le cas contraire il descend et perd des spookies. Le joueur qui a le plus de spookies gagne. À chaque étage, quelle est la meilleure stratégie : 2, 3 ou 4 dés ?

• **Le jeu des Bâtonnets** *Exposé court* Deux joueurs se trouvent devant 21 bâtonnets. Chaque joueur à tour de rôle choisit d'en prendre ,2 ou 3. Le joueur qui prend le dernier bâton a perdu. Y a-t-il une stratégie qui permet de gagner à tous les coups ?
• **Elimination binaire** *Exposé court*

15 personnes se placent en cercle. On élimine une personne sur deux jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule personne qui est la gagnante. Où faut-il se placer pour être le vainqueur ?

Collège Les Avrils (Saint Mihiel)

Responsable de l'atelier : Cedric Elophe
Autres enseignants : Romain Petitcolin
Chercheur(s) : Clémence Karmann
Sujets :
• **Le jeu du domino** *Stand*

On dispose d'une grille de $n \times m$ cases et de dominos qui recouvrent 2 cases voisines de cette grille. Deux joueurs jouent l'un contre l'autre et posent tour à tour un domino, le perdant est celui qui ne peut plus poser de dominos. Existe-t-il une stratégie gagnante ?
• **Tri** *Exposé court*

On dispose de n objets de poids tous différents ainsi que d'une balance de Roberval qui peut comparer le poids de deux objets. On veut trier ces n objets dans le sens croissant de leur poids.
• **Le jeu des allumettes** *Stand*

On dispose de 22 allumettes sur une table. Deux joueurs doivent chacun leur tour retirer une, deux ou trois allumette(s). Le joueur qui retire la dernière allumette a perdu. Est-il possible de gagner à tous les coups ?

Collège Rouget de Lisle (Schiltigheim)

Responsable de l'atelier : Michel Zimmer
Chercheur(s) : Michel Mehrenberger
Sujet :
• **Sytème vote ludique : Dénombrement Plickers Cards** *Exposé*

Combien de Plickers Cards peut on réellement créer ? Peut-on dénombrer le nombre maximum de Plickers Cards que l'on peut créer. Quelles sont les conditions pour la création de ces cartons ?

Collège François Truffaut (Strasbourg)

Responsable de l'atelier : Mohammed Aassila
Sujet :

• **Dominos, Triominos, ...** *Stand*

On connaît le jeu de domino. Il y a 28 dominos avec des numéros de 0 à 6. Si on voulait augmenter le nombre de pièces en augmentant le nombre de numéros, combien de pièces aurait-on ? Si on veut avoir 100 pièces différentes, combien de numéros faudrait-il ? Mêmes question avec les triominos. Peut-on inventer d'autres formes de pièces, combien de pièces à chaque fois ? Fabriquer les jeux.

Collège Chepfer (Villers lès Nancy)

Responsable de l'atelier : Ziya Findik
Autres enseignants : Louisette Hiriart
Chercheur(s) : Marie Duflot Kremer
Sujets :

• **Duels de gaufres** *Exposé*

Le duel consiste à manger alternativement un morceaux d'une gaufre sachant que le carré de gaufre en bas à gauche est empoisonné. Manger un morceau de gaufre, c'est choisir un carré de gaufre, le manger ainsi que tous ceux qui sont à sa droite et au dessus. Celui qui mange le carré empoisonné a perdu le duel. Peut-on trouver une stratégie gagnante pour le premier qui va mordre dans la gaufre ?

• **Navettes spéciales** *Exposé*

5 planètes (différenciées par leur couleur : Bleu, Blanc, Vert, Rouge et Jaune) tournent autour d'une même orbite. Chaque planète ne possède plus que 2 pistes d'atterrissage pour accueillir des navettes spatiales. Chaque planète possède 2 navettes spatiales (de même couleur que la planète) et la planète blanche n'en a plus qu'une seule. Les navettes se déplacent en respectant des règles de sécurité : elles ne volent que d'une planète à l'une des ses deux voisines où il faut une piste d'atterrissage libre et il n'y a toujours qu'une seule navette en vol pour éviter toute collision. À partir d'une situation de départ (chaque navette posée sur une planète,

pas forcément la sienne), comment faire pour que, en respectant les règles de sécurité, chaque navette retourne sur sa planète ?

• **Duels de tablettes de chocolat** *Stand*

Le duel consiste à manger alternativement un morceau d'une tablette en chocolat dont le carré en bas à droite est empoisonné. Manger un morceau de la tablette de chocolat, c'est la couper en deux morceaux rectangulaires et manger l'une des 2 parties. Bien sûr, celui qui mange, prend la partie qui ne contient pas le carré empoisonné. À la fin, celui qui mange le carré empoisonné a perdu. Peut-on trouver une stratégie gagnante pour le premier qui va manger un morceau de chocolat ? Programmation du jeu sur Scratch.

