Les navires singuliers

Article rédigé par Balon Zoé, Garnir François, Hautot Clothilde, Herlem Chloé, Seny Julien

Le problème que nous avons choisi cette année pour le projet Math en Jeans s'intitule « Les navires singuliers ». Pour définir et ensuite étudier un navire singulier, il faut d'abord définir ce qu'est un nombre singulier, c'est donc la première chose que nous ferons. Ensuite, nous définirons « un navire singulier » et nous nous intéresserons aux longueurs qu'un navire peut prendre et à leur possible infinité.

Les nombres singuliers sont une nouvelle famille de nombres. Elle comprend tous les nombres qui ne comptent pas de « carrés » dans leurs diviseurs. Il y a cependant une exception, on exclut « 1 » des carrés de nombres pour trouver les nombres singuliers. Effectivement, tout nombre comprend « 1 » dans ses diviseurs. Il n'y aurait donc pas de nombres singuliers.

Illustrons :

Le chiffre 2 est-il singulier ? Oui parce que div (2) = {1, 2} et ni 2 ni 1 (exceptionnellement) ne sont des carrés.

Le chiffre 9 est-il singulier ? Non parce que div (9) = {1, 3, 9} et 9 est le carré de 3.

Un navire singulier est une succession de nombres singuliers entourée de nombres non singuliers. Donc prenons « n », le premier nombre de notre navire. « n + 1 », « n + 2 », ... les membres de nos navires. Et enfin, « n - 1 » et « n + m » qui entourent notre navire et qui sont donc non singuliers, avec « m » qui représente la longueur du navire. Si « m » vaut 3, on dira que le navire a une longueur de 3. « m » correspond effectivement au nombre de termes que compte le navire. De cette manière, on a :

n - 1, n, n + 1, n + 2, ..., n + m

Où les nombres singuliers sont en vert et les non singuliers en rouge.

Illustrons :

9, 10, 11, 12 : est-ce un navire singulier ?

On peut voir que les extrémités du navire (9 et 12) ne sont pas des nombres singuliers, en effet 9 est lui-même un carré et 12 compte 4 dans ses diviseurs. Ensuite, on remarque que 10 et 11 sont, eux, bien singuliers puisqu'ils ne comptent pas de carré dans leurs diviseurs. Nous avons un navire singulier, mais de quelle taille ?

Ici ; 9 est notre "n-1", 10 notre "n", 11 est "n +1" et enfin 12 "n +m", où m est ici égal à 2. Notre navire a donc une longueur de 2.

12, 13, 14 : est-ce un navire singulier ?

On peut voir que 12 est bien non singulier mais 14, lui, est singulier. En effet, il ne compte pas de carré dans ses diviseurs. Il faut donc aller chercher plus loin et on arrive à 16 qui est le prochain nombre non singulier après 12. Ce qui nous donne :

⇒ 12, 13, 14, 15, 16

On a donc un navire singulier où "m" vaut 3, celui-ci est donc de longueur 3.

Sur le schéma suivant, nous avons repris les 35 premiers nombres, les colorant en rouge ou vert selon leur singularité. Ainsi, la répartition des longueurs de navires apparait clairement.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

Dans nos recherches nous nous sommes attardés sur 2 questions principales :

- Quelle est la taille maximale d'un navire singulier ?
- Pour chaque taille de navire singulier, y en a-t-il une infinité ?

Maintenant que vous connaissez les propriétés fondamentales inhérentes aux nombres singuliers, je vous invite à poursuivre votre lecture avec les résultats que nous avons trouvés en un an de travail !

Pour commencer, nous avons démontré qu'un navire singulier ne peut pas être plus grand que 3 nombres. Comment ? Grâce à la récurrence des multiples de 4 ! Nous savons qu'aucun multiple de 4 ne sera jamais singulier car ils seront tous divisibles par 4, qui est un carré. Par conséquent, après trois nombres nous aurons toujours un non singulier, ce qui empêche tout navire d'être plus grand que 3. Cependant, il existe évidemment des navires plus petits étant donné qu'entre les multiples de 4, il peut y avoir d'autres multiples de carrés qui réduiront la taille du navire.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

En effet, ici, 4, 8, 12, … apparaissent à intervalle régulier (de 4), empêchant les navires singuliers (les îlots de nombres en vert) d'excéder la taille de 3. À un certain stade, on va voir l'apparition des multiples de 9, puis de 25, …, réduisant encore la taille des navires.

