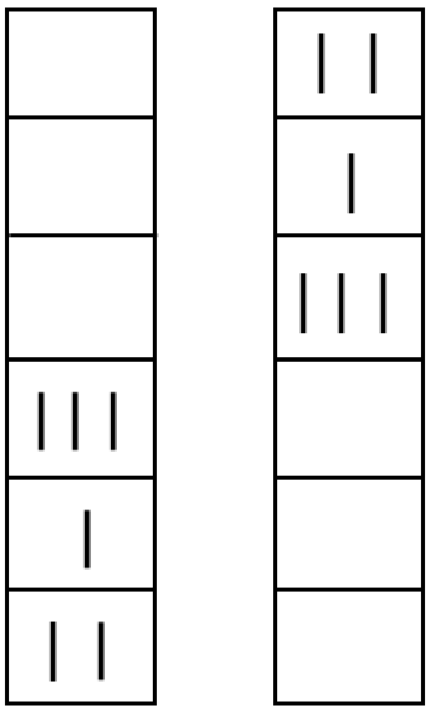
Collège Don Bosco, Woluwe-Saint-Lambert
Année scolaire 2019-2020

Article scientifique MATh.en.JEANS

The Waterboy



Lauria Tatiana et **Makhlouf Rebecca**

Enseignants : M. Thierry Noël et Mme Céline Serta

Table de matières :

1 Introduction

1.1 Problème

Je dois livrer des bouteilles pour alimenter les fontaines à eau d’un immeuble de bureaux. Ce matin, j’en ai déposé 2 au premier étage, 1 au deuxième, 3 au troisième. Le client s’est plaint : je n’ai pas livré aux bons étages. En réalité, il en faut 3 au quatrième, 1 au cinquième et 2 au sixième étage. J’y retourne. Pas de chance, cet après-midi, l’ascenseur est en panne. Je vais devoir monter ces grosses bouteilles à pied ! Comment faire pour monter ou descendre le moins d’étages possible avec une bouteille sur l’épaule ?

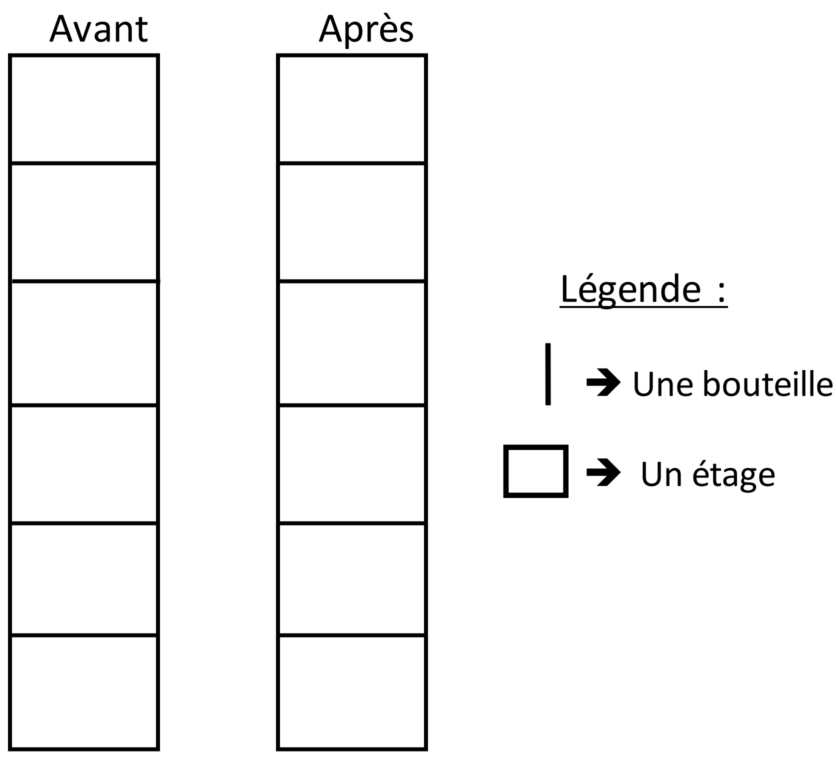
1.2 Condition

Il faut monter ou descendre le moins d’étages possible avec **UNE** bouteille sur l’épaule.

1.3 Convention

La grandeur choisie est l’effort, dont l’unité est symbolisée par la lettre E. Cette unité correspond à un déplacement d’un étage avec une bouteille sur l’épaule.

