Gilles Defresne

Matthias Meunier

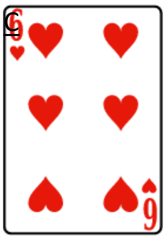
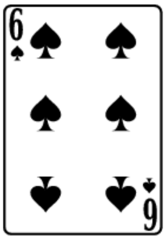
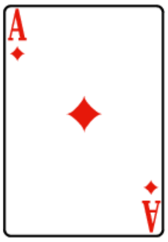
Les mathémagiciens

Table des matières :

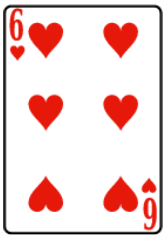
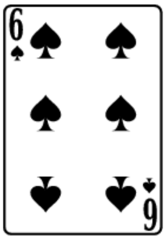
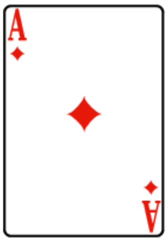
1) Le problème

Un magicien fait piocher 5 cartes, au hasard, d'un jeu classique de 52 cartes à un volontaire. Une fois les 5 cartes choisies, l'assistant les regarde et en place 4 face visible en choisissant l'ordre et en garde une cachée à l'abri des regards du magicien. À l'aide des 4 cartes visibles et de l'ordre, le magicien va deviner la valeur et la couleur de la carte cachée.

Par exemple voici les 5 cartes piochées :

L'assistant décide de les placer dans cet ordre et de cacher la dame de pique.

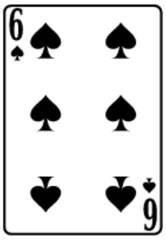
Grâce aux cartes visibles et leur ordre, le magicien trouvera que la carte cachée est la dame de pique

2) Question de recherche :

Quelle manière de choisir les cartes et l'ordre permet au magicien de toujours deviner la carte cachée ?

*Avant de continuer, un rappel du jargon des jeux de cartes :

- On appelle « couleur » le cœur, le trèfle, le carreau et le pique. (Si on parle de couleur, on ne parle pas du rouge ou du noir).
- Pour les 5 cartes piochées on parlera d'une main. Par exemple « l'assistant à dans sa main que des cartes de la même couleur ». Ça signifie que dans les 5 cartes piochées, il n'a que des piques ou des cœurs, etc.
- Pour la valeur d'une carte c'est très simple :
    - La valeur de la carte ci-dessous est 6



    - La valeur de la carte ci-dessous est dame

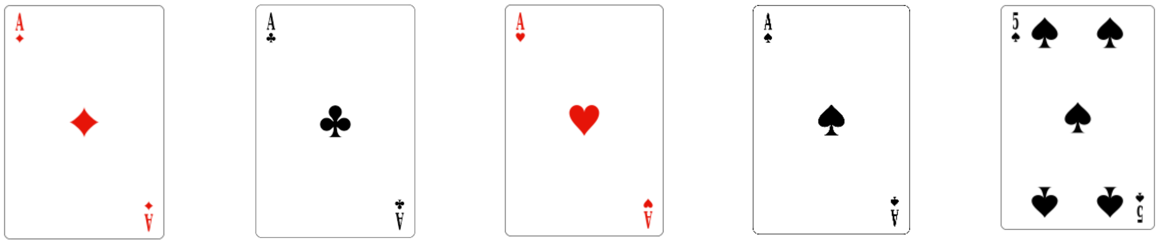
3) 1ère tentative :

On a d'abord pensé à diviser le problème en plusieurs cas en fonction des différentes mains possibles

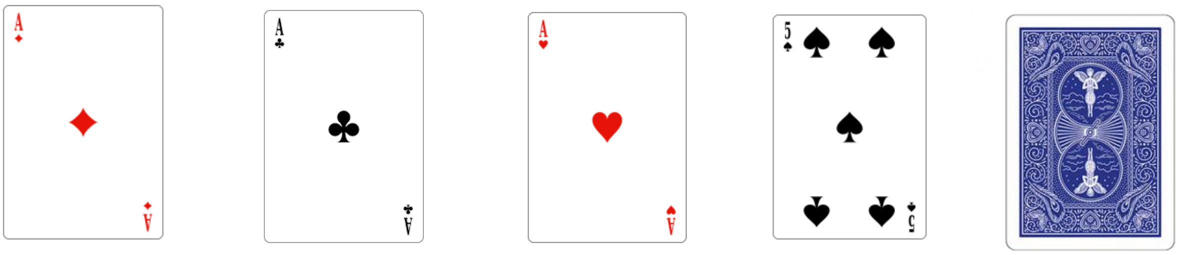
Voici quelques cas :

