Tour de magie

Haiyin Compère, Haiyang Compère, Emeline Lombardo

Table des matières

1 La magie de Math.en.Jeans **2**

2 Explication du tour **2**
- 2.1 Observation 2
- 2.2 Interprétation 3

3 Optimisation du nombre de mélanges **4**

4 Avec 5 cartes **5**

5 Combien de mélanges pour n cartes ? **5**
- 5.1 Conjecture 5
- 5.2 Démonstration par récurrence 5
- 5.3 Décomposition complète du tour avec 5 cartes 9

1 La magie de Math.en.Jeans

Un magicien prend les quatre premières cartes de pique qu'il arrange dans l'ordre As - deux - trois - quatre et les quatre premières cartes de coeur qu'il arrange dans l'ordre inverse, c'est-à-dire quatre - trois - deux - As. Il présente ensuite les deux paquets de cartes retournés au public. Pour chaque lettre de Math.en.Jeans (M-A-T-H-E-N-J-E-A-N-S), il demande au public de mélanger un des deux paquets. Une fois le mélange terminé, il prend les deux cartes qui sont sur le dessus des paquets et recommence l'opération jusqu'à l'épuisement des cartes. La magie apparaît lorsqu'on retourne les cartes !
Notons que l'action de mélanger est assez spécifique : il faut prendre la première carte du paquet et la mettre en-dessous.
Quel le secret derrière ce tour ? Est-il possible de généraliser le tour de magie fait en classe pour cinq cartes ? Pour n'importe quel nombre de cartes ?

2 Explication du tour

2.1 Observation

Dans les mots "MATH-EN-JEANS", il y a 11 lettres. Donc pour 4 cartes par paquet il faut effectuer 11 mélanges. Ensuite pour 3 cartes on effectue à nouveau les 11 mélanges, idem pour 2. En ajoutant 1 au nombre de mélanges (11), on obtient 12, soit le PPCM de 1 ; 2 ; 3 ; 4. Notons que mélanger 12 fois reviendrait à **annuler l'action** càd à revenir à une situation analogue à celle de départ : les cartes qui étaient à un même niveau dans le tas au début se retrouvent à un même niveau (éventuellement différent du début) à la fin des douze mélanges.

Ce phénomène se reproduit aussi lorsqu'il ne reste plus que 3 cartes puis 2 cartes car $11 + 1 = 12$ et 12 est multiple de 1 ; 2 ; 3 ; 4.

On observe également que quelque soit le paquet mélangé, après 11 mélanges, le numéro de la carte supérieure du paquet A sera la même que celle du paquet B. Le numéro est la seule chose qui varie. Il ne sera pas le même suivant le nombre de mélanges effectués par paquet.

Voici ci-dessous un tableau illustrant cette dernière observation lorsque chaque paquet contient 4 cartes, c'est-à-dire la situation initiale du tour. La première colonne représentant le nombre de mélanges effectués dans le paquet A, la deuxième, le nombre de mélanges effectués dans le paquet B et la dernière colonne, indiquant le numéro commun des deux cartes après 11 mélanges.

Nbre mélanges A	Nbre mélanges B	carte du dessus
0	11	1
1	10	2
2	9	3
3	8	4
4	7	1
5	6	2
6	5	3
7	4	4
8	3	1
9	2	2
10	1	3
11	0	4

2.2 Interprétation

Dans la figure ci-dessous, chaque cercle représente un paquet. Tourner une fois dans le sens trigonométrique, peu importe le cercle, revient à mélanger une fois un paquet.

