Math en Jeans 2020

Poignées de mains

Hoang Ha Anh
Lahure Charlotte
Devos Thomas
Mayoko Joel
Roosen Florent

Article complet

Athénée Royal Charles Rogier
Liege 1

29 août 2023

Table des matières

* *Poignée de main* :
Ancienne tradition humaine datant de la fin du XXe siècle disparue des suites d'une pandémie mondiale.

1 Énoncé

Paul et sa compagne invitent quatre autres couples à dîner chez eux, pour un total de 10 personnes à table. Le temps que tout le monde soit arrivé, un certain nombre de poignées de mains sont échangées, en respectant deux règles évidentes :

— personne ne se serre la main

— personne ne serre la main de son compagnon.

Une fois le dîner terminé, Paul demande à chacune des personnes présentes à table, sa femme comprise, combien de poignées de mains elle a échangées en arrivant. De manière surprenante, il obtient neuf réponses différentes.

Combien de mains la femme de Paul a-t-elle serrée(s) ?

2 Existence d'une solution

Avant de chercher une solution au problème, nous pouvons nous demander si il a un sens c'est-à-dire s'il est possible d'obtenir neuf réponses différentes.

Essayons de trouver une configuration pour laquelle les conditions initiales sont respectées. Nous avons donc construit un tableau reprenant différentes interactions possibles.

Couples	1		2		3		4		5	
Personnes	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Interaction : 1	$A \to E$	$B \to C$	$C \to B$	$D \to B$	$E \to A$	/	$G \to B$	$H \to B$	$I \to B$	$J \to B$
2		$B \to D$	$C \to E$	$D \to E$	$E \to B$		$G \to D$	$H \to D$	$I \to D$	$J \to D$
3		$B \to E$		$D \to G$	$E \to C$		$G \to E$	$H \to E$	$I \to E$	$J \to E$
4		$B \to G$		$D \to H$	$E \to D$			$H \to I$	$I \to H$	$J \to H$
5		$B \to H$		$D \to I$	$E \to G$			$H \to J$		
6		$B \to I$		$D \to J$	$E \to H$					
7		$B \to J$			$E \to I$					
8					$E \to J$					

Nous avons trouvé un exemple qui respecte toutes les contraintes du problème. Il est donc possible de trouver au-moins une solution. On voit de suite qu'il y a plusieurs solutions possibles (il suffit de permuter deux colonnes d'un même couple ou de permuter deux paires de colonnes relatives à des couples différents).

3 Solution du problème

3.1 Récapitulatif des données

- On a 5 couples donc 10 personnes,
- Paul obtient 9 réponses différentes (le nombre de mains qu'il a serrées n'est donc pas pris en compte),
- personne ne serre sa main ni celui de son/sa conjoint(e).

Le nombre maximum de mains serrées par une personne est donc 8. Cela implique que les différentes réponses obtenues par Paul seront les naturels appartenant à [0,8].

3.2 Convention

Dans la suite du document, nous déciderons que, pour chaque couple, l'homme est la personne ayant serré le plus de mains.

3.3 Résolution

On sait qu'un homme doit serrer 8 mains : il serre la main de tout le monde sauf la sienne et celle de sa conjointe.
Dès lors, la personne qui ne serre aucune main doit être sa conjointe puisqu'elle est la seule à pouvoir le faire (les autres personnes serrant la main de cet homme).

On peut aussi affirmer que ce couple n'est pas celui de Paul. En effet, si la femme de Paul serre 8 mains alors elle serre la main des huit invités et aucun d'entre eux ne peut serrer 0 main (la réponse de Paul n'étant pas prise en compte). La femme de Paul ne peut serrer 0 main non plus sinon seul Paul devrait serrer 8 mains. Or le nombre de mains serrées par Paul n'est pas pris en compte. Donc Paul n'obtiendra pas la réponse 8 d'où il ne pourra obtenir 9 réponses différentes.

Nous choisirons arbitrairement que le couple dont les personnes ont respectivement 8 et 0 mains serrées est le couple numéro 5.

On sait aussi qu'un -autre- homme doit serrer 7 mains. Il serre donc la main de tout le monde sauf celle de sa conjointe, la sienne et celle de la femme du couple 5 puisqu'elle ne serre aucune main. La conjointe de cet homme est alors la seule personne à pouvoir serrer une seule main (toutes les autres personnes en serrant au moins deux sauf une qui n'en serre pas).
Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on peut affirmer que ce couple n'est pas celui de Paul. En effet si Paul serre 7 mains, alors il n'obtiendra pas la réponse 7 (si quelqu'un d'autre serre 7 mains personne ne serre une seule main). De même si Paul ne serre qu'une main alors personne d'autre ne serre une seule main puisque tout le monde aura au moins deux mains sauf la femme du couple 5 (qui doit en avoir 0).

Nous choisirons arbitrairement que le couple dont les personnes ont respectivement 7 et 1 mains serrées est le couple numéro 4.

Toujours en suivant le même raisonnement, on sait qu'un homme doit serrer 6 mains c'est-à-dire qu'il serre la main à tout le monde sauf lui-même, sa conjointe et les femmes des couples 4 et 5 (qui ont respectivement 1 et 0 main). Encore une fois sa conjointe est la seule qui ne peut serrer que deux mains.

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on peut affirmer que ce couple n'est pas celui de Paul puisque le nombre de mains serrées par les deux personnes constituent des réponses obtenues par Paul, aucun de ces deux nombres ne peut dès lors être le nombre de mains serrées de Paul.

Nous choisirons arbitrairement que le couple dont les personnes ont respectivement 6 et 2 mains serrées est le couple numéro 3.

Le raisonnement est analogue pour la personne serrant 5 mains. Sa conjointe en serre alors 3.

Nous choisirons arbitrairement que le couple dont les personnes ont respectivement 5 et 3 mains serrées est le couple numéro 2.

Du raisonnement qui précède, on peut déduire que Paul et sa femme serrent tous les deux la main d'une personne par couple, en l'occurrence, celles des 4 hommes invités.

3.4 Représentation graphique de la solution

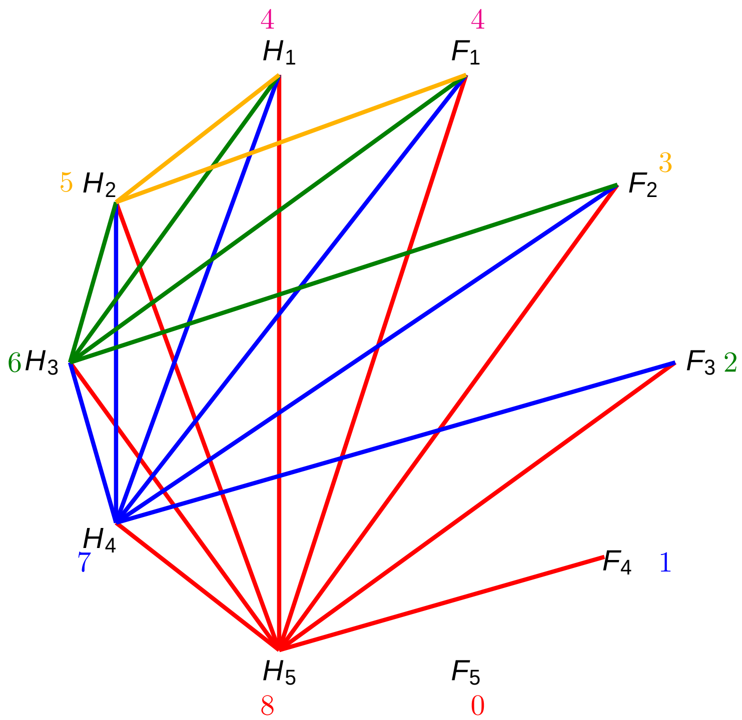


FIGURE 1 – Solution "structurée" à 10 personnes

Dans ce graphe, Paul et sa femme sont respectivement H_1 et F_1. Les traits ont été faits selon l'ordre expliqué précédemment. Leur ordre est représenté par différentes couleurs (la première en haut et le dernière en bas de la liste suivante) :

- Rouge
- Bleu
- Vert
- Orange.