Collège Jacques Prévert (Wintzenheim)

Responsable de l'atelier : Yoann Soyeux Chercheur(s) : Marc Wambst Sujets :

• **Les carrés de nombres** *Exposé court*

On dispose en 3 lignes et 3 colonnes les nombres de 1 à 9. Le jeu est de prendre n'importe quel nombre, puis un autre sur une autre ligne et colonne, puis on additionne le nombre restant et les deux choisis. Quelle somme obtient- on ? Est-ce toujours le cas quelque que soit le nombre choisi au départ ? Et sur les carrés de nombres de 1 à 16 ? Mêmes questions. Et sur les carrés de 1 à 25 ? Généraliser. Et quels mouvements peut-on opérer sur les nombres pour que les grilles gardent la même propriété ?

• **Les dominos** *Exposé court*

Un jeu de dominos comporte 28 pièces. Combien de pièces y aurait-il si les nombres sur les dominos allaient jusque 7 ? Jusque 8 ? ... Et si on construisait des triminos ? Combien de pièces ? Mêmes questions qu'avec les dominos.

• **Coupés en deux** *Exposé court*

Comment couper (par une droite) un triangle en deux triangles de même aire ? Et si on impose qu'il passe par un point d'un côté donné, comment faire ? Et pour un quadrilatère ? Et couper en deux parties de même périmètre ?

Collège Don Bosco de Woluwe-St-Lambert (Bruxelles)

Responsable de l'atelier : Céline Serta
Autres enseignants : Ingrid Demulder, Thierry Noël
Chercheur(s) : Yvik Swan
Sujets :

• **Monopoly** *Exposé court*

Quelles sont les cases les plus fréquemment visitées ? Où faut-il se placer pour avoir le plus de chances de gagner ? Quelles stratégies vont permettre de gagner ?

• **Multiplication** *Exposé court*

On considère un nombre et on multiplie ses chiffres pour obtenir un nouveau nombre. On recommence le procédé jusqu'à obtenir un nombre avec un unique chiffre que l'on appelle point final. Quel est le nombre d'étapes nécessaires pour que le procédé aboutisse à un point final ? Peut-on atteindre tous les points finaux ?

• **Dobble** *Exposé court*

Le jeu Dobble vendu dans le commerce est un jeu de 55 cartes rondes qui comportent chacune 8 symboles différents. Si l'on choisit deux cartes quelconques de ce jeu elles ont systématiquement un et un seul symbole en commun. Le jeu de Dobble consiste en gros à trouver le plus rapidement le symbole commun à deux cartes données. Comment construire un tel jeu ? Peut-on construire sur cette base un jeu dont les cartes auraient plus de propriétés que le jeu de Dobble "classique" pour que ce jeu devienne plus intéressant ?

• **Multiplications en chaînes** *Exposé court*

On considère un nombre et on multiplie ses chiffres pour obtenir un nouveau nombre. On recommence le procédé jusqu'à obtenir un nombre avec un unique chiffre que l'on appelle point final. Quel est le nombre d'étapes nécessaires pour que le procédé aboutisse à un point final ? Peut-on atteindre tous les points finaux ?

• **Jeu de cartes** *Exposé court*

Mathémagie Avec un jeu de 21 cartes :

— Etape 1 : Posez les cartes, face visible, les unes après les autres sur trois tas A, puis B, puis C, puis A, puis B, ? Demandez à votre interlocuteur dans quel paquet se trouve la carte qu'il a choisie. Rassemblez les trois paquets, en mettant le paquet indiqué au milieu

des deux autres.
- Etape 2 : refaire l'étape 1.
- Etape 3 : refaire l'étape 1 (éventuellement sans recomposer le paquet de 21 cartes). A l'issue de l'étape 3, la carte choisie sera toujours la quatrième du paquet indiqué, ou la onzième du paquet recomposé.

Que se passe-t-il si on prend un nombre différent de cartes ? Si on fait 4 tas au lieu de 3 ?

Collège Saint Benoît de Maredsous

Responsable de l'atelier : Miguel Dhyne
Autres enseignants : Jean-Marie Renard
Chercheur(s) : Eve-Aline Dubois
Sujets :

• **Balles et ballons** *Exposé*

Quelles formes couper dans du cuir pour faire un ballon de football, un ballon de rugby, un ballon de volleyball ou un ballon de handball ? Quelles applications ?