1.4 Schéma général

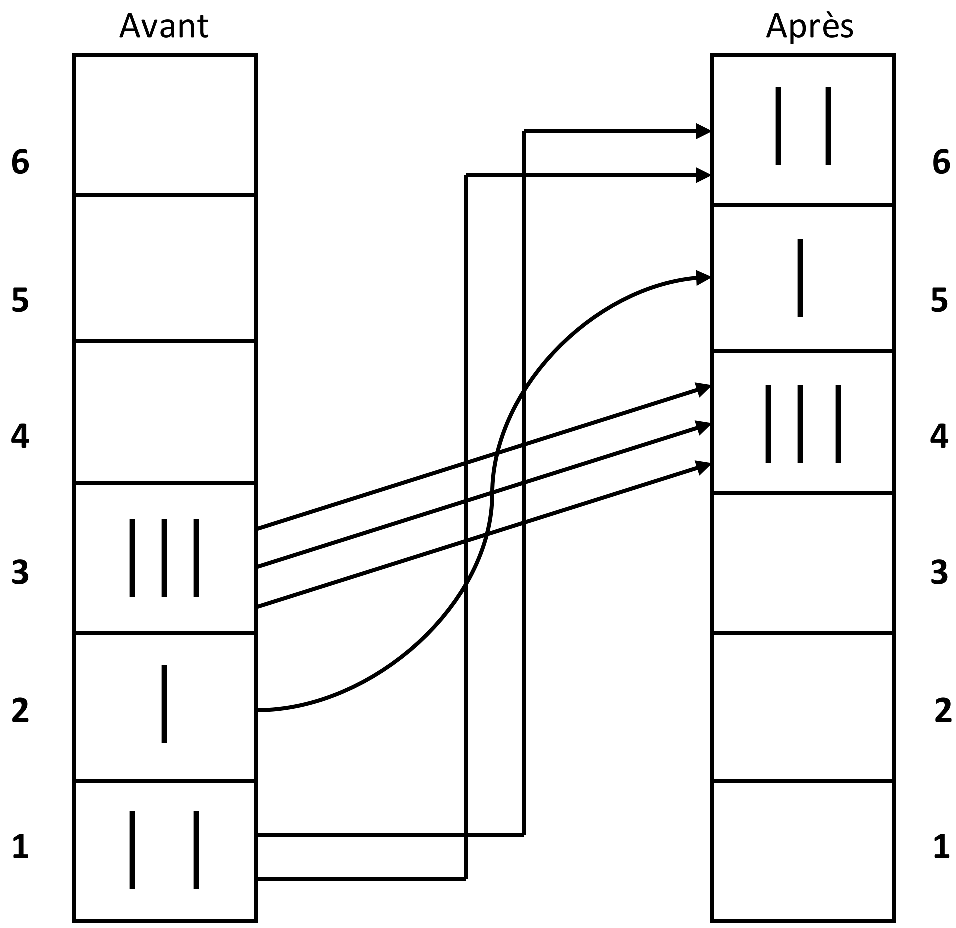


2 Résolution

Nous avons constaté que toutes les solutions sont optimales, en effet, on obtient toujours un effort de 16E. Il y a donc une multitude de solutions permettant de résoudre notre problème, mais nous n'en citerons que quelques-unes, comme exemples.

