Les palais de Dédale

François Braibant, Thomas Devos et Ariane Vincent

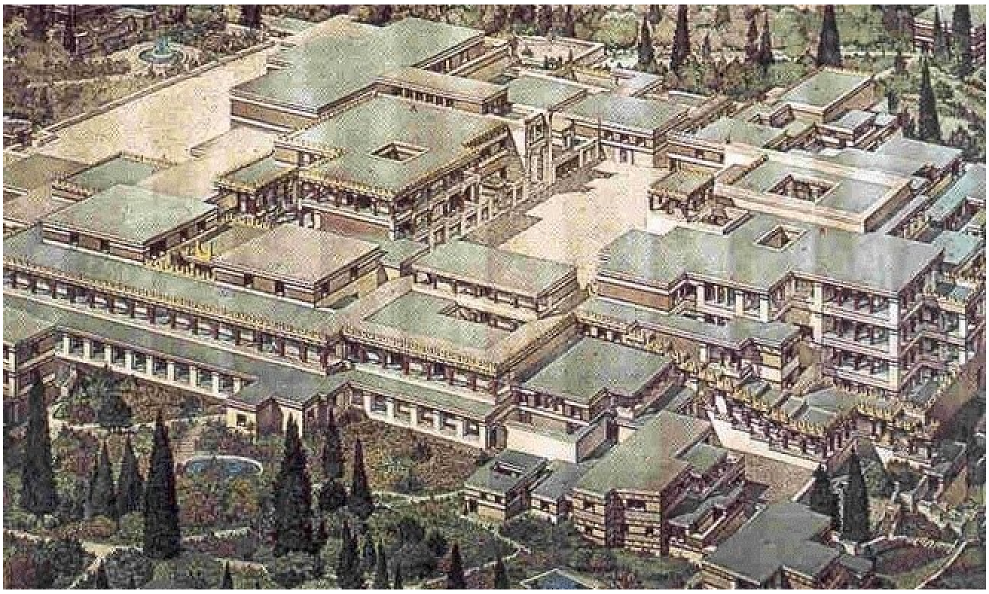
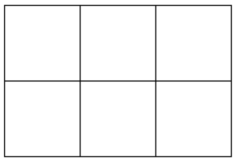


Table des matières

1 Architecture en Crête

Lorsque l'architecte Dédale arriva sur l'île de Crête, le roi Minos lui demanda de construire des palais un peu particuliers. Chaque Palais devait être constitué de deux rangées de trois pièces comme sur le dessin ci-dessous (on dit alors que le palais est de taille 2×3).



De plus, pour chaque pièce, il devait y avoir deux fois une paire de murs faits avec les mêmes briques (mais les quatre murs d'une pièce ne pouvaient pas tous être construits avec les mêmes briques). Sachant que, en Crête, il n'existe que trois types de briques différentes, combien de palais Dédale pourra-t-il construire ? Plus généralement, combien pourra-t-il en construire si les Palais sont des rectangles de tailles $a \times b$? Remarque : le mur commun à deux pièces contiguës est unique.

2 Analyse combinatoire

Afin de résoudre le problème, nous avons dû recourir à un nouvel outil : l'analyse combinatoire . Cette notion mathématique est la plus utile lors de la résolution de problèmes de dénombrements comme celui-ci. Suite à de nombreux essais, nous avons en effet constaté que celle-ci s'avérait être la plus concluante. Dans les lignes suivantes, nous allons donc vous expliquer les principales notions d'analyse combinatoire (sans répétition) que nous avons utilisées.

2.1 Permutations et factorielle

Une *permutation* (sans répétition) de n objets est un groupement ordonné de ces n objets. Deux permutations ne diffèrent que par l'ordre de leurs éléments.
Soit P_n le nombre de permutations différentes de n objets.

2.1.1 Exemple

Si $n = 4$: on a quatre objets A ; B ; C ; D. Dessinons l'arbre nous donnant les différentes permutations.

Il y a 4 possibilités pour choisir l'objet placé en 1^{re} position, puis 3 possibilités pour le 2^{e} objet choisi et enfin 2 possibilités pour le 3^{e}.
Donc $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

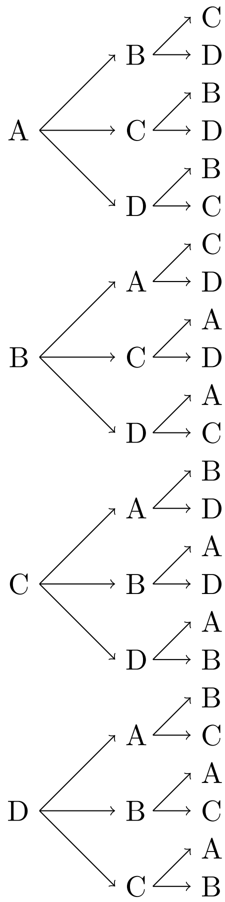


FIGURE 1 – Toutes les permutations de 4 objets

2.1.2 Nombre de permutations

Pour répertorier toutes les possibilités, nous avons utilisé une méthode qui consistait à désigner le premier élément du groupement (choisi parmi les n) puis le deuxième élément (choisi parmi les $n-1$ restants) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un élément. Ce raisonnement nous permet d'élaborer la formule suivante :

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1 = n!$$

Nous venons d'établir la formule donnant le nombre de permutations différentes de n éléments. Cette formule est plus concise si on utilise la factorielle, symbolisée par " ! " et définie par la factorielle d'un naturel non nul est égale au produit de tous les naturels non nuls inférieurs ou égaux à cet entier.

- $1! = 1$

- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

2.2 Arrangements

Un *arrangement* de p objets distincts pris parmi n $(p \leq n)$ est un groupement ordonné de p objets pris parmi les n.
Deux arrangements diffèrent par la nature et l'ordre des objets.