• **Ce n'est pas moi, c'est lui** *Exposé*

Pierre et Marine sont soupçonnés d'avoir dégradé le laboratoire de l'école. La direction les reçoit en entretien particulier et leur annonce les règles suivantes : — Si un des deux dénonce l'autre, il n'est pas puni et le deuxième doit faire des travaux d'intérêts généraux tous les week-ends de l'année. — Si les deux se dénoncent entre eux, ils ont chacun trois weekends de travaux d'intérêts généraux. — Si les deux refusent de se dénoncer, ils ont tous les deux 4h de retenue, par mesure de précaution. Que doitfaire Marine pour avoir la plus petite punition possible ? Que se passe-t-il si ce dilemme se répète ? Travailler sur des applications pratiques de ce problème.

• **Drôle de voyage** *Exposé court*

Je pars du pôle Nord en suivant le méridien de Paris. Une fois arrivé à l'équateur, je tourne à angle droit et suis l'équateur. Une fois arrivé sur le méridien de Pékin, je tourne à angle droit et suis ce méridien jusqu'au pôle Nord. Quel parcours ai-je suivi ? Quelles en sont les propriétés géométriques ? Quelles lois particularisent un tel objet ?

• **Ils sont fous ces Romains** *Exposé court*

Les mathématiques ont peu progressé sous l'empire romain. Développer des règles de calculs qui auraient pu être enseignées aux petits Romains.

• **Taxi-distance** *Exposé*

Les chauffeurs de taxi à New-York doivent suivre le plan en quadrillage de la ville. Comment mesurent-ils la longueur de leurs déplacements ? Que devient un cercle dans ces conditions ?

• **Théorie des nombres** *Exposé*

Les complexes ont été construit à partir du nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Comment évoluent les opérations réelles appliquées à ces nombres ? Que faire à partir de l'hypothèse suivante $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$?

• **Lapin-Renard** *Exposé court*

Modélisation des populations de lapins et de renards en sachant que :

— La reproduction des lapins est proportionnelle au nombre de lapins.

— La disparition des lapins est liée à la probabilité de rencontrer un renard, proportionnelle au produit du nombre de lapins et du nombre de renards.

— ...

Lycée Classique de Diekirch et Nordstad Lycée (Diekirch)

Etablissements jumelés

Responsable de l'atelier : Carine Bartholmé Autres enseignants : Geneviève Harles Chercheur(s) : Bruno Teheux Sujets :

• **Suite binaire et tour de magie** *Exposé*

Un magicien demande à cinq spectateurs de choisir une carte. En connaissant uniquement la couleur (rouge ou noir) de ces cartes, il parvient à en déterminer leur valeur ! Après avoir présenté le tour de magie, nous en expliquerons le fonctionnement. Il repose sur la possibilité de construire une suite binaire (c'est-à-dire qui ne contient que des 0 et des 1) particulière. Nous donnerons un algorithme permettant de construire une telle suite.

• **Premiers pas en cryptographie** *Exposé*

Comment garder un secret ? Premiers pas en cryptographie. De nos jours, une grande partie de nos communications se fait de manière électronique, au travers des ordinateurs, téléphones, tablettes... Ces communications sont protégées pour qu'une tierce personne ne puisse pas intercepter le contenu des messages. Ainsi, les messages qui transitent par ces canaux sont chiffrés : ils sont « traduits » dans un langage indéchiffrable pour toute personne étrangère à la communication. L'ensemble de ces techniques de protection des communications s'appellent la cryptographie. Dans ce sujet, nous présenterons les deux étapes fondamentales de la cryptographie : le codage (transformer un texte en nombres), et le chiffrement proprement dit. Ces techniques seront illustrées par un exemple de système de codage/chiffrement basé sur le calcul du reste pour la division euclidienne. Nous présenterons également les limites de ce chiffrement.

• **La magie des nombres** *Stand*

La magie des nombres Le magicien demande à un spectateur de choisir cinq nombres dans un tableau carré de 25 nombres. Sans autre information du spectateur, il est capable de deviner la somme de ces cinq nombres (que nous appelons « le nombre magique »). Sur le stand, nous présenterons et expliquerons le tour de magie. Il ne repose que sur des propriétés élémentaires de l'arithmétique, et peut être réalisé par un élève de l'école fondamentale. Nous donnerons également une formule permettant de calculer le nombre magique d'un carré formé des n^2 premiers nombres écrits dans l'ordre croissant, ligne par ligne.

Athénée royal Charles Rogier (Liège)

Responsable de l'atelier : Yvan Haine
Autres enseignants : Eveline Moitroux
Chercheur(s) : Kevin Balhan, Laurent de Rudder
Sujets :

• **Le jeu de Dobble** *Exposé*

Dobble se joue avec des cartes comportant 8 symboles. A un moment donné, deux cartes sont retournées. Le premier qui trouve le symbole commun gagne. Les cartes d'un jeu de Dobble doivent donc être de telle sorte qu'il y ait exactement un symbole en commun. S'il y a n symboles sur chaque carte : Quel nombre maximal de cartes contiendrait le jeu Dobble ? Quel serait alors le nombre total de symboles différents ? Pourriez-vous donner une méthode pour réaliser un tel jeu ?