2.1 Premier exemple

2.1.1 Schéma



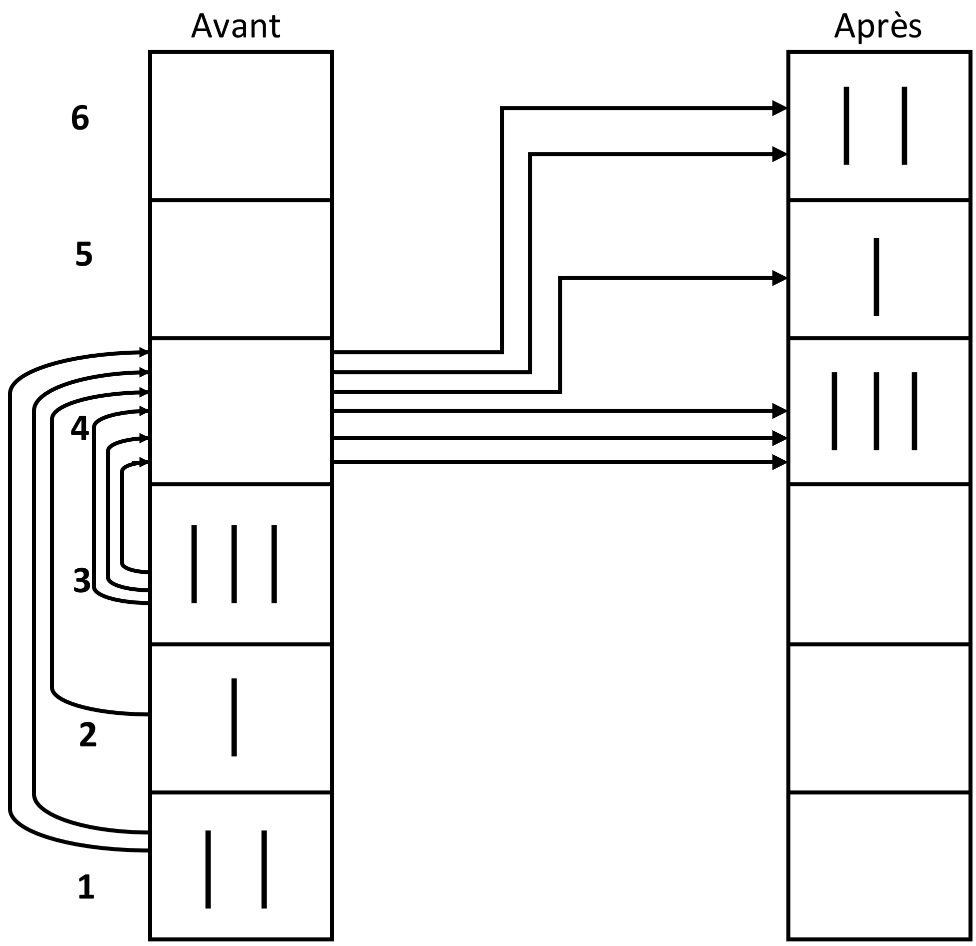
Les flèches représentent le déplacement d'une bouteille.

2.1.2 Explication

Cette solution consiste à déplacer un certain nombre de bouteilles d'un étage vers l'étage où il faut le même nombre de bouteilles.
Concrètement, il y a 2 bouteilles au 1er étage et il en faut 2 au 6ème, donc il faut déplacer ces 2 bouteilles du 1er au 6ème étage.
Il y a 1 bouteille au 2ème étage et il en faut 1 au 5ème, donc il faut déplacer cette bouteille du 2ème au 5ème étage. Il y a 3 bouteilles au 3ème et il en faut 3 au 4ème, donc il faut déplacer ces 3 bouteilles du 3ème au 4ème étage.

2.2 Deuxième exemple

2.2.1 Schéma



2.2.2 Explication

Cette solution consiste à déplacer toutes les bouteilles à l'étage le plus haut par lequel elles passent toutes et ensuite de les distribuer sur les étages restants.
Concrètement, il faut déplacer les 2 bouteilles du 1er étage, la bouteille du 2ème étage, ainsi que les 3 bouteilles du 3ème étage au 4ème étage. Ensuite, il faut monter 1 bouteille du 4ème au 5ème étage. Pour finir, il faut monter 2 bouteilles du 4ème au 6ème étage.

2.3 Conclusion

Ces 2 solutions nous donnent un effort de 16E, ce qui correspond en effet, dans ce cas, au nombre minimal de déplacements avec une bouteille sur l'épaule. Nous considérons que notre problème est un cas particulier, nous en expliquerons la raison plus tard. Nous avons donc trouvé une stratégie générale.

3 Stratégie générale

Cette stratégie fonctionne dans n'importe quel cas et nous permet d'obtenir un effort minimal. Nous allons la développer ci-dessous, à l'aide de formules, de schémas et d'explications.

3.1 Formule

Nous avons créé une formule permettant de calculer l'effort pour monter ou descendre une ou plusieurs bouteille(s) ainsi que l'effort total.

Nous considérons que dans cette formule :

- **Δ** correspond à la différence, en valeur absolue, entre l'étage où l'on souhaite mettre la ou les bouteille(s) (dont nous calculons l'effort) et l'étage où se trouve(nt) la ou les bouteille(s).

- **n** correspond au nombre de bouteille(s) (dont nous calculons l'effort) se trouvant au même étage et que nous voulons déplacer vers un même étage.

- $\mathbf{E_{TOT}}$ correspond au résultat (à la somme d'$\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$, $\mathbf{E_4}$,…), donc à l'effort total.

- $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$, … correspondent chacun à l'effort du déplacement d'une ou de plusieurs bouteilles.