2.2.1 Exemple

Soient cinq objets A, B, C, D et E.

- $ABCD$ et $ABCE$ sont deux arrangements différents qui diffèrent par la nature de leurs objets.
- $ABCD$ et $ACBD$ sont deux arrangements différents qui diffèrent par l'ordre de leurs objets.
- $ABCD$ et $EADC$ sont deux arrangements différents qui diffèrent par l'ordre et la nature de leurs objets.

2.2.2 Nombre d'arrangements

Soit A_n^P, le nombre de d'arrangements (sans répétition) de p éléments pris parmi n

Pour choisir le premier objet, on a n possibilités de choix.
Pour choisir le deuxième objet, on a $n-1$ possibilités de choix.
Pour choisir le troisième objet, on a $n-2$ possibilités de choix.
Pour choisir le $p^{\text{ème}}$ objet, on a $n-p+1$ possibilités de choix.
D'où

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \cdot (n-1) \dots (n-p+1) \\ &= n \cdot (n-1) \dots (n-p+1) \cdot \frac{(n-p) \dots 2 \cdot 1}{(n-p) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

2.3 Combinaisons

Une *combinaison* de p objets distincts pris parmi n $(p \leq n)$ est un groupement de p objets pris parmi les n.
Deux combinaisons ne diffèrent que par la nature des objets.

2.3.1 Exemples

Soient cinq objets A, B, C, D et E.

- ABC et EDA sont deux combinaisons différentes.
- $BDCA$ et $CBDA$ sont deux combinaisons identiques.

2.3.2 Nombre de combinaisons

Soit C_n^P le nombre de combinaisons (sans répétition) de p éléments pris parmi les n.
A partir d'une combinaison de p éléments pris parmi n, on peut engendrer $p!$ arrangements différents en permutant les p éléments. On peut conclure que le nombre de combinaisons est donné par la formule :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

3 Solution du problème

Maintenant que nous avons tous les outils nécessaires, nous allons entamer la résolution de notre problème.
Pour ce faire nous procéderons par construction. Ainsi, nous allons partir d'un palais d'une seule pièce auquel nous allons en ajouter d'autres afin d'obtenir le palais recherché. Par la suite, nous généraliserons.

3.1 Convention

Pour faciliter la compréhension nous avons associé chaque matériau à une couleur.

3.2 Étape 1 : Nombre de palais d'une seule pièce

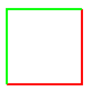


FIGURE 2 – Exemple d'un palais à une pièce

Le nombre de possibilités de construire un palais dépend du nombre de couleurs utilisées et de leur agencement dans la pièce. Prenons ces différents facteurs en compte afin de déterminer le nombre de possibilités de palais différents.
Pour rappel, nous disposons de trois couleurs différentes et chaque pièce est

composée de deux paires de murs de couleurs différentes. Nous avons donc besoin de deux couleurs pour construire une pièce d'où nous choisissons deux couleurs parmi trois ce qui donne C_3^2 possibilités.
Une paire de murs doit être attribuée à chaque couleur. Ainsi, en attribuant une paire de murs à l'une des deux couleurs, la deuxième paire se verra attribuer la seconde couleur par défaut. Nous choisissons donc deux murs parmi les quatre : C_4^2 possibilités

Remarque : Puisque l'ordre dans lequel nous choisissons les couleurs n'importe pas, seule la nature des objets diffère. Nous utilisons des combinaisons. Il en est de même pour les murs.

Le nombre de palais d'une pièce (appelé N_0) est égal à

$$N_0 = C_3^2 \cdot C_4^2 = 3 \cdot 6 = 18.$$

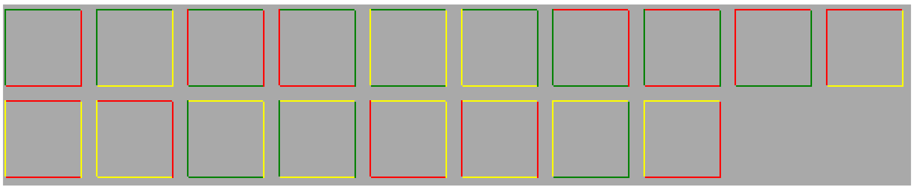


FIGURE 3 – 18 palais différents d'une pièce construits à partir de 3 couleurs

3.3 Étape 2 : Nombre de pièces ayant un mur imposé

Dans cette étape, nous recherchons le nombre de pièces différentes que nous pouvons construire, adjacentes à une pièce donnée. Dans le schéma ci-dessous, la pièce bleue (à gauche) est connue et on cherche le nombre de façons différentes de construire la pièce rouge (à droite).

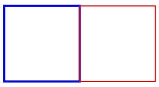


FIGURE 4 – Pièce ayant un mur imposé

Pour rappel, le mur commun à deux pièces ne peut avoir deux couleurs différentes. Il y a donc des contraintes sur le choix de la couleur. Nous parlerons de *mur imposé* pour désigner un mur dont la couleur est prédéfinie par une quelconque contrainte. Un mur imposé réduit non seulement le choix de

positionnement des couleurs dans la pièce mais aussi le nombre de couleurs à choisir.
Cherchons le nombre de possibilités d'une pièce ayant un mur imposé :

- Une couleur nous est imposée, nous devons choisir la deuxième parmi les deux restantes : $C_2^1 = 2$ possibilités.
- Pour déterminer la couleur de chaque mur, soit on choisit le deuxième mur (parmi les trois restants) ayant la couleur du mur imposé, soit on choisi deux murs (parmi les trois restants) pour l'autre couleur : $C_3^1 = C_3^2 = 3$ possibilités.