Remarque : Le raisonnement qui précède nous permet de dire qu'il n'existe qu'une seule solution à ce problème : la femme de Paul serre quatre mains. Cependant, la situation peut être représentée par de nombreux graphes. En effet, si on ne prend pas en considération la convention énoncée plus haut, on peut inverser le nombre de mains serrées de deux personnes d'un même couple. De plus, nous pouvons aussi échanger les numéros des couples sans que cela n'amène une contradiction. Par exemple, le graphe présenté en introduction est un de ces graphes.

4 Généralisation du nombre de couples

Nous allons désormais tenter de trouver une formule permettant de connaître le nombre de poignées de mains serrées par la femme de Paul si n couples participent au repas, le couple de Paul étant inclus dans les n.
Pour ce faire, nous aurons besoin de chercher certaines propriétés à étendre à partir de notre problème de base.

4.1 Observations

Remarque : il est intéressant d'aborder cette partie avec le schéma (Figure 1) de la page 4.

- Paul obtient $2n - 1$ réponses différentes.
- Le nombre maximum de mains serrées est de $8 = 2 \cdot n - 2$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, le nombre de couples. Le nombre minimum étant de 0, on en déduit que les réponses obtenues par Paul sont tous les naturels $x \in [0; 2 \cdot n - 2]$.
- la somme du nombre de poignées de mains serrées par les deux personnes d'un couple vaut toujours $8 = 2 \cdot n - 2$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, le nombre de couples.
- le nombre de poignées de mains serrées par Paul et sa femme est identique. Ce nombre vaut $4 = 5 - 1 = n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, le nombre de couples.

4.2 Somme des mains serrées par les deux personnes du même couple

Suite aux observations précédentes, nous pouvons penser que

> Si il y a n couples ($n \geq 1$), alors la somme des mains serrées par chaque couple est de $2 \cdot n - 2$

Hypothèses

- n est le nombre de couples, celui de Paul compris.
- Toutes les personnes sans compter Paul ont un nombre de poignées de mains différentes.
- les nombres de mains serrées individuellement sont les nombres naturels de $[0; 2n-2]$.
- Les couples sont ordonnés de tels sorte que la personne serrant le plus de mains appartienne au dernier couple.

Thèse : La somme des mains serrées par chaque couple vaut $2n-2; \forall n \geq 1$.

Démo :

Supposons que la thèse soit fausse, c'est-à-dire supposons qu'il existe un couple tel que la somme des mains que le couple a serré ne vaut pas $2n-2$.

Considérons tout d'abord le couple dont l'homme a serré le nombre maximal de mains, càd $2n-2$. Il a donc serré la main de tout le monde, sauf la sienne et celle de sa compagne.
Si ce couple ne serre pas un nombre total de mains égal à $2n-2$, sa compagne n'aura pas serré 0 mais au moins une main.

0	X	X	$2n-2$
1	X	X	1
1	X	X	1
1	X	X	1
1	X	X	1

Donc plus personne ne serre 0 main, il y a contradiction avec l'hypothèse.
La compagne devra par conséquent serrer 0 main et la somme des liaisons de ce couple est bien égale à

$$2n-2+0 = 2n-2$$

Continuons le raisonnement en étudiant le couple dont l'homme serre $(2n-2)-1 = 2n-3$ mains.

0	X	X	$2n-2$
1	X	X	$2n-3$
2	X	X	2
2	X	X	2
2	X	X	2

Si la somme des poignées de mains de ce couple ne peut être égale à $2n-2$, sa compagne, ne peut que x mains où

$$2n-3+x \neq 2n-2, \quad x \neq 1$$

main.

Cette compagne ne peut serrer 0 main (puisque la compagne du premier homme serre déjà 0 main). Elle doit donc serrer au moins 2 mains. Or si elle serre 2 mains, personne ne serre une seule main. En effet, toutes les personnes des couples suivants auront au moins serré deux mains (celles des deux hommes). D'où une contradiction avec l'hypothèse.

Ainsi de suite, jusqu'à arriver au premier couple (celui de la personne serrant $n-1$ mains).
L'hypothèse étant contredite pour tous les couples, on en conclut que la thèse est vraie.

4.3 Nombre de mains serrées par la femme de Paul avec n couples

On sait que Paul obtient toutes les réponses comprises entre 0 et 2n 2.
Cela signi e qu'il y a une personne qui serre n 1 mains.
Grâce à la propriété démontrée au point précédent, on sait que son conjoint serre

$$2 \ n \quad 2 \quad (n \quad 1) = n \quad 1$$

mains.
Or Paul n'obtient que des réponses di érentes, le seul couple dont les personnes serrent n 1 mains est donc celui de Paul (ce dernier n'étant pas pris en compte).

D'où Paul et sa femme serrent chacun n 1 mains, 8n 2 N_0, n étant le nombre de couples.

4.4 Représentation sous forme de liste

A n de simpli er notre modèle graphique, nous allons représenter les couples sous forme d'une liste. A gauche, la première personne du couple (l'homme), à droite, la seconde personne (la femme). Dans chaque case, on indique son nombre de poignées de mains (= liaisons). Les couples s'empilent les uns sur les autres. Au sommet, on place le couple de Paul, et Paul se situe à gauche. La représentation pour 5 couples donne donc

4	4
5	3
6	2
7	1
8	0

On peut supprimer les lignes, par facilité. On a donc :

4	4
5	3
6	2
7	1
8	0

4.5 Représentation sous forme de graphique adapté

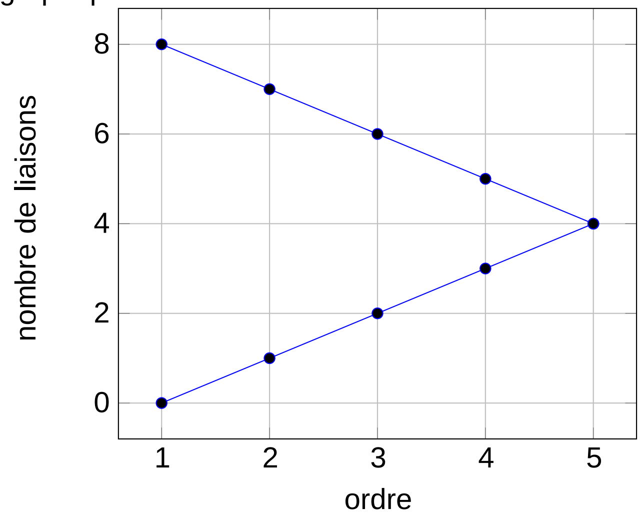
Une manière plus visuelle de représenter nos solutions serait de mettre nos tableaux sous la forme d'un graphique, un graphique où on peut voir notre conclusion de manière intuitive. Après plusieurs tentatives, notre modèle nal se présente comme suit :