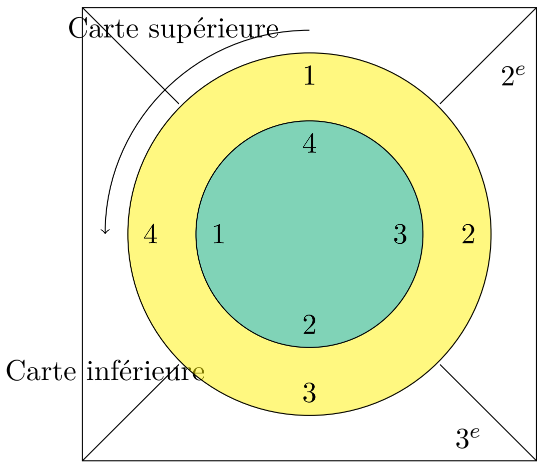


Figure 1 – Situation initiale

Mélangeons un des deux paquets.

On obtient soit la première solution en tournant le grand cercle (schéma de gauche), soit la deuxième en tournant le petit cercle (schéma de droite).

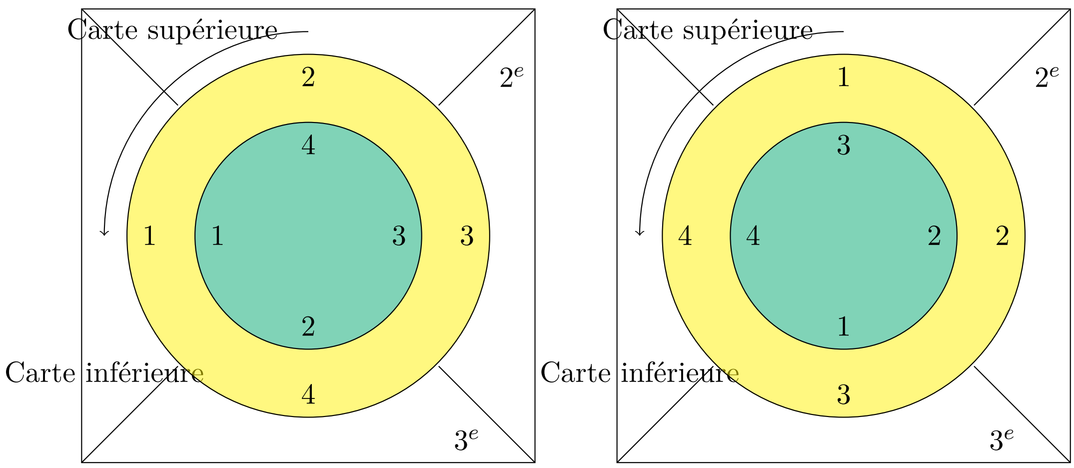
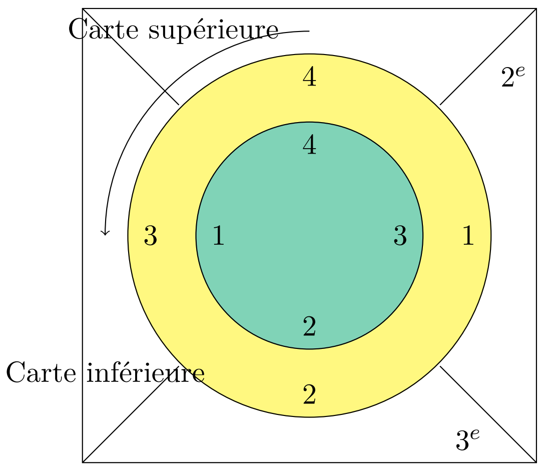


FIGURE 2 – Situation après un mélange

A partir de la situation initiale, voici une des solutions que l'on obtient après 11 mélanges :



3 Optimisation du nombre de mélanges

En observant le schéma ci-dessus, on peut conclure que mélanger 11 fois un tas de $n = 1, 2, 3, 4$ cartes revient à mélanger $n - 1$ fois. En effet,

- lorsqu'on a 4 cartes, $11 \div 4 = 2$ reste 3,
- lorsqu'on a 3 cartes, $11 \div 3 = 3$ reste 2,
- lorsqu'on a 2 cartes, $11 \div 2 = 5$ reste 1.

4 Avec 5 cartes

Etudions le nombre de mélanges nécessaires pour réaliser le tour de magie avec 2 paquets de 5 cartes :
le PPCM de 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 est 60. Comme $60 - 1 = 59$, pour tomber sur un schéma où la première carte des deux paquets est la même, on doit effectuer 59 mélanges.