Le nombre de pièces différentes ayant un mur imposé (appelé N_1) est égal à

$$N_1 = C_2^1 \cdot C_3^1 = 2 \cdot 3 = 6$$

3.3.1 Nombre de palais de 2 pièces

Le nombre de palais de deux pièces vaut $18 \cdot 6 = 108$.

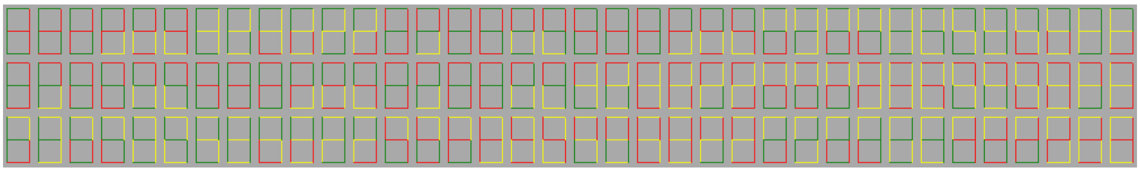


FIGURE 5 – Représentation des différents palais de deux pièces avec trois couleurs

3.3.2 Nombre de palais de a pièces en longueur

On peut utiliser ces formules pour trouver le nombre de palais de a pièces de long. En effet, après avoir placé la première pièce, toutes les pièces suivantes auront un mur imposé.

Le nombre de palais de a pièces de long est donc égal à :

$$N_0 \cdot N_1^{a-1} = 18 \cdot 6^{a-1}.$$

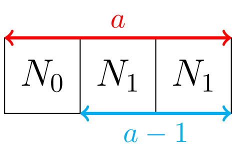


FIGURE 6 – Nombre de palais $a \times 1$

3.4 Étape 3 : Nombre de pièces ayant 2 murs imposés

Dans cette étape, nous recherchons le nombre de pièces différentes que nous pouvons construire, adjacentes à deux pièces données. Dans le schéma ci-dessous, les pièces noires sont connues et on cherche le nombre de façons différentes de construire la pièce rouge (en bas à droite) qui a donc deux murs imposés.

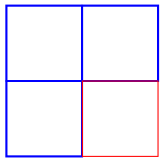


Figure 7 – Pièce ayant 2 murs imposés

Nous devons distinguer deux cas :

- Premier cas : les 2 murs sont de la même couleur. On choisit alors la deuxième couleur parmi les 2 restantes : C_2^1 possibilités.
- Deuxième cas : les 2 murs ont des couleurs différentes. On choisit donc le deuxième mur qui aura la même couleur que le premier parmi les 2 murs restants, le dernier mur étant alors automatiquement de l'autre couleur : C_2^1 possibilités.

Quel que soit la configuration le nombre de pièces ayant deux murs imposés (appelé N_2) vaut

$$N_2 = C_2^1 = 2.$$

3.5 Solution du problème initial

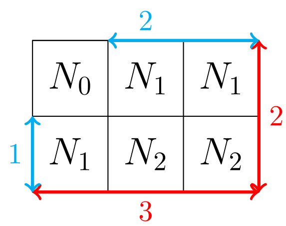


Figure 8 – Nombre de palais 3×2

On peut utiliser ces formules pour trouver le nombre de palais de taille 2×3. En effet, pour la première ligne et la première colonne, nous avons une situation identique à celle d'un palais de taille $1 \times a$, la première pièce étant commune au deux. Toutes les pièces restantes - il y en a 2 - ont deux murs imposés. Cette construction va nous permettre d'établir la formule pour un palais de taille 2×3.

Le nombre de palais distincts de taille 2×3 vaudra donc

$$N_0 \cdot N_1^3 \cdot N_2^2 = 18 \cdot 6^3 \cdot 2^2 = 15\ 552.$$

Nous avons trouvé la solution à notre problème de base, Dédale pourra construire 15 552 palais différents. Dans la suite du document, vous trouverez différentes généralisations de ce problème de base.

4 Généralisations

4.1 Palais de dimensions $a \times b$

On peut utiliser les formules vues précédemment pour trouver le nombre de palais de longueur $a \times b$. En effet, pour la première ligne et la première colonne, nous avons une situation identique à celle d'un palais de taille $1 \times a$, la première pièce étant commune au deux. Toutes les pièces restantes - il y en a $(a-1) \cdot (b-1)$ - ont deux murs imposés.

Le nombre de palais de taille $a \times b$ est égal à :

$$N_0 \cdot N_1^{a-1} \cdot N_1^{b-1} \cdot N_2^{(a-1)\cdot(b-1)}.$$

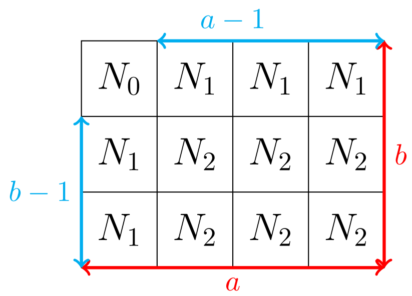


FIGURE 9 – Palais de taille $a \times b$

En remplaçant N_0, N_1 et N_2 par leurs valeurs respectives dans la formule précédente, on obtient :

$$18 \cdot 6^{a-1} \cdot 6^{b-1} \cdot 2^{(a-1)\cdot(b-1)} = 18 \cdot 6^{a+b-2} \cdot 2^{(a-1)\cdot(b-1)} = 3^{a+b} \cdot 2^{ab}.$$

4.2 Généralisations du nombre de couleurs

Soit k le nombre de couleurs différentes. Avec $k \geq 2$. Le raisonnement sera le même que dans la première partie. On trouvera toujours le nombre de possibilités d'une pièce en fonction des couleurs utilisées et de leur agencement dans la pièce.