Malgré cette réduction progressive de la quantité de nombres premiers, nous avons également démontré qu'il existe une infinité de nombres singuliers. Pour ce faire, nous avons prouvé qu'il y a une infinité de nombres premiers, car les nombres premiers sont toujours singuliers par définition. S'ils ne sont divisibles par aucun autre nombre qu'eux-mêmes et 1, ils ne peuvent pas être divisibles par un autre carré que 1. Il existait déjà une démonstration de l'infinité de nombres premiers, mais nous avons créé notre propre démonstration que voici :

Procédons par l'absurde.

Soit c le dernier nombre premier (nous supposons dans un premier temps qu'il y a un *dernier* nombre premier) et appelons Z le nombre tel que :

$Z=2x3x5x7x11x.....x\ c\ +1$. Deux cas peuvent alors se présenter :

• Z est premier (ce qui est impossible par hypothèse car $Z>c$ ici)

ou

• Z n'est pas premier (ce qui est impossible car 1 n'est pas multiple d'un des nombres premiers)

Ce qui est absurde. On prouve ainsi qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Tentons désormais de montrer l'infinité des navires de longueurs 1 ($m=1$). Attention, si nous avons précédemment prouvé l'infinité des nombres singuliers, pour montrer l'infinité des navires de 1, il faudra montrer que les nombres entourant notre nombre singulier sont bien non-singuliers. Nous allons d'abord expliquer notre démonstration avec des *nombres*, afin de se familiariser avec notre méthode de démonstration, puis nous généraliserons.

La structure de suite de nombres que nous allons utiliser dans notre démonstration est la suivante : n, n+1, 4k avec "n" multiple de 2 mais pas de 4, construit dans le cas présent comme un nombre non singulier, et 4k un multiple de 4 et donc, nécessairement, un nombre non singulier.

Dans notre exemple numérique, nous construisons n comme un produit de nombres premiers jusqu'à c (défini comme dans la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers), où c vaut 7 et nous remultiplions ce produit par 3 (2ème nombre singulier différent de 1) afin d'avoir un nombre non singulier (puisque construit comme un multiple de 3 (enchaînement de nombres premiers) x 3 (2ème opération effectuée)). Ainsi :

$n = 2\times3\times5\times7\times3 = 630$ non singulier car multiple de 9

$n+1 = 630 + 1 = 631$ premier donc singulier

$n+2 = 632$ non singulier car multiple de 4 (vu la structure)

On voit ici que la démonstration fonctionne bien avec des nombres, nous pouvons désormais la généraliser :

Soit c un nombre premier.

$n = 2\times3\times5\times7\times11\times\ldots\times c \times3$ N'est pas singulier

$n+1 = 2\times3\times5\times7\times\ldots\times c \times3 +1$ Est un nombre premier donc nombre singulier

Ainsi, pour n'importe quel c, il y a un n+1 singulier et puisque, pour s'en référer de nouveau à notre structure initiale, n et 4k ne sont pas singuliers par construction, l'infinité des navires de 1 est prouvée.

Evidemment, la démonstration fonctionne de manière analogue lorsqu'on multiplie par un autre nombre (inférieur à c ou multiple d'un des nombres premiers repris dans le produit) puisque l'on se retrouve aussi avec un nombre non singulier.

Par exemple :

$n=2\times3\times5\times\ldots\times c \times5$ n'est pas singulier car multiple de 25

Intéressons-nous désormais aux navires de longueur supérieure à 1 : par la récurrence des multiples de 4, puisque nous avons déjà établi que la longueur maximale pour un navire est de 3, reste seulement à démontrer qu'il existe une infinité de navires de longueurs 2 et 3.

Nous pouvons résumer la singularité des navires de longueur 2 et 3 en nous intéressant aux nombres naturels consécutifs suivants :

$$\mathbf{4m, \quad n - 1, \quad n, \quad n + 1, \quad 4(m + 1)}$$

avec **4m** un multiple de 4, **n** un multiple de 2 mais pas de 4 (donc un nombre potentiellement singulier, mais pas *nécessairement*) et **n - 1** et **n + 1** les nombres précédents et suivants n. Pour qu'un navire de 2 ou 3 existe dans cette suite de nombre, n doit *nécessairement* être singulier puisque **4m** et **4(m+1)** ne sont pas singuliers.