- Cas 1: 4 cartes de même valeur
- Cas 2: 3 cartes de même valeur et au moins un carte de même signe
- Cas 3: 3 cartes de même valeur et aucune autre carte de même signe
- Cas 4: 2 paires
- Cas 5: 1 paire
- Cas 6: aucune carte de même valeur

- <u>1er cas : 4 cartes de même valeur</u>
    - Ici par exemple les 4 as et un 5



L'assistant décidera de placer trois as les uns à côté des autres et garder le dernier as caché comme ci-dessous.

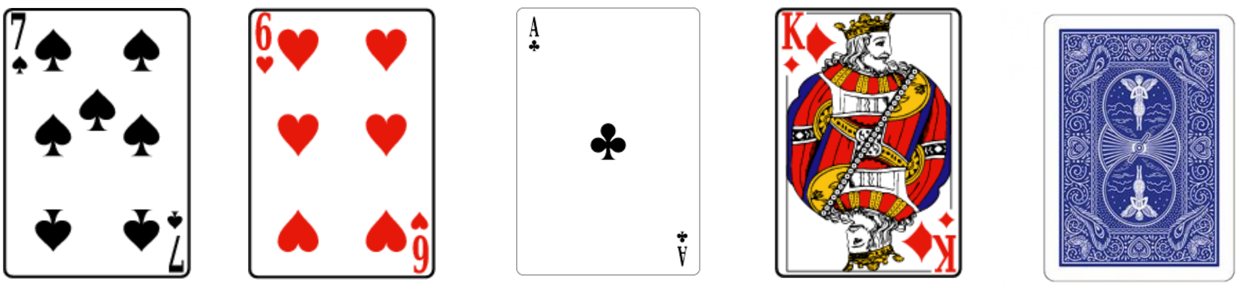


Ainsi le magicien comprend que la carte mystère est le dernier as.

Inutile de détailler les cas car en utilisant cette façon d'ordonner les cartes en fonction de la main on se retrouve vite bloqué avec certains types de main.

Comme par exemple cette main :

On saurait faire deviner la couleur si on décidait de cacher le 7 ou le 8 et en plaçant l'autre en première position en établissant que si aucune carte visible n'est de même couleur ou de même valeur, alors la carte cachée est de même couleur que la première carte visible, comme ci-dessous. Mais il est impossible de deviner la valeur, ici que c'est un 8.



4) 2^{e} tentative :

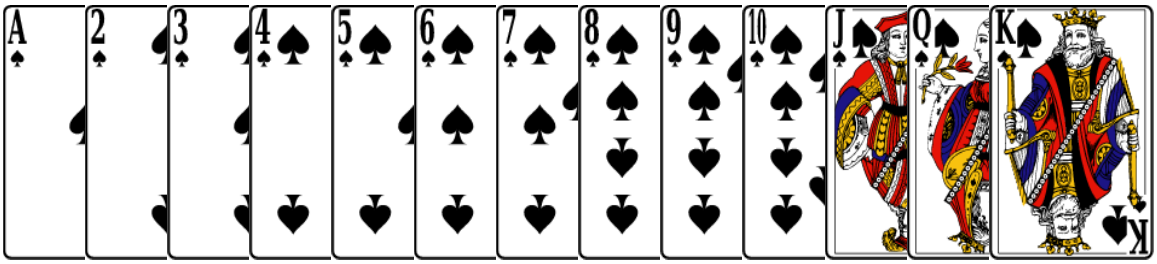
On a donc essayé de d'autre classement non-concluant, comme utiliser la croissance /décroissance des valeurs ou additionner /soustraire des valeurs.

- Simplifions le problème :

Étant toujours bloqués, on décide de reprendre depuis le début et de simplifier le problème en ne prenant que des cartes de même couleur, ce qui réduit le paquet à 13 cartes. Pour conserver la difficulté on décide de ne piocher que 4 cartes.

On trouve la solution d'attribuer aux cartes une valeur de 1 à 13 comme ci-dessous :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13



On décide de coder l'ordre des cartes visibles pour déterminer une valeur.

On ajoute la valeur à la plus haute carte visible.

La valeur obtenue est celle de notre carte.