4.2.1 Étape 1 : Nombre de palais d'une seule pièce

- Choisir les deux couleurs parmi k : C_k^2 possibilités.
- Choisir deux murs parmi quatre : C_4^2 possibilités.

L'agencement des murs et des pièces ne dépendant pas du nombre total de couleurs parmi lesquelles choisir (une pièce aura toujours deux couleurs), seul le nombre de possibilités de choix des couleurs diffère du problème initial, le reste du raisonnement est donc identique à celui de la première partie.
Le nombre de palais d'une pièce (appelé N_0) est égal à

$$N_0 = C_k^2 \cdot C_4^2.$$

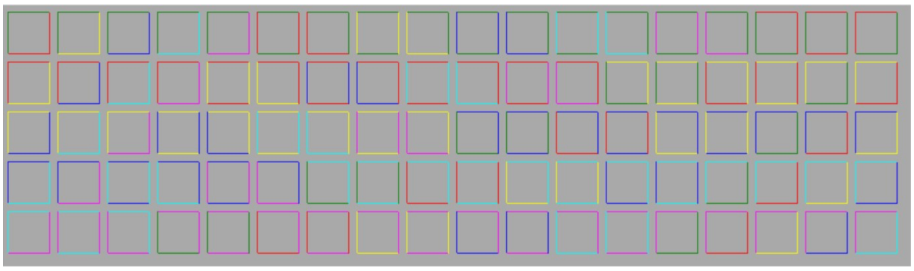


FIGURE 10 – Représentation des 90 palais distincts d'une pièce dont les murs sont de 2 couleurs prises parmi 6

4.2.2 Étape 2 : Nombre de pièces ayant un mur imposé

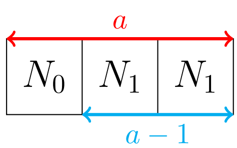
- Une couleur nous est imposée, nous devons choisir la deuxième parmi les $k-1$ restantes : $C_{k-1}^1 = k-1$ possibilités.
- Pour déterminer la couleur de chaque mur, soit on choisit le deuxième mur (parmi les trois restants) pour la couleur ayant un mur imposé, soit on choisi deux murs (parmi les trois restants) pour l'autre couleur : $C_3^1 = C_3^2 = 3$ possibilités.

Le nombre de pièces différentes ayant un mur imposé (appelé N_1) est égale à

$$N_1 = C_{k-1}^1 \cdot C_3^1 = 3 \cdot (k-1).$$

Comme au chapitre précédent (point 3.3.2), nous pouvons utiliser ces formules pour trouver le nombre de palais de a pièces de long qui est égal à

$$N_0 \cdot N_1^{a-1}.$$



4.2.3 Étape 3 : nombre de pièces ayant 2 murs imposés

On distingue deux cas :

- Soit les 2 murs sont de la même couleur. On choisit alors la deuxième couleur parmi les $k-1$ restantes : C_{k-1}^{1}.
- Soit les 2 murs ont des couleurs différentes. On choisit donc le deuxième mur qui aura la même couleur que le premier parmi les 2 murs restants : C_2^1.

En fonction du cas dans lequel on se trouve, on aura une combinaison différente. L'analyse combinatoire ne nous permettra pas de résoudre ce problème. Nous allons devoir utiliser une autre technique.

Autre méthode Pour construire une pièce ayant deux murs imposés, nous avons vu que l'analyse combinatoire ne nous était d'aucune utilité. Nous allons donc utiliser une autre méthode qui consiste à comparer deux méthodes différentes de construction d'un même palais :

- La première façon ne devra utiliser que des pièces n'ayant aucun mur ou un mur imposé.
- La deuxième façon devra comporter au moins une pièce dont deux murs sont imposés. Les autres pièces peuvent, quant à elles, avoir jusqu'à deux murs imposés.

Construisons un palais de trois pièces de long en appliquant la méthode détaillée ci-dessus.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline N_0 & N_1 & N_1 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline N_0 & N_2 & N_0 \\ \hline\end{array}$$

Les pièces placées en premier ont une inscription rouge et les pièces placées ensuite ont une inscription cyan.

Calculons le nombre de possibilités des deux palais dessinés :

- Le nombre de possibilités de construire le palais de gauche est

$$N_0 \cdot N_1^2.$$

- Le nombre de possibilités de construire le palais de droite est égal à

$$N_0^2 \cdot N_2.$$

Les palais de gauche et de droite étant identiques, ces deux nombres doivent être égaux.

$$N_0 \cdot N_1^2 = N_0^2 \cdot N_2 \Leftrightarrow N_2 = \frac{N_1^2}{N_0}.$$

Grâce à cette technique, nous avons réussi exprimer N_2 en fonction du nombre de couleurs puisque sa valeur dépend de N_0 et de N_1 qui sont déjà déterminés en fonction du nombre k de couleurs.

Remarque importante

Ce résultat nous semblait une bonne généralisation du cas précédent ($k = 3$) puisqu'il nous permettait de retrouver la valeur de N_2 obtenue précédemment. En effet, si $k = 3$, on a $N_0 = 18$ et $N_1 = 6$ qui donnent $N_2 = \frac{6^2}{18} = 2$.

Cependant, bien que ne voyant pas la faille dans le raisonnement, nous avons eu la désagréable surprise de remarquer que ce résultat est erroné. En effet, pour les valeurs de $k > 3$, le nombre N_2 n'est pas entier puisque $N_0 = 6 \cdot \frac{k!}{(k-2)! \cdot 2!} = 3k \cdot (k-1)$ et $N_1 = 3 \cdot (k-1)$ donnent

$$N_2 = \frac{9(k-1)^2}{3k(k-1)} = \frac{3(k-1)}{k}$$

Nous avons poursuivi nos réflexions comme si ce nombre N_2 était connu, tout en sachant que des résultats numériques corrects ne peuvent pas être obtenus avec notre valeur de N_2.