• **La machine infernale** *Exposé*

Le professeur Eff a inventé une machine formidable : elle permet à deux personnes d'échanger leurs esprits ! Il y a cependant un petit problème : à cause des défenses immunitaires des cerveaux, il n'est possible de faire l'échange que dans un seul sens. Ainsi, si le professeur Eff et le professeur Ash échangent leurs corps, il ne sera plus possible pour eux d'effectuer directement l'échange inverse pour retourner à la situation de départ. Bien conscient de ce problème, le professeur Eff préfère ne pas utiliser sa machine. Cependant, cinq de ses élèves les plus audacieux décident de ne pas écouter ses conseils et s'échangent quand même leur corps de manière à ce que plus aucun esprit ne soit dans son corps de base. Pourront-ils s'en sortir et finalement retrouver leurs identités ?

• **Archimède et Hérion sur la plage** *Exposé*

Alors qu'ils discutaient sur l'île d'Ortygie, le Tyran Hérion proposa un problème au savant Archimède. Il traça deux points dans le sable et lui dit que la distance entre ces deux points était de valeur 1 et qu'en traçant uniquement des cercles et des droites, il avait réussi à construire tous les nombres rationnels. Il mit alors au défi Archimède de construire plus de nombres que lui. Le Tyran dit-il la vérité : peut-on effectivement construire tous les rationnels ? Quant à Archimède, a-t-il une chance de relever le défi ?

• **Le jeu du solitaire** *Exposé*

Le plateau de jeu comporte 5 cases avec 9 trous par case (3 lignes 3 colonnes). Au début, tous les trous contiennent une bille sauf le trou central. Le but du jeu est de n'avoir plus qu'une seule bille sur le plateau. Pour supprimer des billes, il faut que deux billes soient adjacentes et suivies d'un trou vide. La première bille saute par-dessus la deuxième et rejoint le trou vide. La deuxième bille est alors retirée du plateau. Une bille ne peut sauter qu'horizontalement ou verticalement, et une seule bille a la fois. Et si on change de place le trou vide initial ?

Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)

Responsable de l'atelier : Romain Sourdeau
Autres enseignants : Xavier Heeren, Julien Jeunechamps, Pierre Braun, Philippe Counson
Chercheur(s) : Julien Raskin, Céline Esser, Stéphanie Aerts
Sujets :

• **Le jeu des carrés** *Exposé*

On part d'un nombre entier naturel. On calcule la somme des carrés de ses chiffres. On obtient un nouvel entier naturel, sur lequel on recommence la même opération, et ce ainsi de suite. Quel est le comportement des entiers qu'on obtient, en réitérant le procédé à l'infini, quel que soit l'entier de départ ?

• **Un peu de pizza** *Exposé*

Défi pour 2 joueurs face à une pizza : Existe-t-il une stratégie gagnante pour manger plus de pizza que votre adversaire si celui-ci choisit comment découper la-dite pizza mais que vous choisissez la première portion ? Restons civilisé, les morceaux suivants ne pourront être pris que s'ils sont adjacents à l'ouverture créée par la disparition du premier morceau.

• **La grenouille** *Exposé*

Dans une mare, des nénuphars se sont développés en cercle. Une grenouille s'amuse à sauter d'un nénuphar à l'autre avec un angle constant. Passera-t-elle deux fois par le même endroit ? Visitera-t-elle chaque nénuphar, aussi petit soit-il ?

• **Fifa 365** *Exposé*

Un fan de foot débute sa collection de vignettes Panini FIFA 365. La collection complète comprend n vignettes. On suppose qu'elles ne s'achètent qu'une par une, au hasard. Quel est le nombre de vignettes que ce fan devra acheter en moyenne pour compléter son album ?

• **Au secours, plus de papier** *Exposé*

Chaque toilette de St Servais est équipée tous les matins de deux rouleaux de papier. Supposons que chaque usager utilise une seule unité de papier toilette lors de son passage. Il existe cependant deux types d'usagers : les jusqu'au-boutistes et les grands-choisiseurs. Les grands-choisisseurs choisissent toujours le rouleau le plus plein tandis que les jusqu'au-boutistes préfèrent choisir le plus entamé. En fonction de la proportion de jusqu'au-boutistes et grands-choisisseurs, quand un rouleau arrive à son terme, qu'en est-il de l'autre ?