1. Les points représentent des personnes.
2. Un trait entre deux points ne représente non pas la liaison entre eux comme dans nos précédents graphes. Ici, les traits sont purement esthétiques.
3. Les points sont répartis sur l'axe des ordonnées en fonction de leur nombre de liaisons.
4. Les points sont répartis sur l'axe des abscisses en fonction de leur "ordre" dans notre modèle de tableau, les points appartenant au même couple ont le même ordre et donc sont sur une même parallèle à l'axe des ordonnées, et le premier couple ayant un ordre de 1 est celui au bas du tableau.

Les ordres se présentent comme suit :

Ordre		
5	4	4
4	5	3
3	6	2
2	7	1
1	8	0

Pour cet exemple de tableau, on obtient ce graphique :

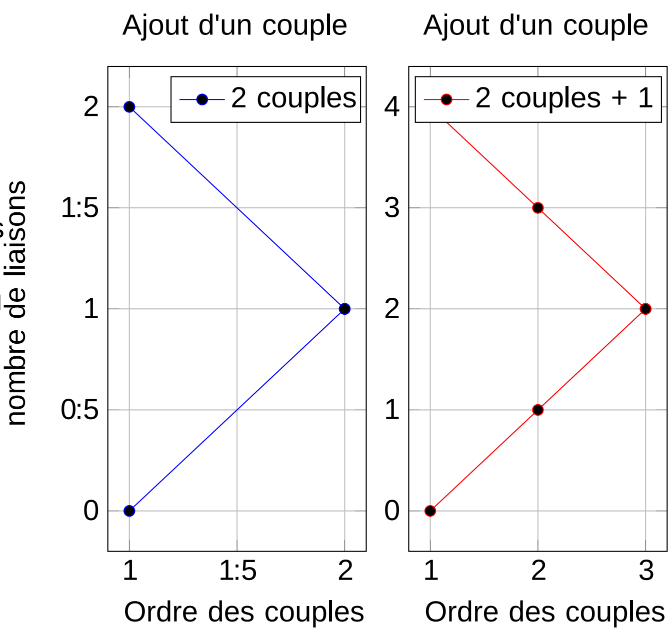


Remarque : Les deux points du couple de dernier ordre ont le même nombre de liaisons, et à ce titre ils sont situés aux mêmes coordonnées, ce qui donne l'impression que le couple de dernier ordre est un point unique, et il est important de rappeler que ce n'est pas le cas.

Ce modèle respecte toutes les conditions et de plus, il permet également de comprendre, grâce à la superposition des deux points du couple de dernier ordre que Paul et sa femme ont le même nombre de liaisons.

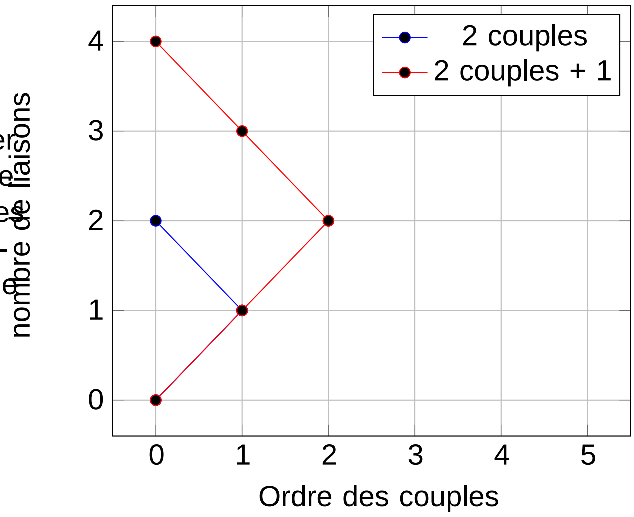
Comment interpréter la généralisation ? Pour généraliser le nombre de liaisons de Paul et de sa femme, on a ajouté des couples un par un à notre modèle en constatant l'évolution de leur nombre de liaisons respectifs et en dégagent des conclusions quant à leur nombre de liaisons pour un cas général.

A n de rendre cette solution intuitive, représentons cet ajout de couples sur notre modèle graphique adapté. Commençons par ajouter un couple au nombre minimum de couples, à savoir 2. A gauche, la représentation du tableau de deux couples. A droite, la représentation de l'ajout d'un couple.



On peut aussi décider de superposer les graphiques. Cela nous montre que le graphique de 3 couples passe par les mêmes points qu'occupaient une personne de chaque couple du graphique de deux couples.

Ajout d'un couple



Ici, on peut constater que :

1. Le nombre de liaisons minimum ne varie pas.
2. On ajoute 2 au nombre de liaison maximum.
3. Le nombre de liaisons du couple d'ordre le plus élévé (celui de Paul) augmente de 1.
4. Paul et sa femme ont le même nombre de liaisons.

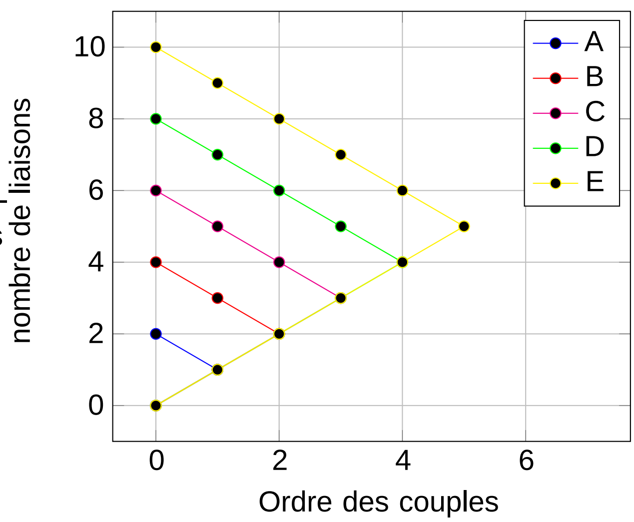
Cette représentation de l'ajout de couples est conforme à nos conclusions.

Remarque : L'augmentation de 2 de la valeur maximale peut s'expliquer grâce à la formule du nombre de liaisons maximales :

Pour le cas 1, on a $n = 1$. Donc, le nombre de liaisons maximales sera égal à $l_{max;\,1} = 2n = 2$.
Avec $n = 2$, on aura : $l_{max;\,2} = 2(n+1) = 2n + 2$.
D'où $l_{max;\,2} = l_{max;\,1} + 2$.

On peut appliquer ce procédé en ajoutant un plus grand nombre de couples sans impacter nos observations.