4.2.4 Formule générique

Le nombre de palais distincts de dimensions $a \times b$ avec k couleurs vaut

$$N_0 \cdot N_1^{a-1} \cdot N_1^{b-1} \cdot N_2^{(a-1)\cdot(b-1)}$$

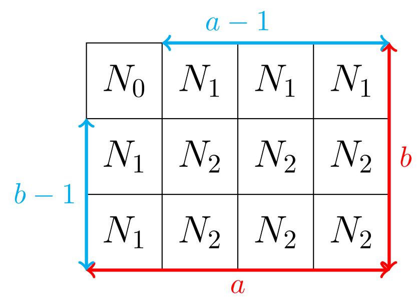


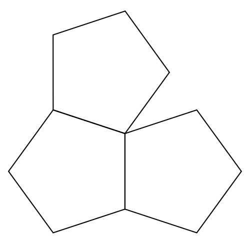
FIGURE 11 – Palais de taille $a \times b$ avec k couleurs

Remarque : La formule est, en apparence, la même que pour des palais de trois couleurs (voir partie 3.1). En effet, le nombre de couleurs ne change pas la disposition des pièces dans le palais. En revanche, ce nombre de couleurs aura une influence sur la valeur de N_0, N_1 et N_2 (voir paragraphes 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3).

5 Généralisations : autres formes de pièces

5.1 Quelles sont les différentes formes possibles ?

Avertissement : nous ne mentionnerons plus le carré dans cette partie.



Les pièces des palais doivent obligatoirement s'emboîter les unes dans les autres de sorte à ne laisser aucun vide entre les pièces. Pour cela, il faut que l'amplitude des angles intérieurs du polygone régulier soit un diviseur de 360. Les trois seuls polygones réguliers qui conviennent sont le carré, le triangle équilatéral et l'hexagone.

5.1.1 Démonstration

Chaque angle d'un pentagone régulier a une amplitude de 108 ˚. Ce nombre n'étant pas diviseur de 360, on ne peut pas faire de palais avec des pièces pentagonales.

Pour tous les polygones ayant plus de 6 côtés, l'amplitude de leurs angles intérieurs est comprise dans l'intervalle $]120, 180[$ degré. Dans ce cas, x n'est pas un diviseur de 360.

5.2 Hexagones

5.2.1 Reformulation des contraintes

Nous avons décidé de garder la règle nous demandant d'avoir des paires de murs de couleurs différentes. Nous aurons donc trois paires de murs par hexagone. Le nombre k de couleurs doit être supérieur ou égal à 3.
Même si d'autres dispositions des pièces sont envisageables, nous avons décidé de faire des palais en forme de fleurs comme vous illustré ci-dessous.

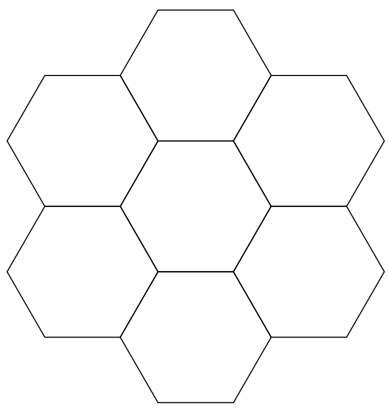


FIGURE 12 – Palais en forme de fleur dont les pièces sont des hexagones réguliers

5.2.2 Étape 1 : nombre de palais d'une seule pièce

- Nous avons besoin de trois paires de murs différentes et donc de trois couleurs par hexagone. D'où on choisit trois couleurs parmi k : C_k^3
- On choisit la paire de murs à laquelle on attribue l'une des trois couleurs, ce qui revient à choisir deux murs parmi six : C_6^2 possibilités
- on choisit deux murs parmi les quatre restants pour l'une des deux autres couleurs : C_4^2 possibilités

Le nombre de palais d'une pièce (appelé N_0) est égale à

$$N_0 = C_k^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2$$

5.2.3 Étape 2 : nombre de pièces ayant un mur imposé

- Une couleur est imposée par le mur. Il nous reste à choisir deux couleurs parmi les $k-1$ restantes : C_{k-1}^2 possibilités
- On choisit le deuxième mur pour la couleur du mur imposés. On choisit donc un mur parmi les cinq restants : C_5^1 possibilités
- Pour l'une des deux autres couleurs, on choisit deux murs parmi les quatre restants : C_4^2 possibilités

Le nombre de pièces différentes ayant un mur imposé (appelé N_1) est égal à

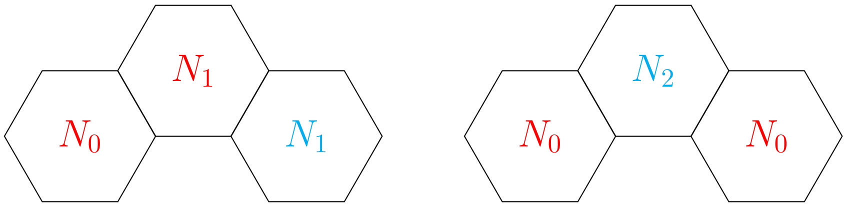
$$N_1 = C_{k-1}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2$$

5.2.4 Étape 3 : nombre de pièces ayant deux murs imposés

Comme pour les palais ayant des pièces carrées, l'analyse combinatoire ne nous sera d'aucune utilité pour définir N_2. Pour trouver la valeur de N_2, nous utiliserons la même technique que pour les palais rectangulaires, c'est-à-dire que nous construirons un palais identique de deux manières différentes :

- La première façon ne devra utiliser que des pièces n'ayant aucun mur ou un mur imposé.
- La deuxième façon devra comporter au moins une pièce dont deux murs sont imposés. Les autres pièces peuvent, quant à elles, avoir jusqu'à deux murs imposés.