• **Entre les murs** *Exposé*

Un prisonnier se trouve au milieu d'un très long couloir étroit. Au fond de ce couloir, se trouve la sortie de la prison. Un gardien joueur lance au prisonnier le défi suivant : afin de s'évader de la prison, le gardien permet au prisonnier de faire des pas à droite et des pas à gauche, mais le prisonnier ne peut jamais marcher droit. Si, partant du centre, le prisonnier fait deux pas à droite (respectivement à gauche), il touche le mur. Peut-il trouver une suite de Gauche et de Droite de sorte qu'il ne touche jamais le mur ?

Le premier prisonnier s'étant échappé facilement, le gardien complique son défi pour le prisonnier suivant : peut-il trouver une suite de Gauche et de Droite de sorte qu'il ne touche jamais et mur, et que si on ne garde qu'un pas sur deux, il ne touche toujours pas le mur ? Le défi lancé au troisième prisonnier est le suivant : peut-il trouver une suite de Gauche et de Droite de sorte qu'il ne touche jamais le mur, que si on ne garde qu'un pas sur deux, il ne touche pas le mur, et que si on ne garde qu'un pas sur trois, il ne touche toujours pas le mur ? Et ainsi de suite. Combien de prisonniers pouvez-vous aider ? Tous les prisonniers de la prison pourront-ils s'évader ?

• **Dress code à Wall Street** *Exposé*

Un financier de Wall Street en a marre de porter toujours la même chose. Il se lance un défi : réaliser tous les jours un nœud de cravate différent. Pendant combien de jours pourra-t-il tenir ce challenge, sachant qu'un beau nœud de cravate doit satisfaire au dress-code suivant ? C'est la partie large de la cravate qu'on manipule. On commence en plaçant la partie large du côté gauche du corps (au dessus ou en dessous de la partie fine) ; on passe la partie large alternativement au dessus et en dessous du nœud ; on termine en passant la partie large à l'intérieur du nœud pour le fermer.

• **Gratte-ciel** *Exposé*

Des urbanistes imaginent le plan d'une nouvelle ville dont les rues sont orthogonales. Sur chacune des rangées d'immeubles, chaque construction doit avoir un nombre différent d'étages. Combien de plans ces urbanistes peuvent-ils concevoir ?

• **Where is my mind ?** *Exposé*

Le Professeur E a inventé une nouvelle machine ! Elle permet d'échanger les esprits de deux personnes. Le problème, c'est qu'à cause des défenses immunitaires du cerveau, l'échange ne fonctionne que dans un seul sens : deux personnes ayant échangé leurs esprits ne peuvent pas faire l'échange contraire. Un groupe de cinq étudiants du Professeur s'amusent à utiliser la machine et mélangent leurs esprits. Pouvez-vous les aider à récupérer leurs esprits respectifs ?

• **Permutations de chiffres** *Exposé*

Deux dieux jumeaux sont nés dans l'Olympe, Bin et Ter. Étant dieux, ils ont des pouvoirs spéciaux. Bin calcule dans la base 2 et Ter dans la base 3. Ils jouent en appliquant des permutations circulaires sur les chiffres des nombres. Par exemple, Bin(111101) = 111110 ; Bin(10110) = 01011 = 1011 :Les deux Dieux préfèrent quand les nombres diminuent. Par exemple, $7 = 21_3 \xrightarrow{T} 12_3 = 5 = 101_2 \xrightarrow{B} 011_2 = 11_2 = 3 = 10_3 \xrightarrow{T} 01_3 = 1$ Quels sont les nombres qui peuvent être transformés en 1 par les jumeaux ? Existe-t-il des nombres qui peuvent devenir arbitrairement grand ?

Collège Sainte Véronique (Liège) et Colegiul Național din Iași (Roumanie)

Etblissements jumelés
Responsable de l'atelier : Anne Lacroix et Gabriela Zanoschi
Autres enseignants : Sébastien Kirsch, Sandrine schieres, Narcisa Capitaneanu, Tamara Culac, Gabriel Popa
Chercheur(s) : Stéphanie Aerts, Marie Ernst, Julien Leroy, Claudiu Volf, Eugen Varvaruca
Sujets :

• **Fibonacci** *2 exposés, l'un en anglais, l'autre en français*

$w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0100101001001010010 10\cdots$ On associe à w une courbe de la façon suivante : pour chaque position $n \in \mathbb{N}$,

— si $w_n = 1$, tracer un segment de longueur 1 dans la direction précédente ;
— si $w_n = 0$, tracer un segment de longueur 1 après avoir effectué un angle de 90°
  — vers la droite, si n est pair,
  — vers la gauche, sinon.
— Pour $w_0 = 0$, on commencera par tracer un segment horizontal de gauche à droite.

Quelles sont les propriétés de la courbe obtenue ?