Représentation pour n=1,2,3,4,5 couples



Légende :

A :

1	1
2	0

B :

2	2
3	1
4	0

C :

3	3
4	2
5	1
6	0

D :

4	4
5	3
6	2
7	1
8	0

E :

5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

5 Extrapolation

Maintenant que le problème initial est résolu, nous pouvons envisager de sortir du cadre initial. Pour commencer, essayons de voir si le problème a toujours une solution lorsque, parmi les invités de Paul, il y a aussi une personne célibataire. Ensuite, nous verrons si le problème est toujours résolvable si on ajoute plus d'une personne célibataire.
Ici, nous utilisons les listes expliquées au paragraphe 4.4 ainsi que la représentation graphique adaptée au paragraphe 4.5. Dans celle ci, les célibataires sont représentés sous forme de points, dont l'ordre est hiérarchisé de la même manière que pour les couples.

5.1 Ajout d'une personne célibataire

Avant de chercher à généraliser, nous allons tout d'abord véri er qu'il est e ectivement possible d'inclure un célibataire dans notre modèle. Nous décidons de commencer par un cas avec 5 couples.

5.1.1 Cas particulier

Ajoutons une personne célibataireC à un cas avec 5 couples, que l'on place en-dessous des cases des couples.

5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	

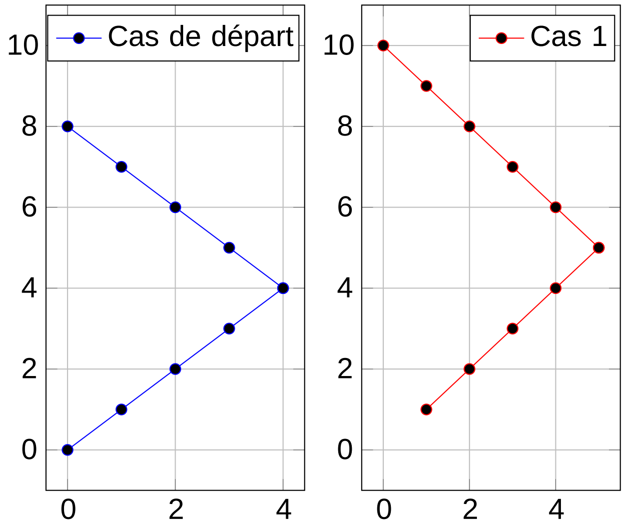
Si cette personne célibataire serre la main de toutes les autres personnes, elle serre 10 mains et le problème est résolu. Il est donc possible d'inviter un célibataire chez Paul.
Y a-t-il d'autres possibilités d'insérer ce célibataire ? Pour cela, nous recherchons toutes les con - gurations plausibles où chaque personne à un nombre de liaisons di érent, sauf la personne au sommet à gauche, Paul.

Il existe deux con gurations permettant d'insérer une personne célibataire :

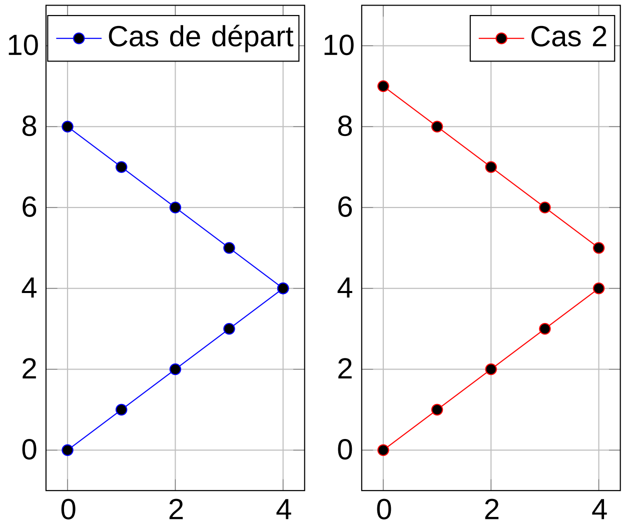
Cas 1 Cas 2

4	4		5	5		5	4
5	3		6	4		6	3
6	2	!	7	3		7	2
7	1		8	2		8	1
8	0		9	1		9	0
c			10			5	

1. C se relie à toutes les autres personnes. En d'autres termes, chaque personne a une liaison en plus. Le célibataire C aura donc le même nombre de liaisons que le nombre de personnes présentes ici 10. C se rajoute en n du graphe en prolongeant la section supérieure, et en augmentant de 1 le nombre de liaisons de chaque point. On peut observer que rajouter un célibataire de la sorte a sur le graphe originel le même e et que si on avait rajouté un couple, à la di é-rence qu'il manque le point d'ordre 0 et ayant 0 liaisons.



2. C se relie à Paul et à toutes les personnes ayant un nombre de liaisons supérieur au nombre de couples. C aura donc le même nombre de liaisons que le nombre de couples, ici 5. Dans ce cas-ci, l'ordre de C va être égal à celui du couple de plus grand ordre. Le point représentant C est confondu avec le point représentant Paul (On pourrait extrapoler et dire que C remplace la femme de Paul...).



Les autres con gurations ne permettent pas de respecter les conditions. A savoir :

C serre la main d'une (ou plusieurs) des personnes de la colonne de droite (les femmes), mais alors, la femme située sur la ligne la plus élevée serre autant de mains que la femme qui est présente sur la ligne juste au-dessus ;

C serre la main de toutes les femmes :

4	5
5	4
6	3
7	2
8	1

5

Ce cas ressemble au 2^{me} cas ci-dessus, avec la di érence que C se relie à toutes les personnes de la colonne de droite, c'est-à-dire celles ayant un nombre de liaisons inférieur ou égal aux liaisons de la femme de Paul. On peut constater que cette con guration ne respecte pas les conditions : trois personnes, dont la femme de Paul et C ont le même nombre de liaisons.

A n de contourner ce problème, on pourrait penser qu'il su rait de relier C à Paul, et non pas à sa femme. Mais comme on peut le voir, on obtient deux personnes ayant un nombre de liaisons égal à 4.

5	4
5	4
6	3
7	2
8	1

5

C serre la main d'une ou plusieurs personnes de la colonne de gauche (les hommes). Mais alors, l'homme située sur la ligne la plus basse serre autant de mains que l'homme qui est présent sur la ligne juste en-dessous ;
C serre la main de tous les hommes sauf Paul :

4	4
6	3
7	2
8	1
9	0

4

Ce cas représente tous les cas où C se relie aux personnes à gauche à l'exception de Paul. On constate que C à le même nombre de liaisons que la femme de Paul, notre condition n'est donc pas respectée.

5.1.2 Généralisation

Nous sommes parvenus à ajouter une personne célibataire à notre modèle de 5 couples. La question est de savoir si il est possible d'ajouter un célibataire, et ce quel que soit le nombre de couples.

On émet la thèse suivante :

La personne célibataire peut serrer, pour n couples :
- la main de tout le monde
- la main de tous les hommes (Paul compris)

A n de démontrer la thèse, nous devrons recourir à deux lemmes. Les hypothèses sont communes aux lemmes et à la démonstration.

Hypothèses

C = la personne célibataire.
n, le nombre de couples (celui de Paul compris), $n \in N_0$.
Tout le monde serre un nombre di érent de mains, sauf Paul.