Cependant, comme il y a 5 cartes par paquets lorsqu'on mélange 5 fois l'action est annulée.

$$59 \div 5 = 11 \text{ reste } 4$$

En mélangeant 4 fois à chaque étape, le bienheureux magicien évite ainsi (pour le tour commençant avec 5 cartes par paquet) 220 mélanges superflus.

5 Combien de mélanges pour n cartes ?

5.1 Conjecture

Suite à cette optimisation, on peut supposer que pour n cartes par paquet, on mélange $n - 1$ fois.

5.2 Démonstration par récurrence

Thèse : Si chaque paquet contient n cartes, le nombre de mélanges nécessaires pour que la première carte de chaque paquet ait la même valeur, est $n - 1$.

Dém :

Etape 1 : Démontrer que la propriété est vraie pour $n = 2$ càd "Si chaque paquet contient 2 cartes, le nombre de mélanges nécessaires pour que la première carte de chaque paquet ait la même valeur est 1."

Considérons le cas où chaque tas contient deux cartes. La situation initiale est représentée ci-dessous.

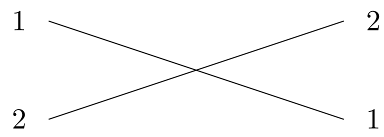


FIGURE 3 – Situation initiale lorsque chaque tas contient 2 cartes

Puis effectuons un mélange. Suivant le tas mélangé, on obtient une des deux solutions suivantes

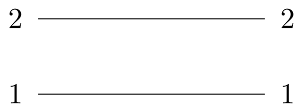


FIGURE 4 – Après un mélange à gauche

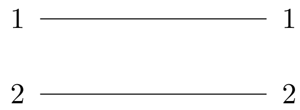


FIGURE 5 – Après un mélange à droite

Peu importe le paquet mélangé, on obtiendra toujours deux mêmes cartes sur le dessus des paquets. Seul le numéro des cartes du-dessus varie selon le paquet que l'on mélange.

Etape 2 : Démontrer que si la propriété est vraie pour $n = N$ alors elle est vraie pour $n = N + 1$.

Hypothèse : Si chaque paquet contient N cartes, le nombre de mélanges nécessaires pour que la première carte de chaque paquet ait la même valeur, est $N - 1$.

Thèse : Si chaque paquet contient $N + 1$ cartes, le nombre de mélanges nécessaires pour que la première carte de chaque paquet ait la même valeur, est N.

Dém : Considérons deux tas de $N + 1$ cartes. Dans un premier temps, nous allons démontrer la propriété en effectuant tous les mélanges dans le même tas (par exemple dans le tas de droite).

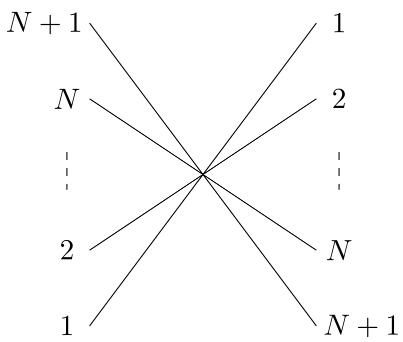


FIGURE 6 – Situation initiale

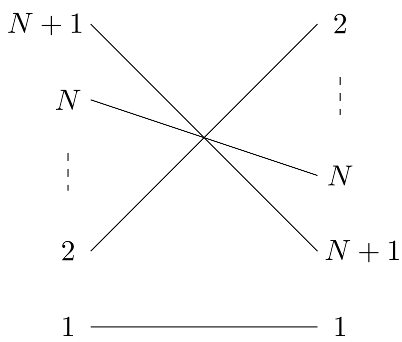


FIGURE 7 – Après un mélange à droite

Continuons à mélanger (toujours dans le même tas).