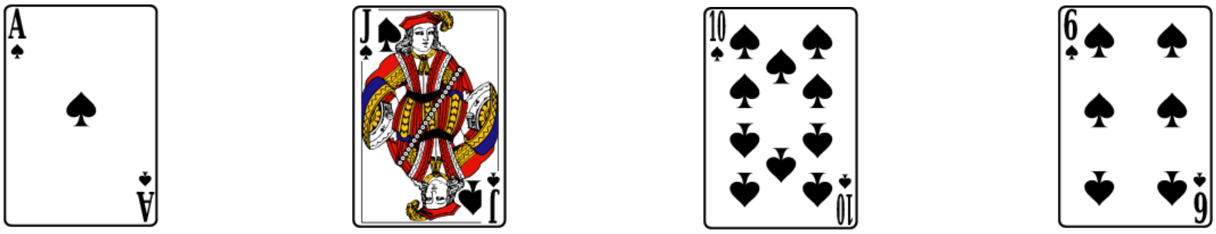
Si on dépasse 13, on repasse à 1. (modulo 13).

- Par exemple: 15=13+2 donc 2

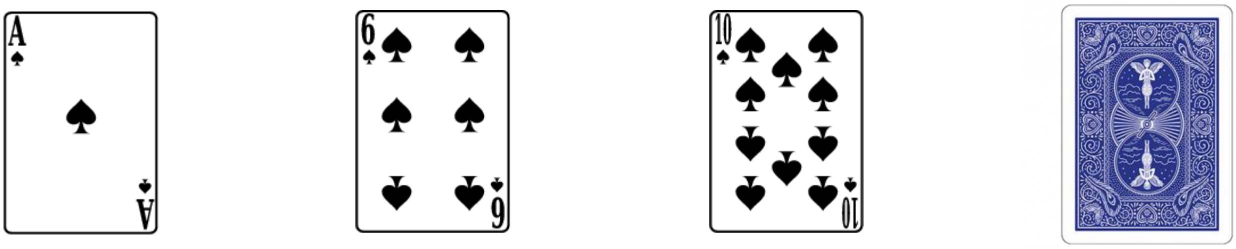
Voici le tableau qui reprend les valeurs à ajouter attribuées à l'ordre des cartes. En sachant que a,b,c représentent les valeurs de 1 à 13 et que a<b<c

ordre	**valeur**
a b c	1
a c b	2
b a c	3
b c a	4
c a b	5
c b a	6

Un exemple s’impose :

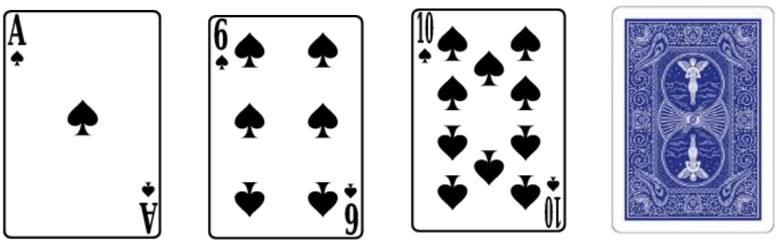


Si l’assistant pioche ces cartes, il choisira de cacher le valet et de placer les autres cartes dans l’ordre ci-dessous.



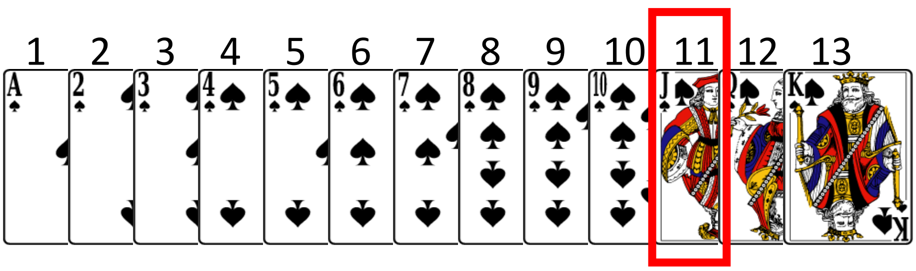
En codant l’ordre des cartes en fonction de leur valeur, on trouve la valeur à ajouter à la plus haute carte visible avec notre tableau, en sachant que a<b<c

a b c 10+1=11



ordre	valeur
a b c	1
a c b	2
b a c	3
b c a	4
c a b	5
c b a	6

On obtient 11 qui est bien la valeur du valet



Pour savoir quelle carte à cacher il faut choisir, on établi ceci :

- Il faut cacher soit la plus grande soit la plus petite
- Car en cachant une de ces cartes on est dans le plus petit intervalle possible entre c et la carte cachée. Tout en sachant que $a<b<c$.