❖ Formule générale :

$$E = n \,.\, \Delta$$

❖ Formule variable selon les cas :

$$E_1 = \Delta_1 \,.\, n_1$$

$$E_2 = \Delta_2 \,.\, n_2$$

$$E_3 = \Delta_3 \,.\, n_3$$

…

$$E_{TOT} = \sum_i E_i$$ **où i = le déplacement numéro « i »**

3.1 Explication de la stratégie générale

Notre stratégie est divisée en plusieurs étapes :

- **1ère étape : Choisir l'ordre dans lequel on souhaite remplir les étages.**

Il y a plusieurs règles à respecter dans un ordre précis afin de choisir le bon ordre de remplissage. Tout d'abord, il faut commencer par remplir les étages se trouvant aux extrémités[1], soit les plus hauts, soit les plus bas. À moins qu'il n'y ait qu'un seul étage à remplir, il y toujours 2 étages se trouvant aux extrémités, donc 2 possibilités. Il faut alors privilégier les étages demandant le plus de bouteilles et procéder donc dans l'ordre décroissant et continuer jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'étages à remplir.

- **2ème étape : Remplir les étages avec les bouteilles les plus proches.**

Il faut remplir les étages avec les bouteilles se trouvant le plus à proximité, de telle sorte que **Δ**[2] soit minimal et donc **E**[3] le sera également. En effet, grâce cela nous obtenons l'effort minimal. Attention, les bouteilles allant du haut vers le bas ne peuvent pas croiser les bouteilles allant du bas vers le haut. Celles-ci ne peuvent pas passer par le même étage.

- **3ème étape : Calculer l'effort du déplacement d'une ou de plusieurs bouteilles.**

Afin de trouver la valeur de l'effort, il faut donner des valeurs à A et B en fonction des différents cas et les multiplier. Il faut refaire toutes ces étapes pour chaque étage que l'on souhaite remplir.

$\mathbf{E_1 = \Delta_1 \cdot n_1}$ $\qquad$ $\mathbf{E_2 = \Delta_2 \cdot n_2}$ $\qquad$ $\mathbf{E_3 = \Delta_3 \cdot n_3}$ $\qquad$ $\mathbf{E_4 = \Delta_4 \cdot n_4}$

- **4ème étape : Calculer l'effort total.**

Il faut additionner tous les efforts trouvés afin d'obtenir l'effort total.

$$\mathbf{E_{TOT} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \ldots}$$

---

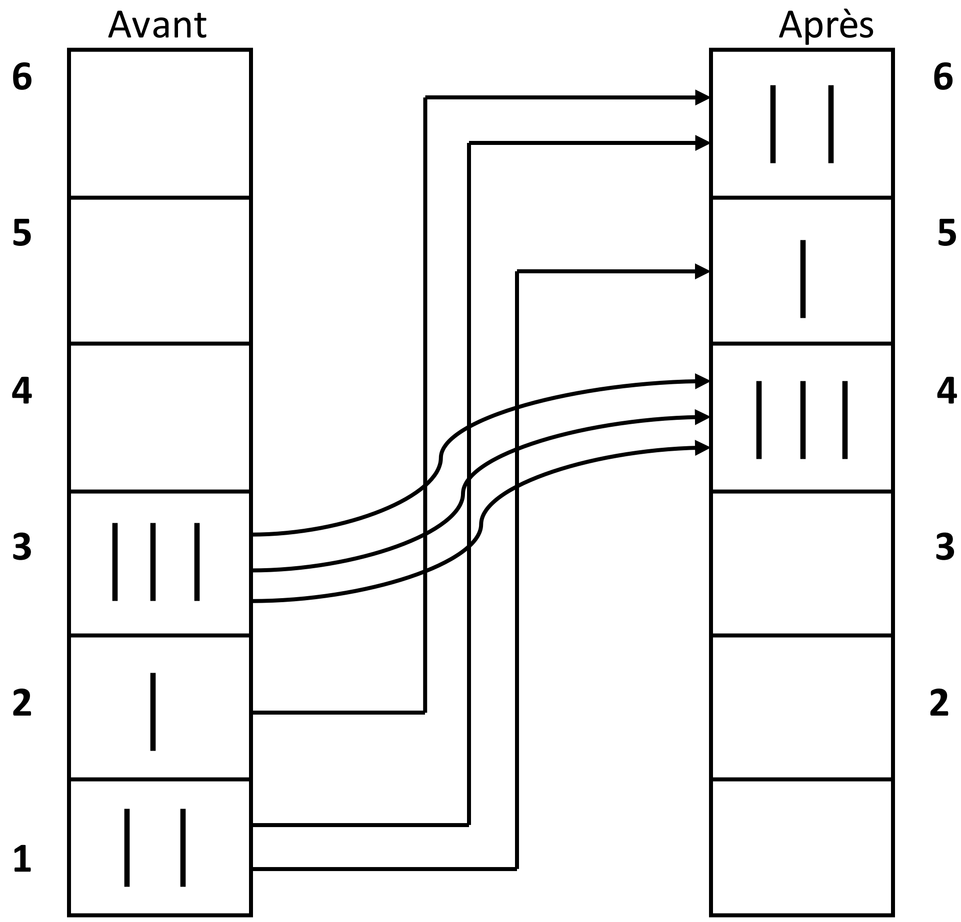
[1] Il faut remplir par exemple, le 4ème, le 5ème et le 6ème étage, les étages se trouvant aux extrémités sont le 6ème et le 4ème étage car le 6ème est situé le plus haut et le 4ème le plus bas parmi les étages à remplir.