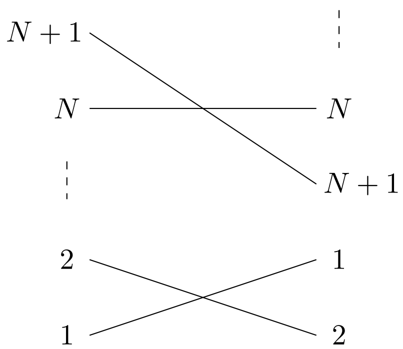


FIGURE 8 – Après $N-1$ mélanges à droite

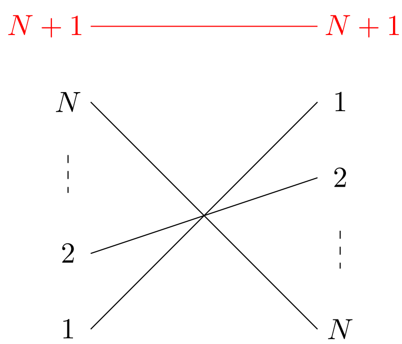


FIGURE 9 – Après N mélanges à droite

Comme dit dans l'énoncé, on enlève les deux cartes du dessus et on retombe sur le point de départ avec N cartes dans chaque paquet, disposées comme dans la situation initiale.

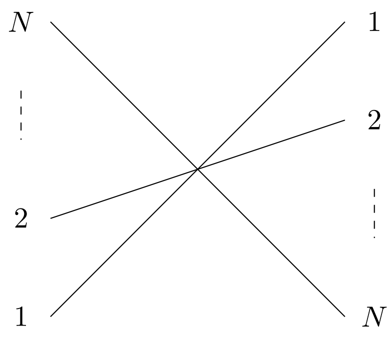


FIGURE 10 – Après N mélanges à droite et suppression de la carte supérieure

Dans un deuxième temps, observons ce qui se passe si on effectue k ($k < n$) mélanges dans le tas de gauche et $N - k$ mélanges dans le tas de gauche. La carte supérieure dans le tas de gauche est celle dont la valeur est égale à $N + 1 - k$ (puisque, à chaque mélange, la valeur de la carte, initialement égale à $N + 1$ est diminuée de 1) tandis que la valeur de la carte supérieure dans le tas de droite devient $N+1-k$ (puisque, à chaque mélange, la valeur de la carte, initialement égale à 1, est augmentée de 1).

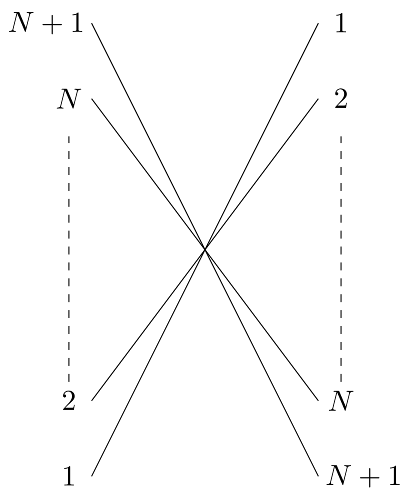


FIGURE 11 – Situation initiale

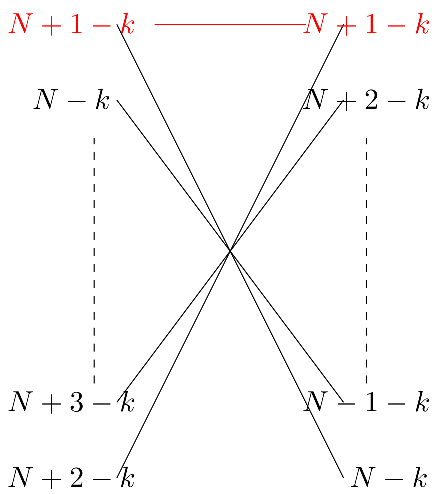


FIGURE 12 – Après k mélanges à gauche et $N - k$ mélanges à droite.