Construisons un palais de trois pièces de long en appliquant la méthode détaillée ci-dessus.



Les pièces placées en premier ont une inscription rouge et les pièces placées ensuite ont une inscription cyan.

Calculons le nombre de possibilités de construire chacun des deux palais dessinés :

- Le nombre de possibilités de construire le palais de gauche est

$$N_0 \cdot N_1^2$$

- Le nombre de possibilités de construire le palais de droite est égal à

$$N_0^2 \cdot N_2$$

Les palais de gauche et de droite étant identiques, ces deux nombres doivent être égaux.

$$N_0 \cdot N_1^2 = N_0^2 \cdot N_2 \Leftrightarrow N_2 = \frac{N_1^2}{N_0}$$

Remarque importante

Ce résultat nous semblait une bonne généralisation du cas précédent (pièces carrées) puisqu'il nous permettait de retrouver la même expression de N_2 en fonction de N_0 et N_1.

Cependant, bien que ne voyant pas la faille dans le raisonnement, nous avons eu la désagréable surprise de remarquer que ce résultat, lui aussi, est erroné.
En effet, pour certaines valeurs de $k > 3$, le nombre N_2 n'est pas entier puisque

$$N_0 = 90 \cdot \frac{k!}{(k-3)! \cdot 3!} = 15k \cdot (k-1) \cdot (k-2)$$

et

$$N_1 = 30 \cdot \frac{(k-1)!}{2 \cdot (k-3)!} = 15(k-1) \cdot (k-2)$$

donnent

$$N_2 = \frac{225 \cdot (k-1)^2(k-2)^2}{15 \cdot k(k-1)(k-2)} = \frac{15 \cdot (k-1)(k-2)}{k}$$

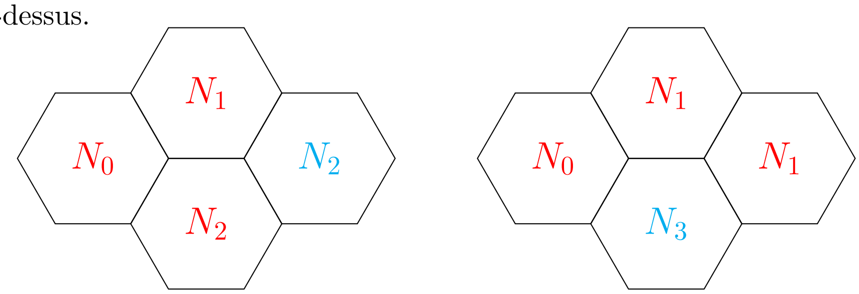
qui est entier pour $k = 5$ ou $k = 6$ mais ne l'est pas pour $k = 4$ ou $k = 7$.
Nous avons poursuivi nos réflexions comme si ce nombre N_2 était connu, tout en sachant que des résultats numériques corrects ne peuvent pas être obtenus avec notre valeur de N_2.
Cette remarque vaut également pour les nombres N_3 et N_4 établis ci-dessous.

5.2.5 Étape 4 : nombre de pièces ayant trois murs imposés

Pour définir le nombre de pièces ayant trois murs imposés (appelé N_3), nous utiliserons la même technique que précédemment

- La première façon devra utiliser des pièces n'ayant pas plus de deux murs imposés
- La deuxième façon devra comporter au moins une pièce dont trois murs sont imposés. Les autres pièces peuvent, quant à elles, avoir jusqu'à trois murs imposés.

Construisons un palais de quatre pièces en appliquant la méthode détaillée ci-dessus.



Les pièces placées en premier ont une inscription en rouge et les pièces placées ensuite ont une inscription cyan.

Calculons le nombre de possibilités de construire chacun des deux palais dessinés :

- Le nombre de possibilités de construire le palais de gauche est

$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^2$$

- Le nombre de possibilités de construire le palais de droite est égal à

$$N_0 \cdot N_1^2 \cdot N_3$$

Les palais de gauche et de droite étant identiques, ces deux nombres doivent être égaux.

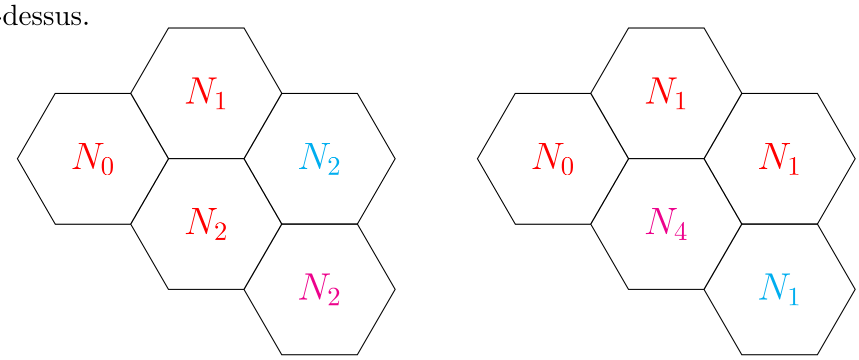
$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^2 = N_0 \cdot N_1^2 \cdot N_3 \Leftrightarrow N_3 = \frac{N_2^2}{N_1} \Leftrightarrow N_3 = \frac{\left(\frac{N_1^2}{N_0}\right)^2}{N_1} = \frac{N_1^3}{N_0^2}$$

5.2.6 Étape 5 : nombre de pièces ayant quatre murs imposés

Pour définir le nombre de pièces ayant déjà quatre murs imposés (appelé N_4), nous utiliserons la même technique que précédemment

- La première façon devra utiliser des pièces n'ayant pas plus de trois murs imposés
- La deuxième façon devra comporter au moins une pièce dont quatre murs sont imposés. Les autres pièces peuvent, quant à elles, avoir jusqu'à quatre murs imposés.