[2] Correspond à la différence, en valeur absolue, entre l'étage où l'on souhaite mettre la ou les bouteille(s) et l'étage où se trouve(nt) la ou les bouteille(s).

[3] Correspond au résultat (à la somme de $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$,$\mathbf{E_4}$ …), donc à l'effort total.

3.2 Schéma

Cette stratégie générale fonctionne également pour notre problème. Le schéma ci-dessous l'illustre.



3.4 Explication

- **1ère étape : Choisir l'ordre dans lequel on souhaite remplir les étages.**

Nous devons choisir soit de commencer par le 4ème étage, situé à l'extrémité du bas et demandant 3 bouteilles, soit par le 6ème étage, situé à l'extrémité du haut et demandant 2 bouteilles ou par le 5ème étage qui ne se situe pas à une des extrémités et qui demande 1 bouteille. La règle nous dit qu'il faut commencer par l'étage qui est situé à une des extrémités et qui demande le plus de bouteilles. On commence donc par remplir d'abord le 4ème, ensuite le 6ème et pour finir le 5ème.

- **2ème étape : Remplir les étages avec les bouteilles les plus proches.**

On commence par remplir le 4ème étage en prenant les bouteilles les plus proches, donc 3 bouteilles du 3ème étage. Ensuite, on remplit le 6ème étage avec la bouteille du 2ème et une des bouteilles du 1er étage. Pour finir, on remplit le 5ème étage avec la bouteille restante du 1er.

- **3ème étape : Calculer l'effort du déplacement d'une ou de plusieurs bouteilles.**

$\Delta_1 = 4 - 3 = 1$	$n_1 = 3$	$E_1 = \Delta_1 \,.\, n_1 = 1 \,.\, 3 = 3E$
$\Delta_2 = 6 - 2 = 4$	$n_2 = 1$	$E_2 = \Delta_2 \,.\, n_2 = 4 \,.\, 1 = 4E$
$\Delta_3 = 6 - 1 = 5$	$n_3 = 1$	$E_3 = \Delta_3 \,.\, n_3 = 5 \,.\, 1 = 5E$
$\Delta_4 = 5 - 1 = 4$	$n_4 = 1$	$E_4 = \Delta_4 \,.\, n_4 = 4 \,.\, 1 = 4E$

- **4ème étape : Calculer l'effort total.**

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = E_{TOT} = 3 + 4 + 5 + 4 = 16E$$