Lemme 1

Thèse : Si C serre la main d'une personne, alors elle devra serrer la main de toutes les personnes ayant serré plus de mains que cette personne.

> Lorsqu'on ne considère que des couples, le nombre de mains serrées par les personnes des di érents couples sont tous les naturels de l'ensemble $[0; 2\ \ n\ \ \ 2]$. Donc si C serre la main d'une personne cette dernière aura une main serrée de plus qu'avant et donc le même nombre de mains serrées qu'une autre personne, il faudra donc que C serre la main de cette personne et ainsi de suite jusqu'à ce que C serre la main de la personne qui avait serré le plus grand nombre de mains.

Lemme 2

Thèse : Il est impossible que le célibataire serre un nombre de mains di érent de n ou de $2n$.

> Tout d'abord, C ne peut pas serrer la main de F_0, sinon il devra serrer $2n$ mains (cf Lemme 1).
> Supposons que C serre la main d'une personne ayant serré x $(x > 0)$ mains auparavant.
> Si $x\ \ \ n\ \ \ 1$ càd si C serre la main d'une des femmes (avec ou sans Paul), comme C doit serrer la main de toutes les personnes qui ont serré plus de mains que cette personne (cf Lemme 1), alors C doit serrer $2\ \ n\ \ \ x$ mains.
> En e et, C serre la main de tout le monde sauf des femmes qui avaient moins de mains serrées que la femme qu'il vient de choisir, ce nombre de femmes est bien égal à x.
> Donc C serre un nombre de mains compris dans l'intervalle $[n + 1; 2\ \ n\ \ \ 1]$. De plus, les personnes à qui C serre la main (les hommes) voient leur nombre de mains serrées augmenter de 1 ; le nombre de mains serrées par les hommes étant alors compris dans l'intervalle $[n; 2\ \ n\ \ \ 1]$. Donc C serre donc obligatoirement le même nombre de mains qu'une autre personne.
> Notons que si C évite de serrer la main de Paul (puisque le nombre de mains serrées par Paul n'a pas d'importance), C serré un nombre de mains compris dans l'intervalle $[n; 2\ \ n\ \ \ 2]$. La conclusion reste identique.
> Si $x\ \ \ n$, càd si C serre la main d'un homme (sans Paul), alors C doit serrer $2\ \ n\ \ \ x\ \ \ 1$ mains (il s'agit de la même formule que celle utilisée précédemment mais en enlevant Paul puisqu'il a $n\ \ \ 1$ mains serrées). Le nombre de mains serrées par C sera compris dans l'intervalle $[1; n\ \ \ 1]$ Or tous les naturels de ces intervalles sont déjà occupés par une des personnes à qui il n'a pas serré la main (une des femmes).

Thèse : C serre la main de tout le monde ou la main des personnes ayant strictement plus de mains serrées que Paul ainsi que la main de Paul.

Démo : Vu les lemmes précédents, il nous su t de prouver que les cas cités sont possibles.

Premier cas : Si C serre la main de toutes les personnes présentes, alors il serrera 2 n mains. De plus les personnes des di érents couples auront serré un nombre de mains compris dans l'intervalle [0 + 1 ; 2 n 2 + 1] = [1 ; 2 n 1].

...	...
2 n 3 + 1	1 + 1
2 n 2 + 1	0 + 1

2 n

Donc C serre un nombre de mains di érent de celui des personnes en couples qui ont elles-mêmes des réponses di érentes (puisque le nombre de mains serrées par chaque personne est augmenté de 1).

Deuxième cas : Si C serre la main d'une personne de tous les hommes (y compris Paul) alors C serre 2 n (n 1) 1 = n mains et seul Paul a serré aussi n mains.

(n 1) + 1	n 1
...	...
(2 n 3) + 1	1
(2 n 2) + 1	0

n

Remarque : Une remarque intéressante à faire est que l'ajout d'une personne célibataire empêche de pouvoir répondre à la question initiale : combien de mains la femme de Paul a-t-elle serrées ?
En e et, le nombre de mains serrées par la femme de Paul dépend de la façon dont le célibataire s'insère dans le groupe.

5.2 Ajout de plusieurs personnes célibataires

Nous sommes parvenus à ajouter une personne célibataire à nos couples et ce, quel que soit le nombre de couples. Mais peut-on aller plus loin, et ajouter plusieurs personnes célibataires tout en respectant toujours la condition initiale ?
La réponse est peut être, car malheureusement, suite à un petit évènement de 2020, je ne sais pas si vous savez, le Coronavirus, nous n'avons pu en conclure sur la validité de nos pistes.
Néanmoins, voici un exemple. De la même manière que pour l'ajout d'une personne célibataire, nous allons tenter de considérer tous les cas possibles en partant du cas de 5 couples.

5	5
6	4
7	3
8	2
9	1

10
0

Reprenons les deux situations permettant d'insérer un seul célibataire (à gauche) . Nous allons envisager les deux cas séparément.

Cas 1

5	5
6	4
7	3
8	2
9	1

10

Cas 2

5	4
6	3
7	2
8	1
9	0

5

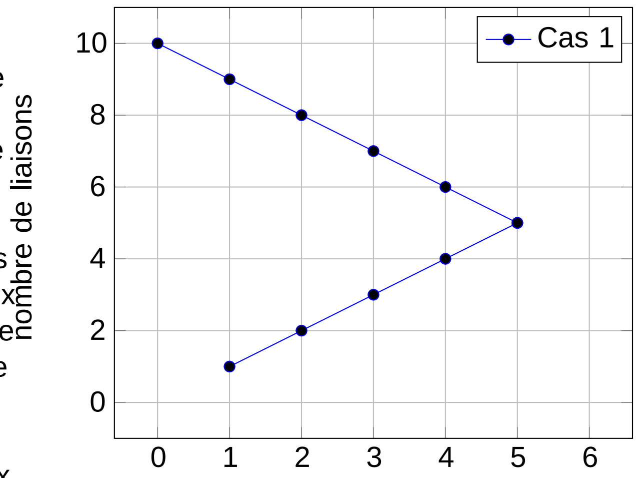
5.2.1 Cas 1

Pour rappel, il s'agit du cas où la personne célibataire C se relie à toutes les autres personnes. La personne C a donc le même nombre de liaisons que le nombre de personnes présentes, ici 10.

Si on désire y ajouter un second célibataire, C_2, nous avons de nouveau de nombreux choix quant aux liaisons qu'il peut avoir. Nous exposerons d'abord les cas fonctionnels, respectant les hypothèses de départ.