Construisons un palais de cinq pièces en appliquant la méthode détaillée ci-dessus.



Les pièces placées en premier ont une inscription en rouge et les pièces placées ensuite ont une inscription cyan et les dernières pièces placées ont une inscription magenta.

Calculons le nombre de possibilités de construire chacun des deux palais dessinés :

- Le nombre de possibilités de construire le palais de gauche est

$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^3$$

- Le nombre de possibilités de construire le palais de droite est égal à

$$N_0 \cdot N_1^3 \cdot N_4$$

Les palais de gauche et de droite étant identiques, ces deux nombres doivent être égaux.

$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^3 = N_0 \cdot N_1^3 \cdot N_4 \Leftrightarrow N_4 = \frac{N_2^3}{N_1^2} \Leftrightarrow N_4 = \frac{\left(\dfrac{N_1^2}{N_0}\right)^3}{N_1^2} = \frac{N_1^4}{N_0^3}$$

5.2.7 Nombre d'hexagones

Nous avons décidé de construire des palais en forme de fleurs. Mais nous devons déterminer le nombre d'hexagones nécessaires pour construire un palais de n tours. Désignons par h_n le nombre d'hexagones nécessaires pour effectuer le n e tour de la fleur.

Rappelons que chaque hexagones régulier est inscriptible dans un cercle dont le rayon r est égal à la longueur du côté de l'hexagone.

Chaque palais possède un hexagone central. Soit O le centre de son cercle circonscrit et O' le centre du cercle circonscrit à un des hexagones adjacents à l'hexagone central. La distance $|OO'|$ est égale à $2r$.

Soit $\mathcal{C}$, le cercle de centre O ayant pour rayon $|OO'| \cdot n$. Il existe un hexagone régulier H, inscrit dans $\mathcal{C}$ dont les sommets sont les extrémités des segments de longueur $n \cdot r$, issus de O et dont la direction est celle de la droite joignant O à chacun des centres des hexagones adjacents à l'hexagone central.

On en déduit que h_n est égal au nombre d'hexagones traversé par l'hexagone H. Si on compte à la main les premiers termes de la suite (h_n), on obtient successivement

$$h_0 = 1;\ h_1 = 6\ ; h_2 = 12\ ; h_3 = 18;$$

Nous allons prouver que la suite (h_n) est arithmétique de raison 6 pour $n \geq 1$.

La longueur d'un coté de l'hexagone H sera égal au rayon de cercle et vaudra donc $|OO'| \cdot n$.

La distance entre les centres de deux cercles dans lesquels sont inscrits deux hexagones adjacents vaut $|OO'|$.
Le nombre d'hexagones qui sont traversés par un côté de l'hexagone H vaudra alors :

$$1 + \frac{|OO'| \cdot n}{|OO'|} = n + 1$$

On ajoute un car en divisant la longueur d'un côté de H par la distance centre à centre de deux hexagones, on ne compte pas le premier hexagone.

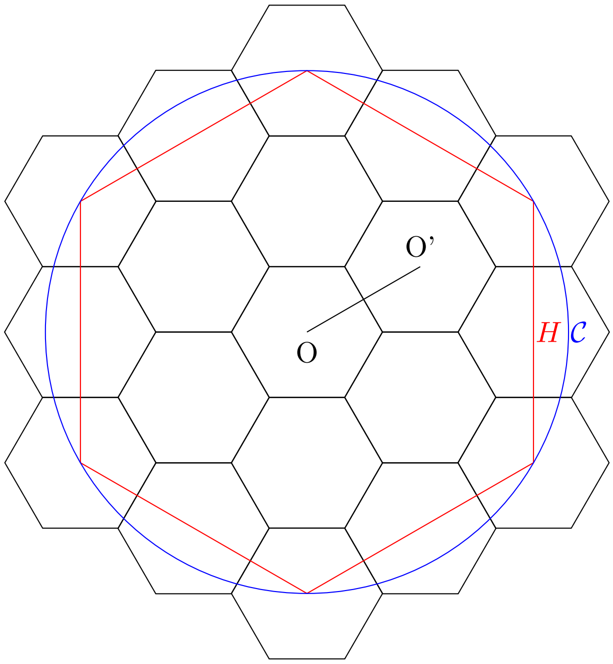


FIGURE 13 – Nombre d'hexagones nécessaires pour construire un palais en forme de fleur à n tours

Donc chaque côté de l'hexagone H traverse $n+1$ hexagones.
On en déduit que le nombre de pièces hexagonales traversées par les six côtés de l'hexagone H est

$$h_n = 6(n+1) - 6 = 6n, \forall n \geq 1$$

puisque chaque hexagone dont le centre est un sommet de H est compté deux fois.

On en déduit que (h_n) est une suite arithmétique de raison 6 pour tout les $n \geq 1$.