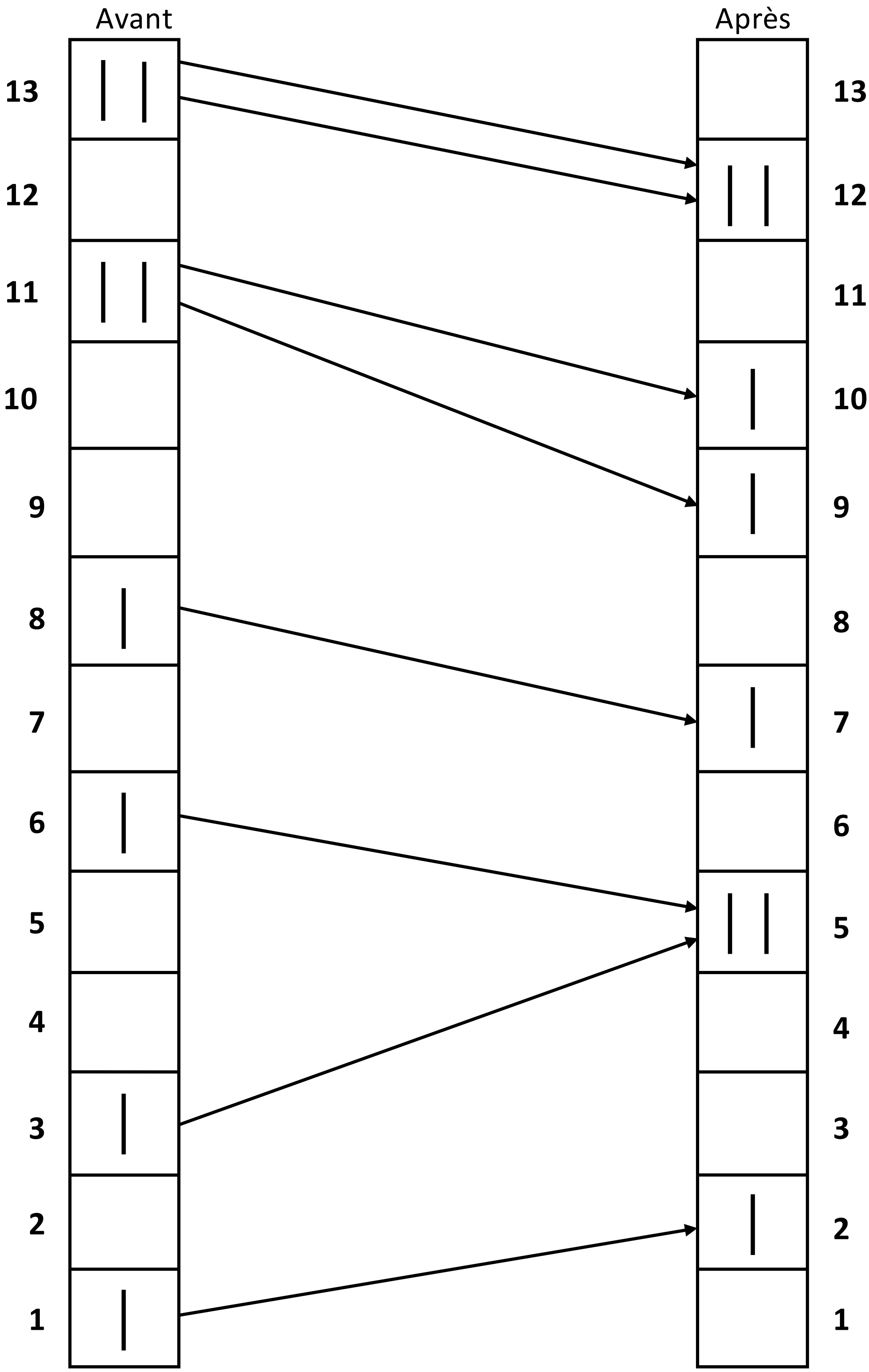
3.5 Résultat

Cette méthode nous donne bien un effort de 16E, ce qui correspond en effet, dans ce cas, au nombre minimal de déplacements avec une bouteille sur l'épaule.

3.6 Autre exemple

Nous allons vérifier si notre stratégie fonctionne avec un plus grand nombre d'étages et de bouteilles. Pour cela nous allons utiliser un exemple dans lequel il y aura 13 étages et 8 bouteilles. Le schéma ci-dessous illustre cet exemple.

3.6.1 Schéma



3.6.2 Explication

- **1ère étape : Choisir l'ordre dans lequel on souhaite remplir les étages.**

On commence par remplir le 12ème étage car c'est l'étage situé à l'extrémité qui contient le plus de bouteilles. Ensuite, nous avons le choix entre le 2ème et le 10ème étage. Nous avons pris le 2ème car cela n'a pas d'importance. Nous devons ensuite remplir le 5ème étage car c'est l'étage situé à l'extrémité qui contient le plus de bouteilles. Après cela nous remplissons le 7ème suivi du 10ème et enfin le 9ème étage. Pour finir, l'un après l'autre, on remplit le 12ème étage, le 2ème étage, le 5ème étage, 7ème étage, 10ème et enfin le 9ème étage.

- **2ème étape : Remplir les étages avec les bouteilles les plus proches.**

On commence par remplir le 12ème étage en prenant les bouteilles les plus proches. Dans ce cas-ci, il y plusieurs bouteilles se trouvant le plus proche, à la même distance par rapport à l'étage à remplir. Comme les bouteilles allant du haut vers le bas ne peuvent pas croiser les bouteilles allant du bas vers le haut, on remplit le 12ème étage avec les 2 bouteilles se trouvant au 13ème étage. Pour la même raison, nous remplissons le 2ème étage avec la bouteille du 1er. Ensuite, on remplit le 5ème étage avec la bouteille du 3ème étage et la bouteille du 6ème. De la même façon, on remplit le 7ème avec la bouteille du 8ème étage, le 10ème avec une des 2 bouteilles du 11ème et le 9ème avec la bouteille restante du 11ème étage.