Deux cas respectant les hypothèses sont envisageables :

Cas 1			1A		1B	
5	5		5	5	6	5
6	4		6	4	7	4
7	3		7	3	8	3
8	2	!	8	2	9	2
9	1		9	1	10	1
10			10		11	
C_2			0		6	



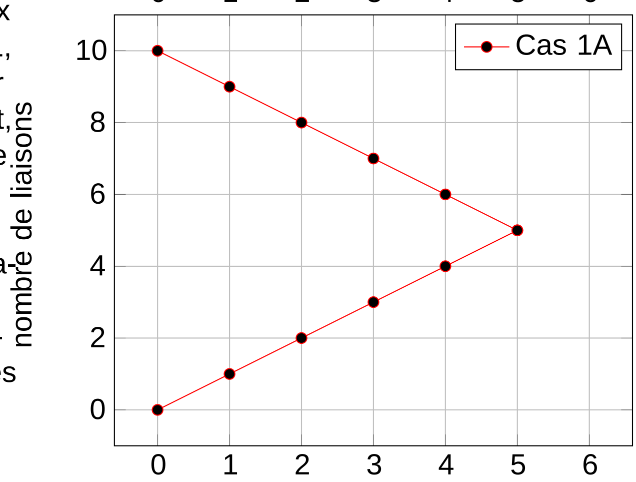
1A ; C_2 a 0 liaisons. Si on le compare avec C_1, qui a le nombre de liaisons maximum, on peut dire qu'ils forment un couple d'ordre 0.

C'est à dire que leur nombres de liaisons respectifs sont ceux des deux membres d'un couple d'ordre 0, à savoir le nombre de liaisons maximum et minimum.

5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	
0	

Ainsi, dans ce cas, ajouter deux célibataires en suivant le cas 1, puis le cas 1A, revient à ajouter un couple aux couples de départ, mais en deux étapes plutôt qu'une seule.

Cela se remarque bien sur le graphique de 1A à droite ; C_1 et C_2 se retrouvent couple d'ordre 0, alignés au même titre que les autres couples.

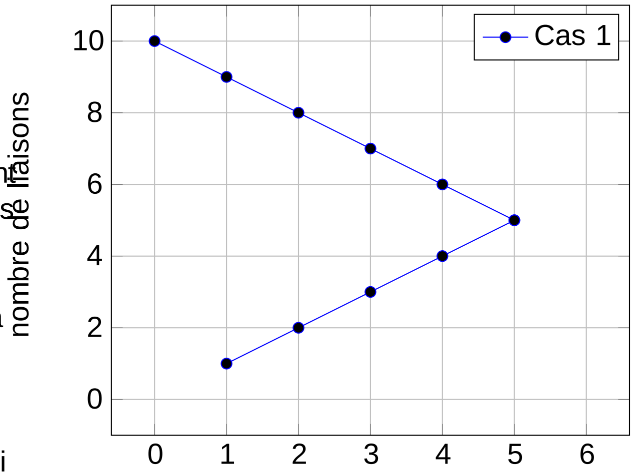


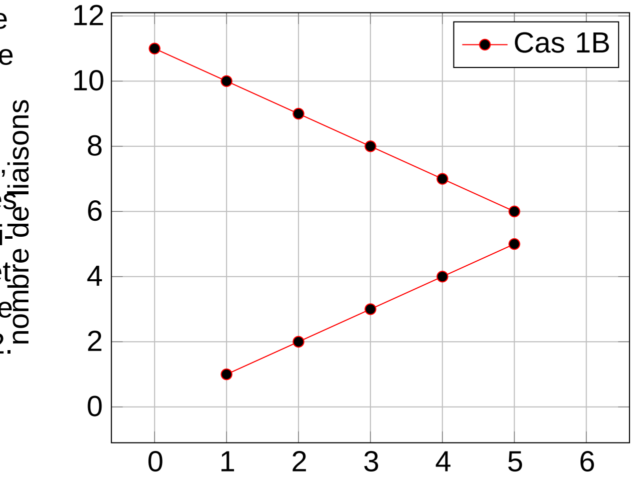
1B ; C_2 interagit avec Paul et avec toutes les personnes ayant un nombre de liaisons supérieures à lui.

6	5
7	4
8	3
9	2
10	1
11	
6	

Ce comportement est similaire à celui observé lors de l'ajout d'un célibataire, le cas 2 (voir 2).
Il obtient un nombre de liaisons égal à celui de Paul, à savoir 6. Ici aussi le célibataire prend la place de la femme de Paul, en quelque sorte.

Sur le graphique en bas à droite, on remarque un décalage entre les personnes avec un nombre de liaisons supérieur à celui de Paul et celles avec un nombre inférieur, ce même décalage observé au cas 2.





Autres cas, ne respectant pas nos hypothèses : nous pouvons dégager deux autres stratégies consistant à connecter le 2e célibataire avec tout le monde ou à le connecter avec les personnes de la colonne de gauche (les femmes) uniquement.
Ces deux cas, notés 1C et 1D, bien qu'ayant des stratégies soit déjà utilisées par le passé, soit légitimes, ne sont aps fonctionnels.

Cas 1			1C		1D	
5	5		6	6	5	6
6	4		7	5	6	5
7	3		8	4	7	4
8	2	!	9	3	8	3
9	1		10	2	9	2
10			11		11	
C_2			11		6	

6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	
11	

Cas 1C : ici, le deuxième célibataire se relie à toutes les personnes présentes, y compris le célibataire C_1. Le deuxième célibataire agit donc comme le célibataire précédemment ajouté, C_1, et comme on peut le constater les deux célibataires ont le même nombre de liaisons : lorsqu'ils suivent le même comportement, on ne respecte plus la condition initiale.

Cas 1D : Ce cas représente le raisonnement analogue à la méthode consistant à interagir avec la moitié gauche des personnes. Il consiste à interagir avec la moitié droite des personnes du graphe (les femmes). Encore une fois, c'est l'impasse : 3 personnes se retrouvent avec 6 liaisons. Il semblerait que la femme de Paul soit moins encline à le tromper qu'il ne l'est.

5	6
6	5
7	4
8	3
9	2
11	
6	

5.2.2 Cas 2

Pour rappel, il s'agit du cas où C se relie à Paul et à toutes les personnes ayant un nombre de liaisons supérieures à lui. C aura donc le même nombre de liaisons que le nombre de la moitié des personnes présentes ainsi que le même nombre de liaisons que Paul, ici 5.

Ici, un seul cas correct se présente, noté 2A. Les autres stratégies ne fonctionnent pas.

Cas 2

5	4
6	3
7	2
8	1
9	0
5	
C_2	

!