Le nombre total d'hexagones permettant de construire un palais en forme de fleur est obtenu en calculant la somme des n premiers termes de la suite arithmétique (et en y ajoutant 1 pour l'hexagone central qui n'est pas compris dans la suite).
Le nombre total d'hexagones à l'étape n est donc

$$\frac{h_1 + h_n}{2} \cdot n + 1 = \frac{6 + 6 \cdot n}{2} \cdot n + 1 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

5.2.8 Nombre de palais d'un seul tour

- Pour l'hexagone central, on a : N_0 possibilités
- Pour le premier tour, on aura :
  - Pour le premier hexagone : N_1 possibilités
  - Pour les quatre hexagones suivants : N_2 possibilités
  - Pour le dernier hexagone : N_3 possibilités

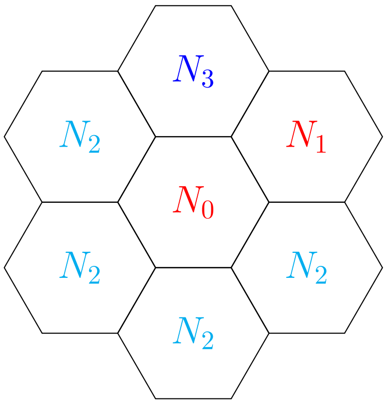


Figure 14 – Nombre de palais à pièces hexagonales en forme de fleur

Les pièces placées en premier ont une inscription en rouge, les pièces placées ensuite ont une inscription cyan et la pièce placée en dernier a une inscription bleue

Le nombre de palais en forme de fleur comportant un tour est

$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^4 \cdot N_3$$

5.2.9 Formule du nombre de palais de n tours

Nous savons faire un palais de sept pièces (et donc contenant un tour d'hexagones). Pour les tours suivants, il faut déterminer la nature (càd le nombre de côtés imposés) de chacun des hexagones formant le 2^{e} tour, etc...

Illustrons la méthode sur un palais en forme de fleur à 2 tours. La méthode consiste à choisir le premier hexagone du 2[e]tour puis de poser un hexagone adjacent au premier. Ensuite, on place l'hexagone adjacent au deuxième et ainsi de suite en suivant le sens horloger.

Le premier hexagone posé a une inscription rouge, le deuxième une inscription cyan et le troisième une inscription bleu. Les hexagones suivants sont placées comme le deuxième et le troisième. Le dernier hexagone a une inscription magenta car il est différent des hexagones précédents.

- Pour le premier hexagone (pris a un sommet de l'hexagone H) : N_1 possibilités
- Pour les autres hexagones se trouvant au sommet de l'hexagone H, on aura N_2 possibilités
- Pour les hexagones restants, on aura N_3 possibilités
  sauf pour le dernier hexagone placé où on aura N_4 possibilités

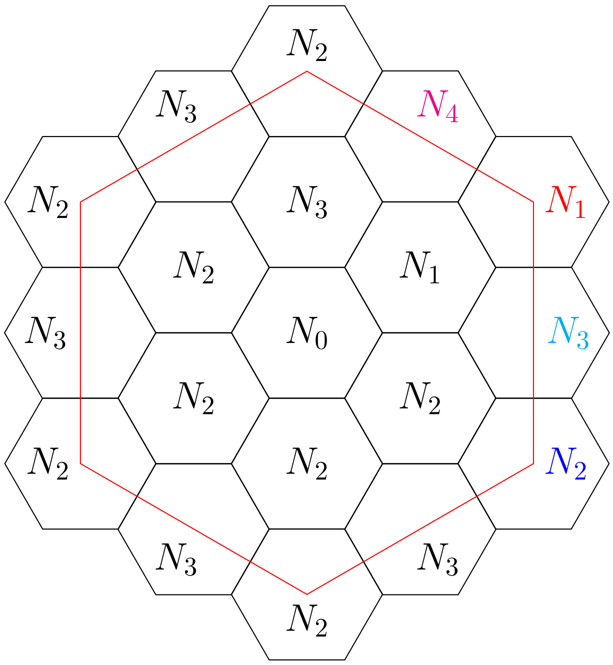


FIGURE 15 – Nombre de palais à pièces hexagonales en forme de fleur à 2 tours

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour élaborer la formule

- Nombre de possibilités pour les sept premiers hexagones :

$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^4 \cdot N_3$$

- Pour chaque tour à partir du deuxième, on aura :
  - N_1 possibilités une fois par tour (pour le premier hexagone du tour, posé sur un sommet de H)
  - N_2 possibilités cinq fois par tour (pour les autres sommets de H
  - N_4 possibilités une fois par tour (pour le dernier hexagone du tour)
  - les hexagones restants auront N_3 possibilités

Pour un palais à n tours, le nombre d'hexagones ayant trois murs imposés (et donc N_3 possibilités) présents dans un palais de n tours est donc égal à

$$3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 - (n-1) \cdot (1+5+1) - 7 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 - 7 \cdot n + 7 - 7 = 3 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 1$$

En effet, $3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$ correspond au nombre total d'hexagones nécessaires pour fabriquer un palais en forme de fleur à n tours. On retranche à ce nombre le nombre d'hexagones qui ont un nombre de murs imposés différent de trois (voir ci-dessus) càd $1 + 5 + 1$ pour chacun des $n - 1$ tours (à partir du deuxième jusqu'au n e). Enfin on retire encore 7 pour les hexagones du premier tour.

Donc le nombre de palais de n tours (avec $n \geq 1$) est

$$N_0 \cdot N_1 \cdot N_2^4 \cdot N_3 \cdot N_1^{n-1} \cdot N_2^{5 \cdot (n-1)} \cdot N_4^{n-1} \cdot N_3^{3 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 1}$$

ou encore

$$N_0 \cdot N_1^n \cdot N_2^{5 \cdot n - 1} \cdot N_3^{3 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 2} \cdot N_4^{n-1}$$

6 Remerciements

Nous tenons à remercier pour leur précieuse aide :

- Nos professeurs : madame Moitroux, madame Sutera et monsieur Haine
- les chercheurs de l' ULiège : monsieur Laurent De Rudder et monsieur Christophe Dubussy.

Mais aussi toute l'équipe de MEJ qui a rendu ce projet possible.