- **3ème étape : Calculer l'effort du déplacement d'une ou de plusieurs bouteilles.**

$\Delta_1 = 13 - 12 = 1$	$n_1 = 2$	$E_1 = \Delta_1 \,.\, n_1 = 1 \,.\, 2 = 2E$
$\Delta_2 = 2 - 1 = 1$	$n_2 = 1$	$E_2 = \Delta_2 \,.\, n_2 = 1 \,.\, 1 = 1E$
$\Delta_3 = 5 - 3 = 2$	$n_3 = 1$	$E_3 = \Delta_3 \,.\, n_3 = 2 \,.\, 1 = 2E$
$\Delta_4 = 6 - 5 = 1$	$n_4 = 1$	$E_4 = \Delta_4 \,.\, n_4 = 1 \,.\, 1 = 1E$
$\Delta_5 = 8 - 7 = 1$	$n_5 = 1$	$E_5 = \Delta_5 \,.\, n_5 = 1 \,.\, 1 = 1E$
$\Delta_6 = 11 - 10 = 1$	$n_6 = 1$	$E_6 = \Delta_6 \,.\, n_6 = 1 \,.\, 1 = 1E$
$\Delta_7 = 11 - 9 = 2$	$n_7 = 1$	$E_7 = \Delta_7 \,.\, n_7 = 2 \,.\, 1 = 2E$

- **4ème étape : Calculer l'effort total.**

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 = E_{TOT} = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10E$$

3.6.3 Résultat

Cette méthode nous donne bien un effort de 10E, ce qui correspond en effet, dans ce cas, au nombre minimal de déplacements avec une bouteille sur l'épaule.

4 Cas particuliers

Nous avons trouvé 2 cas particuliers. Notre stratégie générale fonctionne également pour ces 2 cas. Pour le 1er cas, le problème devient très facile à résoudre car on obtient facilement un effort minimal.

4.1 Premier cas particulier : S'il faut uniquement monter ou descendre toutes les bouteilles.

4.1.1 S'il faut uniquement monter les bouteilles.

Dans le cas où, pour remplir les étages il faut uniquement monter les bouteilles, peu importe comment on les monte, on obtiendra toujours l'effort minimal.
Cependant, il y a une condition : il faut uniquement monter les bouteilles, on ne peut pas descendre une ou plusieurs bouteilles car l'effort ne sera alors pas minimal.

4.1.1.1 Exemple

Notre problème fait parti des cas particuliers de ce type, c'est pourquoi, avec n'importe quelle solution on obtient toujours un effort de 16E. Nous ne mettrons pas de schéma pour illustrer la situation afin de ne pas alourdir notre travail.

4.1.2 S'il faut uniquement descendre les bouteilles.

Comme pour le 1er cas, si pour remplir les étages il faut uniquement descendre les bouteilles, peu importe comment on les descend, on obtiendra toujours l'effort minimal.
Cependant, il y a une condition : il faut uniquement descendre les bouteilles, on ne peut pas monter une ou plusieurs bouteilles car l'effort ne sera alors pas minimal.