• **Billard** *2 exposés, l'un en anglais, l'autre en français*

Une bille lancée avec un angle α dans un billard carré décrit une trajectoire infinie. On code la trajectoire de la bille par une suite de lettres en écrivant a pour les bords « horizontaux » et « b » pour les « verticaux ». Quelles sont les propriétés de la suite obtenue (notamment, en fonction de l'angle initial du lancé) ? En particulier, peut-on reconnaître si une suite de a et de b correspond au codage d'une trajectoire ? Si oui, peut-on retrouver l'angle initial à partir de la suite ?

• **Pixels** *Exposé*

Combien de pixels carrés peut-on utiliser pour dessiner un carré ou un rond sur un écran ? Peut-on disposer n grains régulièrement de manière à remplir des formes simples : triangle, carré, rectangle disque, pyramide, etc. ?

• **Picsou** *Exposé*

L'Oncle Picsou a prévu un jeu pour définir s'il lèguera sa fortune à un de ses trois neveux, Riri, Fifi et Loulou. Dans un sac, Picsou a mis 50 pièces d'argent et une d'or. Riri, Fifi ou Loulou devra : a) Tirer une pièce, noter sa matière (or ou argent) et la mettre de côté b) Tirer une pièce. Si elle est de même matière que la précédente, la mettre de côté et recommencer en b). Si elle est d'une autre matière, la remettre dans le sac et recommencer en a). Si la dernière pièce tirée est en argent, le neveu sera déshérité et enfermé dans un donjon pour le restant de sa vie. Si la dernière pièce tirée est en or, le neveu a directement accès à toute la fortune de Picsou. Que pensez-vous des chances des neveux ? Cela vaut-il la peine de tenter de conquérir la fortune de Picsou ?

• **Nombre de l'année** *Exposé*

Un nombre de l'année est un nombre qui s'écrit avec un seul chiffre répété et est multiple de l'année en cours Par exemple, l'année 2015 possédait des nombres de l'année, le plus petit étant 555 555 555 555 555 555 555 555 555 555. Comment savoir si une année possède des nombres de l'année ? Comment les trouver ?

• **Winning at the Fair** *Exposé en anglais*

Quel est le diamètre maximal d'un disque pouvant être recouvert par 6 disques de 10cm de diamètre ?

• **Prison break** *Exposé en anglais*

Dans une prison, le gardien s'ennuie et joue le jeu suivant avec les trois détenus qu'il garde. Sur le front de chacun il colle une étiquette blanche ou noire. Chaque prisonnier peut voir les étiquettes des autres, mais pas la sienne. Les détenus doivent écrire sur une feuille la couleur de leur propre étiquette ou mettre « passe ». Le gardien gagne si tout le monde a déclaré « passe » ou au moins un devine incorrectement. Les prisonniers ne sont pas autorisés à communiquer entre eux après le début du jeu, mais peuvent définir une stratégie en avance. Par exemple, ils peuvent désigner l'un d'entre eux pour dire « blanc » et les autres « passe ». Dans ce cas, l'équipe à une chance sur deux de gagner. Existe-t-il des stratégies qui permettent une plus grande chance de gagner ?

• **Virus** *Exposé en anglais*

Un virus fort agressif (aucun traitement n'a été trouvé jusqu'à présent) a muté et commence à contaminer les être humains. On suppose que la population humaine est partagée en deux groupes, les contaminés et les sains. La maladie se propage comme suit : dès qu'un individu contaminé rencontre un humain sain, il a une chance sur six de le contaminer. Comment est-ce que le virus va se diffuser au sein de la population ? Combien de rencontres suffiraient pour contaminer une population de 20 personnes ?

Athénée du Luxembourg (Luxembourg)

Responsable de l'atelier : Bernard Felten
Chercheur(s) : Thierry Meyrath
Sujet :

• **Pavages du plan par des dominos** *Exposé*

Nous traitons différents problèmes de pavages avec des pièces de dominos de dimension 2×1. Pour des échiquiers de taille différente, nous abordons la question s'il existe un tel pavage et, le cas échéant, combien de pavages différents sont possibles.

Vendredi 23/03 matin
8h30 – 9h : Accueil des groupes, remise des sacs, orientation et informations.
Bagagerie ; salle …..