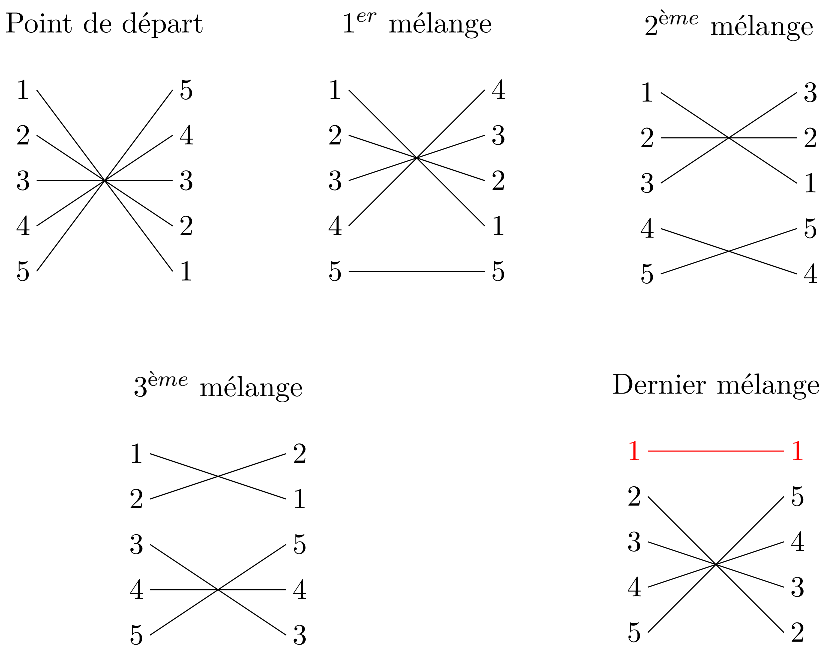
On peut donc enlever la carte supérieure et retrouver une configuration analogue à celle à N cartes.

Conclusion :

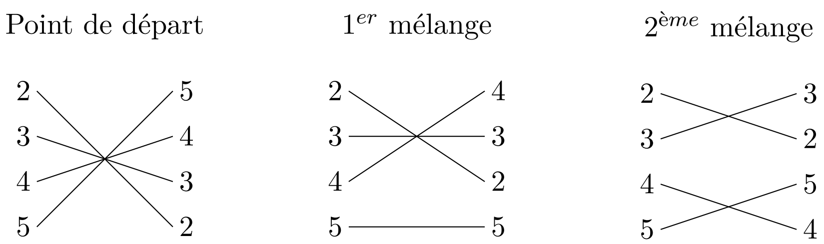
La relation pour $n = 2$ est vraie et l'hypothèse de récurrence étant héréditaire, la propriété est vraie pour toutes les valeurs naturelles de n.

5.3 Décomposition complète du tour avec 5 cartes

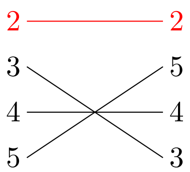
Reprenons l'exemple avec 5 cartes par paquet :



En suivant la procédure du tour de magie, on en enlève la première carte de chaque paquet pour en revenir au schéma de départ avec 4 cartes.

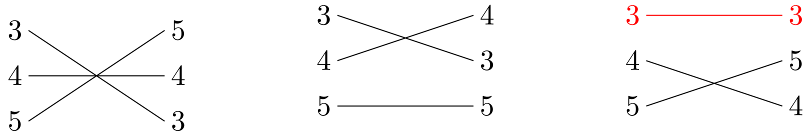


Dernier mélange



En suivant la procédure du tour de magie, on enlève la première carte de chaque paquet pour en revenir au schéma de départ avec 3 cartes.

Point de départ | 1^{er} mélange | Dernier mélange



En suivant la procédure du tour de magie, on enlève la première carte de chaque paquet pour en revenir au schéma de départ avec 2 cartes.

Point de départ | 1^{er} et dernier mélange

En suivant la procédure du tour de magie, on enlève la première carte de chaque paquet et les deux dernières cartes restantes sont les mêmes.