4.1.2.1 Exemple

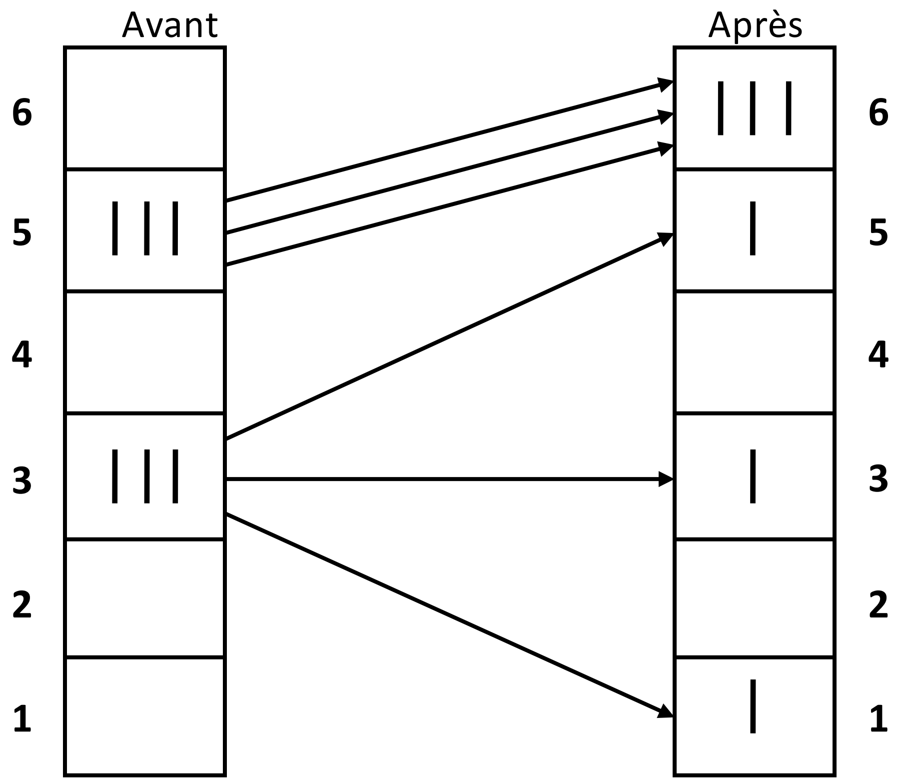
On pourrait inverser la situation initiale et finale de notre problème, afin qu'il faille descendre les bouteilles du 4ème, 5ème, et 6ème étage pour remplir le 1er, 2ème, et 3ème étage. L'effort obtenu sera le même que pour notre problème, donc 16E.

4.2 Deuxième cas particulier : Si l'étage que l'on souhaite remplir contient déjà une ou plusieurs bouteilles.

L'étage que l'on souhaite remplir peut-être déjà rempli complètement, peut contenir plus de bouteilles qu'il n'en faut ou pas assez. Dans ce cas-là, on obtiendra un effort minimal si on utilise la stratégie générale, en déplaçant les bouteilles qui remplissent un étage **ou** si on ne la respecte pas tout à fait, en ne déplaçant pas les bouteilles qui sont sur l'étage de la situation initiale et qui remplissent déjà ce même étage ais dans la situation finale.

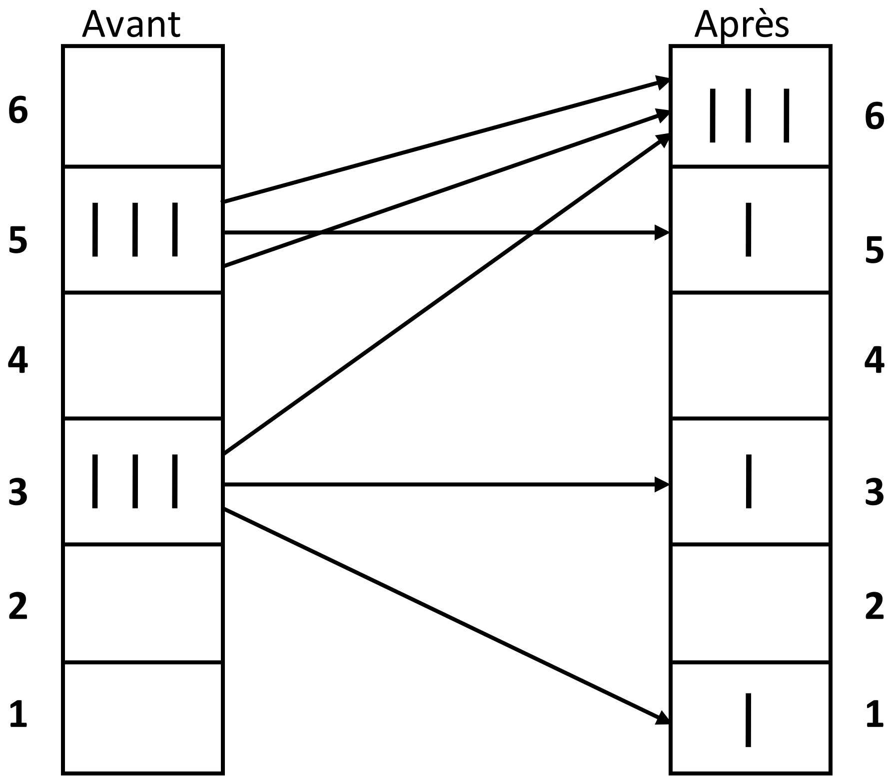
4.2.1 Exemple

Résolution respectant la stratégie générale :



Cette solution nous donne un effort de 7E.

Résolution ne respectant pas la stratégie générale :



Cette solution nous donne également un effort de 7E.

5 Remerciements