Exposé 15' Questions 5'	Exposé 10' Questions 5'

	Amphi 11- Collégiens	Amphi 12 - Lycéens	Amphi 13 - Lycéens
9h – 9h05	**Lancement du congrès** **Mot de bienvenue**		**Lancement du congrès** **Mot de bienvenue**
9h05 – 9h25	**Le jeu des carrés** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)		**Suite binaire et tour de magie** - Lycée Classique de Diekirch
9h25 – 9h45	**Nombre de l'année** - Collège Sainte Véronique (Liège)		**Magie !** - Lycée Loritz (Nancy)
9h45 – 10h	**Elimination binaire** - Collège Saint Dominique (Nancy)		**Lapin-Renard** - Collège Saint Benoît de Maredsous
10h – 10h10	**Pause**		
10h10 – 10h25	**Cryptographie** - Collège Rabelais (Metz)	**Ils sont fous ces Romains** - Collège Saint Benoît de Maredsous	**Exploiter une base de données : sujet sensible !** - Lycée Marguerite Yourcenar (Erstein)
10h25 – 10h45	**Les pavages de Mac-Mahon** - Collège les Hauts de Blémont (Metz)	**Shot'n'Gun** - Lycée Pierre Mendes-France (Epinal) Lycée Louis Lapicque (Epinal)	**Le jeu du solitaire** - Athénée royal Charles Rogier (Liège)
10h45 – 11h05	**Fibonacci** - Collège Sainte Véronique (Liège)	**Where is my mind ?** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)	**En anglais Winning at the Fair** - Colegiul Național din Iași (Iași - Roumanie) Collège Sainte Véronique (Liège), Colegiul Național din Iași (Iași - Roumanie)
11h05 – 11h25	**Un peu de pizza** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)	**Gratte-ciel** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)	**En anglais Virus** - Colegiul Național din Iași (Iași - Roumanie) Collège Sainte Véronique (Liège)
11h30 – 13h40	**Repas au restaurant CROUS Vélodrôme** (4 services : 11h30 – 12h – 12h30-13h)		

Reprise à 14h

Vendredi 23/03 après-midi

	Amphi 11- Collégiens	Amphi 12 - Lycéens	Amphi 13 - Lycéens
14h – 14h20	**La grenouille** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)	**Archimède et Hérion sur la plage** - Athénée royal Charles Rogier (Liège)	**Déplacements de jetons** - Lycée Couffignal (Strasbourg) Lycée Heinrich-Nessel (Haguenau)
14h20 –14h40	**Billiard** - Collège Sainte Véronique (Liège)	**Taxi-distance** - Collège Saint Benoît de Maredsous	**Amiral Hounsfield** - Lycée Loritz (Nancy)
14h40 – 15h	**Pixels** - Collège Sainte Véronique (Liège)	**Pavages du plan par des dominos** - Athénée du Luxembourg (Luxembourg)	**Premiers pas en cryptographie** - Lycée Classique de Diekirch
15h – 15h10	**Pause**		
15h10 –15h30	**Navettes spéciales** - Collège Chepfer (Villers lès Nancy)	**Théorie des nombres** - Collège Saint Benoît de Maredsous	**La machine infernale** - Athénée royal Charles Rogier (Liège)
15h30 – 5h45	**Lost on the Moon**. - Collège Jacques Monod (Ludres) Collège La Craffe (Nancy)	**Monopoly** - Collège Don Bosco de Woluwe-St-Lambert (Bruxelles)	**Elaboration d'un questionnaire adressé aux lycéens** - Lycée Marguerite Yourcenar (Erstein)
15h45 – 16h	**Dobble** - Collège Saint Dominique (Nancy)	**Multiplication** - Collège Don Bosco de Woluwe-St-Lambert (Bruxelles)	**Drôle de voyage** - Collège Saint Benoît de Maredsous
16h – 16h30	**Pause goûter**		
16h30 – 16h45	**Les dominos** - Collège Jacques Prévert (Wintzenheim)	**Dobble** - Collège Don Bosco de Woluwe-St-Lambert (Bruxelles)	**Pixels** - Lycée Heinrich-Nessel (Haguenau)
16h45 – 17h	**Tri** - Collège Les Avrils (Saint Mihiel)	**Jeu de cartes** - Collège Don Bosco de Woluwe-St-Lambert (Bruxelles)	**Algorithme de tirage d'échantillons** - Lycée Marguerite Yourcenar (Erstein)
17h – 18h	**Discussion Chercheur / collégiens Laurent Thomann**	**Réunion enseignants**	**Discussion Chercheur / Lycéens Anne Gégout**
18h30 – 20h	**Repas au restaurant CROUS Vélodrôme.** (3 services : 18h30 – 19h – 19h30)		

20h10 : Soirée de cérémonie, Amphi 11
- Courts discours officiels
- conférence de vulgarisation par Robin Jamet (Médiateur scientifique au département Mathématiques du Palais de la Découverte).