Cas 2A

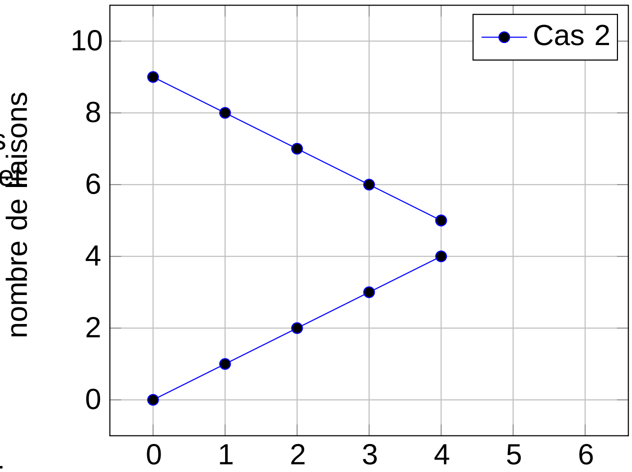
6	5
7	4
8	3
9	2
10	1
6	
11	

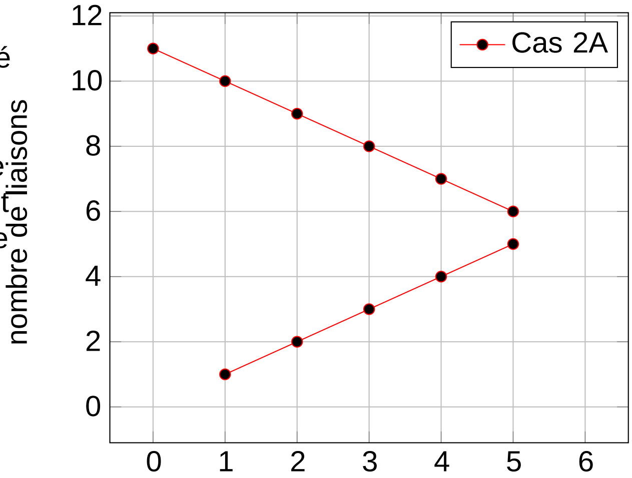
6	5
7	4
8	3
9	2
10	1
6	
11	

Cas 2A : C_2 se relie a toutes les personnes présentes, couples et célibataires. On peut constater que l'ajout du nouveau célibataire ne modi e pas la "relation" entre le premier célibataire et Paul, ceux-ci ont toujours le même nombre de liaisons.

En d'autres termes, le décalage introduit entre les hommes et les femmes n'est pas impacté par l'ajout du nouveau célibataire.

On peut aussi remarquer que ce cas est graphiquement, et numériquement le même que le cas 1B (voir 5.2.1), à la di érence près de l'ordre des célibataires.





Remarques :

1. A partir du constat que les cas 1B et 2A sont similaires, on peut théoriser que il peut exister plusieurs chemins pour arriver au même résultat.
   En e et, que on suive le chemin 1, 1B ou 2, 2A le résultat sera le même.
2. Il est important de remarquer que le décalage entre Paul et sa femme ne s'est pas rétabli, qu'ils ont toujours un nombre de liaisons di érents. Est il possible de rétablir ce décalage, ou de l'ampli er ? Une piste de réponse (donc non démontré !) serait qu'il n'est pas possible de combler ce décalage.

   On peut l'expliquer en partie grâce au premier lemme qui nous fut nécessaire quand nous avions du démontrer qu'il était possible d'ajouter un célibataire (5.1.2) :

   Si C_1 serre la main d'une personne, alors elle devra serrer la main de toutes les personnes ayant plus de mains serrées qu'elle.

   Ici, nous considérons que cette propriété est vraie pour tout célibataire, ici pour C_2.

   Ici, Paul et sa femme n'ont plus le même nombre de liaisons, ce qui induit que le deuxième cas de la démonstration (5.1.2) pour un célibataire n'est plus valable. Cela veut dire que C_2 ne peut plus se relier à Paul, sans se relier à sa femme et aux personnes ayant un nombre inférieur de liaisons, car C_1 aura le même nombre de liaisons que Paul, donc C_1 est la femme de Paul.

   (a) Si C_2 ne se relie pas à C_1, en considérant le fait qu'il s'agit de la femme de Paul, donc que s'y relier serait ne pas respecter les conditions, alors ils auront le même nombre de liaisons, ce qui est interdit.

   (b) Si C_2 se relie à C_1, alors il se relie à la femme de Paul, et ils auront donc le même nombre de liaisons, ce qui est interdit.

5.2.3 Règles intuitives

1. A partir de nos observations e ectuées sur l'ajout du second célibataire, nous pouvons postuler la règle suivante :

   Un nouveau célibataire ne peut pas se comporter comme le célibataire précédemment ajouté.

   NB 1 : Pour ajouter un célibataire, on distingue 3 comportements :
   Se relier à toutes les personnes présentes ;
   Ne se relier à aucunes personnes présentes ;
   Se relier avec la moitié des personnes présentes.
   NB 2 : Se comporter comme signi e que si le célibataire C_n se relie à toutes les personnes présentes, le célibataire C_{n+1} fera de même. Il en va de même avec les 3 comportements possibles.

   Remarquons que si le nouveau célibataire se comporte comme le précédent :

   (a) Le nouveau célibataire ne peut pas se relier à toutes les personnes présentes (exemple : cas 1C)

   (b) Le nouveau célibataire ne peut pas se relier à aucunes des personnes présentes, sinon la condition initiale n'est pas respectée (2 personnes ont 0 liaisons)

(c) Le nouveau célibataire ne peut pas se relier à la moitié des personnes présentes.

Le nouveau célibataire C_{x+1} ne peut pas se relier à la moitié des personnes présentes. Voyons pourquoi :

C_x s'étant relié à la moitié des personnes présentes aura un nombre de liaisons égal à $n + (x - 1); \forall x \geq 1$

n étant le nombre de couples, C_x se relie à une personne par couple. De plus, C_x se relie à tous les célibataires, sauf lui même (d'où $x - 1$).

C_{x+1} aura $n + x$ liaisons.

Comme il ajoute une liaison au x ème célibataire, celui-ci aura $n + (x - 1) + 1 = n + x$ liaisons.

Donc, deux célibataires auront le même nombre de liaisons, donc la condition initiale n'est pas respectée.

2. Pour obtenir un résultat final, plusieurs enchaînements de comportements sont possibles.

En effet, c'est ce qui est observé entre les enchaînements 1, 1B et 2, 2A.

3. Une autre règle intuitive semble se dégager de nos modèles graphiques et théoriques, particulièrement à 5.2.1 et à 5.2.2.

Une fois que C_n s'est relié à Paul et aux personnes ayant un nombre de liaisons supérieur à lui, il n'est plus possible de rétablir le déséquilibre engendré entre Paul et sa femme.

En effet, il semblerait qu'une fois ce comportement choisi, il ne sera plus possible de faire marche arrière. Ainsi, c'est ce que nous pouvons remarquer en suivant le chemin 1, 1B ou 2, 2A.

Dans ces deux cas, il ne restera qu'une seule possibilité d'ajout de célibataire : C_3 suivra le second comportement, il ne se reliera à personne. C_4 n'aura plus que le choix de se relier à toutes les personnes présentes. C_5 à personne, et ainsi de suite.

Cet enchaînement de comportements sera appelé la règle du *minimum-maximum* (le premier célibataire se relie au maximum/minimum de personnes possible, le second au minimum/maximum possible).

Ainsi, dans ce cas, il semble que nous pourrions ajouter n célibataires, d'où la propriété suivante.

4. Il est toujours possible d'ajouter n célibataires une fois que C_n se relie à Paul, et aux personnes ayant un nombre de liaisons supérieur à Paul en suivant la règle du minimum-maximum.

Cette propriété se vérifie si C_1 agit de la sorte, c'est le cas 2. Et en effet, après le cas 2, suit le cas 2A qui suit bien la règle du min-max. Et ainsi de suite, comme nous l'avons vu ci dessus.

Cette propriété se véri e si C_2 agit de la sorte, c'est le cas 1, 1B. OR nous savons que le cas 1B est le même que le cas 2A. Donc, ici aussi, en suivant la règle min-max, il sera toujours possible d'ajouter des célibataires.