Prouvons par l'absurde, l'infinité dans $\mathbb{N}$ de nombres **n + 1** singuliers lorsque **n** est singulier.

Prenons n qui est le produit des nombres premiers consécutifs jusqu'à c. **n** est singulier, multiple de 2, et évidemment non multiple de 4.

Supposons que **n + 1** soit un nombre singulier, soit un multiple d'un naturel par un carré. Ce carré doit être le carré d'un nombre impair puisque s'il était pair, ce serait un multiple de 4, ce qui est impossible puisque l'autre membre est impair. Comme tout nombre impair peut s'écrire sous la forme (2k+1) avec $k\in \mathbb{N}$, ce carré peut s'écrire sous la forme $(2k+1)^2$.

4 cas se profilent, pour le multiple du carré : un naturel multiple de 4 (4a), un naturel multiple de 4 auquel on ajoute respectivement 1 (4a + 1), 2 (4a + 2) ou 3 (4a + 3).

Premier cas : le multiple du carré est du type 4a (c'est-à-dire multiple de 4) :

$$\mathbf{2.3.5.7.11.\ \ldots\ .c + 1 = 4a\,(2k + 1)^2}$$

Ce qui aboutit directement à une absurdité : le membre de gauche est un impair car il s'agit d'un produit de nombres impairs (3.5…c), c'est-à-dire un nombre impair, multiplié par 2, soit un nombre pair. Puisqu'on ajoute à ce nombre 1, celui-ci redevient un nombre impair. Dans le membre de droite, on a un nombre pair puisque multiple de 4. D'où l'absurdité.

Deuxième cas : le multiple du carré est du type 4a+1

$$\mathbf{2.3.5.7.11.\ \ldots\ .c + 1 = (4a + 1)(2k + 1)^2}$$

$\Leftrightarrow \mathbf{2.3.5.7.11.\ \ldots\ .c + 1 = 16ak^2 + 16ak + 4a + 4k^2 + 4k + 1}$ En distribuant le carré

$\Leftrightarrow \mathbf{2.3.5.7.11.\ \ldots\ .c = 4k^2 + 4k}$ En retirant 1 de chaque côté.

$\Leftrightarrow \mathbf{3.5.7.11.\ \ldots\ .c = 2k^2 + 2k}$ En divisant par 2 de chaque côté.

De même que précédemment, le résultat obtenu est bien impossible car nous obtenons un nombre impair dans le membre de gauche (un produit de nombres impairs *est* un nombre impair) et un nombre pair dans le membre de droite (en effet, c'est un multiple de 2). Puisque les deux membres sont censés être égaux, cela aboutit directement à une absurdité. Cela montre donc que, **n + 1** n'est *pas* un produit d'un multiple de 4 auquel on ajoute 1 par un carré.

Cependant, dans les cas 3 et 4, nous n'avons pas encore trouvé de démonstration satisfaisante.

Si nous avions initialement fait un amalgame en supposant que puisque l'un des cas était absurde, tous l'étaient, le fait que notre démonstration se fasse par l'absurde rend cette conclusion abusive et donc fausse.

Bien que, comme vous avez pu le constater, nous ne pouvons que vous inciter, si vous le désirez à clôturer (proprement) notre démarche de recherche et, en particulier, notre démonstration finale, nous devons tout de même vous faire part de nos conjectures : nous pensons qu'il existe bien une infinité de n + 1 singulier lorsque n l'est également.

Si nous nous sommes également penchés sur la question de l'infinité de nombres singuliers n - 1, nous n'avons pas trouvé de démonstration non plus la concernant.

Il peut être intéressant de préciser que pour prouver les infinités des navires de 2 et de 3, il faut nécessairement s'intéresser au n - 1 **et** au n + 1 ainsi qu'à leur conditions pour conclure de leur infinité car n'oublions pas qu'un navire se caractérise par des nombres singuliers consécutifs **entourés de nombres non singuliers** !

En conclusion, nous avons prouvé l'infinité des nombres singuliers, la limite de navire singulier et l'infinité des navires de 1. Nous invitons ceux qui veulent à poursuivre nos recherches qui, vous l'aurez compris, sont loin d'être achevées.