21h30 : Fin de soirée

Samedi 24/03 matin

	Amphi 11- Collégiens	Amphi 12 - Lycéens	Amphi 13 - Lycéens
9h – 9h20	**Jeu des tours de Stockmeyer** - Lycée Vauban (Luxembourg)	**HippoHippa** - Lycée Loritz (Nancy)	**Fifa 365** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)
9h20 – 9h40	**Pandémie chez les sélénites.** - Collège Jacques Monod (Ludres) Collège La Craffe (Nancy)	**Les prisonniers et les chapeaux** - Lycée Bichat (Luneville)	**En anglais Billiard** - Colegiul Național din Iași (Iași - Roumanie) Collège Sainte Véronique (Liège)
9h40 – 10h	**Duels de gaufres** - Collège Chepfer (Villers lès Nancy)	**Entre les murs** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)	**En anglais Prison break** - Colegiul Național din Iași (Iași - Roumanie) Collège Sainte Véronique (Liège)
10h – 10h15	**Le jeu des Bâtonnets** - Collège Saint Dominique (Nancy)	**La sauterelle cuite** - Lycée Pierre Mendes-France (Epinal) Lycée Louis Lapicque (Epinal)	**En anglais Drawing Fibonacci** - Colegiul Național din Iași (Iași - Roumanie) Collège Sainte Véronique (Liège) *(se termine à 10h20)*
10h15 – 10h30	**Coupés en deux** - Collège Jacques Prévert (Wintzenheim)	**Multiplications en chaînes** - Collège Don Bosco de Woluwe-St-Lambert (Bruxelles)	
10h30 – 10h45	**Pause et installation des stands à l'atrium second cycle**.		
10h45 – 13h30	**Visite des stands** **En particulier les présentations sur le stand seulement :** **Collégiens : Duels de tablettes de chocolat** - Collège Chepfer (Villers lès Nancy), **Dominos, Triominos, ...** - Collège François Truffaut (Strasbourg), **Le jeu du domino** - Collège Les Avrils (Saint Mihiel), **Le jeu des allumettes** - Collège Les Avrils (Saint Mihiel). **Lycéens : La magie des nombres** - Lycée Classique de Diekirch Nordstad Lycée (Diekirch) **A partir de 11h30 : repas par groupes en alternance** (sandwiches de la cafétéria CROUS de la Faculté des Sciences et Techniques) (4 services : 11h30 – 12h – 12h30 – 13h)		
13h30 – 13h45	**Démontage des stands et rangement de l'atrium**		

Samedi 24/03 après-midi

13h45 – 14h	**Photo de groupe du 29e congrès 2018 à Nancy**		
	Amphi 11- Collégiens	**Amphi 12 - Lycéens**	**Amphi 13 - Lycéens**
14h – 14h20	**Les nœuds** - Collège les Hauts de Blémont (Metz)	**Spookies** - Lycée Saint Dominique (Nancy) Collège Saint Dominique (Nancy)	**Chemins minimaux** - Lycée Couffignal (Strasbourg) Lycée Heinrich-Nessel (Haguenau)
14h20 – 14h 40	**Picsou** - Collège Sainte Véronique (Liège)	**En route avec Sébastien Loeb** - Lycée Pierre Mendes-France (Epinal) Lycée Louis Lapicque (Epinal)	**Au secours, plus de papier** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)
14h40 – 15h	**Sytème vote ludique: Dénombrement Plickers Cards** - Collège Rouget de Lisle (Schiltigheim)	**Le jeu de Dobble** - Athénée royal Charles Rogier (Liège)	**Permutations de chiffres** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)
15h – 15h20	**Les carrés de nombres** - Collège Jacques Prévert (Wintzenheim)	**Ce n'est pas moi, c'est lui** - Collège Saint Benoît de Maredsous	**Dress code à Wall Street** - Centre scolaire Saint-Benoît Saint-Servais (Liège)
15h20 – 15h40	**Le facteur du futur** - Collège Pilâtre de Rozier (Ars sur Moselle)	**Balles et ballons** - Collège Saint Benoît de Maredsous	
15h40 – 16h15	**Pause goûter**		
16h15 – 16h50	**Conférence collégiens Ilaria Lucardesi**	**Conférence lycéens Sylvain Lefebvre**	
16h50 – 17h	**Cérémonie de clôture**	**Cérémonie de clôture**	

17h : Départs des groupes et rangement pour l'équipe locale.

Nos partenaires locaux

Nos partenaires lors du congrès

Calendrier

Avant la rentrée :

Les enseignants désireux de lancer un atelier prennent contact avec la coordination MeJ Belgique.

À la rentrée :

• Les enseignants font de la publicité pour MeJ dans leur l'école et l'initiative est proposée au plus grand nombre d'élèves possible.

• Les chercheurs viennent faire une présentation des sujets de recherche aux élèves intéressés.

• Les élèves choisissent un sujet.

• Inscription des ateliers sur www.mathenjeans.be.

Fin octobre :

Inscription au congrès et réservation des logements.

Printemps :

Le congrès.

Avant la fin de l'année scolaire :

Rédaction et soumission d'un article.

Plus d'infos?
www.mathenjeans.be

LIÈGE université

ISBN 978-2-9601143-9-3
EAN 9782960114393