Cette propriété se véri e si C_n agit de la sorte, appelons ce cas X_n. Ce cas sera forcément en premier lieu des célibataires ajoutés selon les deux premiers comportements, selon la règle min-max donc. Ensuite, au n ème célibataire, la transition sera e ectuée. A partir de là, nous pouvons postuler que ce cas sera égal au cas Y_n ou la transition est e ectuée au premier célibataire, et où ensuite n 1 célibataires auront été ajoutés selon la règle min-max.
Or, si ces deux cas sont égaux, nous savons que nous pouvons continuer d'ajouter des célibataires selon la règle min-max au cas Y_n, et donc par extension au cas X_n.

D'où la propriété suivante.

5. La règle min-max permet d'ajouter n célibataires

La règle min-max est en e et bien utile : elle permet d'ajouter des célibataires toujours selon le même schéma : un célibataire se relie à toutes les personnes, le suivant à aucunes, et ainsi de suite.

Pouvons nous le démontrer ?

Le premier célibataire se relie à toutes les personnes d'un système de n couples. Ainsi, il aura 2n liaisons (toutes les personnes présentes) nous pouvons aussi dire que le nombre minimum de liaisons sera de 1. En e et, aucune personne n'aura pas d'interaction avec ce célibataire.

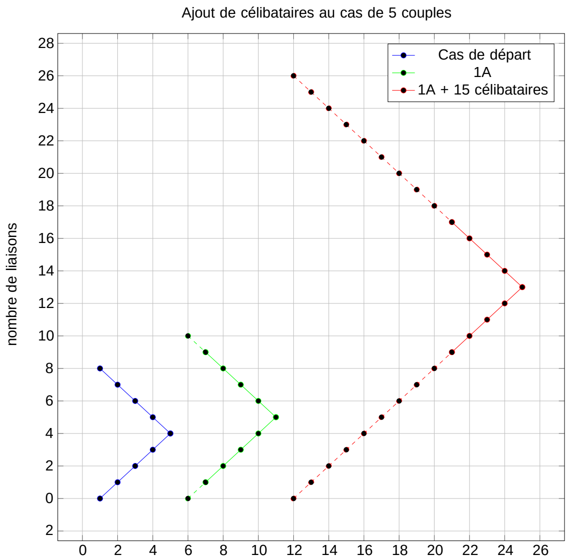
Le second célibataire a un nombre de liaisons égal à 0 ; en e et, le nombre minimal de liaisons étant 1, il peut en avoir 0.

Le troisième célibataire agit comme le premier. Le quatrième comme le second, et ainsi de suite.

> Si n est impair ;
> Le célibataire C_n se relie à toutes les personnes présentes, soit $2n + (n \;\; 1)$ liaisons :
> 2n nombre de personnes des n couples de départ ;
> (n 1) nombre de célibataires sauf lui.
> Le nombre minimal de liaisons sera toujours 1.
>
> Ainsi, le célibataire C_{n+1} pourra toujours avoir 0 liaisons.

NB : n doit être impair car au départ, le nombre minimal de liaisons est 0. Donc, le premier célibataire ajouté doit augmenter ce nombre minimal de 1 a n de pouvoir ajouter le célibataire suivant.

Exemple : ajoutons plus de deux célibataires à 5 couples, selon la règle min-max. Cela nous donne :



n = 5 :

4	4
5	3
6	2
7	1
8	0

1A :

5	5
6	4
7	3
8	2
9	1

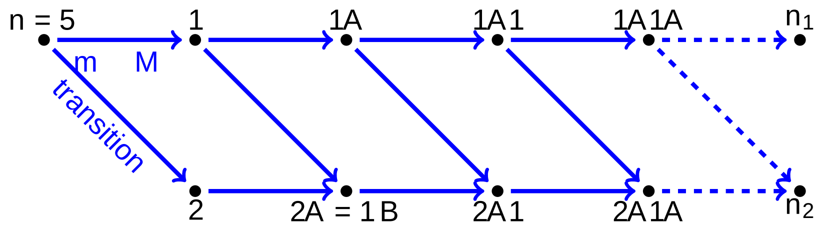
10
0

1A + 15 célibataires :

13	13
14	12
15	11
16	10
17	9

18
[...]
0

6. De toutes les règles précédentes, nous pouvons dessiner une représentation de tous les cas possibles en ce qui concerne le comportement que suivent les célibataires.



Le premier point, n = 5 est le cas de départ avec 5 couples et 0 célibataires.
Une èche représente l'ajout d'un célibataire.
La première colonne de points sont les deux cas d'ajout d'un célibataire ; à savoir les cas 1 et 2 (5.1.1).
La seconde colonne de points sont les cas d'ajout du second célibataire ; à savoir les cas 2A = 1B et 1A.
La troisième colonne sont les cas d'ajout d'un troisième célibataire, et ainsi de suite, jusqu'à n célibataires (casn_1 et n_2).

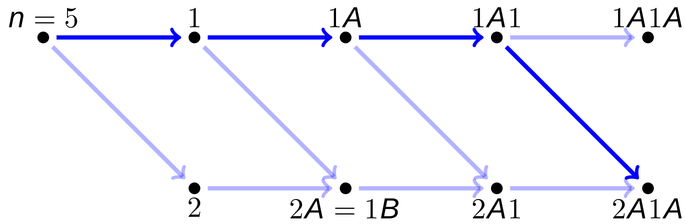
Ce schéma nous permet de visualiser plusieurs choses.

(a) La séparation entre les cas ou le célibataire a interagi avec Paul et les personnes ayant un nombre de liaisons supérieures à lui et les autres cas se réalise sur deux lignes distinctes ;

(b) La transition est à sens unique et peut être réalisée n'importe quand ;

(c) La règle du min-max fonctionne sur les deux lignes (propriété 5) ;

(d) Le schéma se répète. De plus, on peut aussi constater que la propriété 2 fonctionne ici aussi.
En e et, pour arriver au cas 2A1A ; on peut envisager 4 chemins di érents. Par exemple, 1, 1A, 1A1, 2A1A :



(e) Enfin, rien n'empêche le schéma de se répéter à l'infini.

Conclusion :
Toutes ces réflexions axées autour de l'ajout de célibataire nous ont appris de nombreuses choses. Malgré tout, nous ne pouvons en conclure une généralité : nos recherches restent non démontrées, il faut donc rester prudent.
Peut on démontrer qu'il est toujours possible d'ajouter des célibataires (peut-on former un système équilibré quel que soit le nombre de célibataires ?) .

5.3 Autres pistes de réflexion

Plusieurs pistes de réflexions restent encore à explorer dans le cadre de ce problème. En voici quelques unes que nous n'avons pas pu développer :

1. **Question** : Est il possible d'équilibrer un système de couples et/ou de célibataire(s) non équilibré en y ajoutant un (des) couple(s)/célibataire(s) ? (Le démontrer)
   Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cas non équilibré} & & \text{cas équilibré} \\ \begin{array}{c|c} 4 & 4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 7 & 1 \\ 8 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \\ 9 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multicolumn{2}{c}{10} \end{array} \end{array}$$

2. **Question** Peut on démontrer qu'il est toujours possible d'ajouter des célibataires ?