<u>Comment être sur que ça marche à tous les coups ?</u>

En piochant 4 cartes il reste 9 dans le paquet. Et a, b et c sont les cartes visibles. ($a<b<c$)

Pour que le tour ne marche pas il faudrait que la carte cachée soit dans un intervalle supérieur à 6 par rapport à c . Dans ce cas il faudrait qu'il y ait un intervalle de 6 entre la 2^{e} plus haute carte que l'on **pioche** ainsi qu'un intervalle de 6 entre la plus haute que l'on **pioche** et la plus petite.

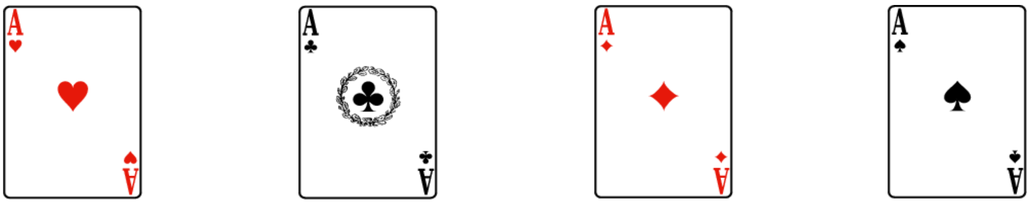
Soit il faudrait au minimum 12 cartes restantes dans le paquet or il n'en reste que 9.

CQFD !

- <u>Retour sur le problème de base</u>

On applique le même procédé sur tout le paquet :
- On attribue des valeurs de 1 à 52
- On se repère avec les as
- On suit le même procédé qu'avec 13 cartes

1 14 27 40



Voici le tableau des valeurs :

ordre	valeur
a b c d	1
a b d c	2
a c b d	3
a c d b	4
a d b c	5
a d c b	6

ordre	valeur
b a c d	7
b a d c	8
b c a d	9
b c d a	10
b d a c	11
b d c a	12

ordre	valeur
c a b d	13
c a d b	14
c b a d	15
c b d a	16
c d a b	17
c d b a	18

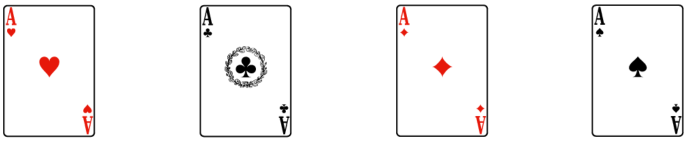
ordre	valeur
d a b c	19
d a c b	20
d b a c	21
d b c a	22
d c a b	23
d c b a	24

Un autre exemple :

Avec ces cartes, l'assistant décidera de cacher la dame et de placer les cartes dans l'ordre ci-dessous.

En utilisant le repère avec les as et le tableau on trouve la valeur à additionner à la plus haute carte visible.

1 14 27 40



ordre	valeur
a b c d	1
a b d c	2
a c b d	3
a c d b	4
a d b c	5
a d c b	6

a d c b 45+6=51

On obtient 51 qui avec nos valeurs est bien la valeur de la dame de pique.

<u>5) question supplémentaire</u> :

Si on pioche n cartes de combien de cartes maximum le paquet peut-il être composé?

On a fini par trouvé cette formule : $(n-1)+2(n-1)!$

- <u>Explication de la formule</u> :

Qu'est-ce que le « ! » ?

→ C'est le symbole de la factorielle

Qu'est-ce que la factorielle ?

→ C'est que $\forall n \in \mathbb{N}$: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

→ Par exemple:

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

- <u>Retour sur la formule</u> :

  Avec $(n-1)+2(n-1)!$

  Si on pioche 5 cartes, on a $n=5$

  - ➔ $(5-1)+2(5-1)! = 4+2 \times 4! = 4+2 \times 24= 52$ ➔c'est bien le nombre de cartes qui composent notre paquet

- Cette formule marche-t-elle à tous les coups ?

  Pour n cartes piochées il y a n-1 cartes visibles

  On peut additionner autant de valeur à la carte visible la plus haute qu'il y a de permutation de n-1 soit $(n-1)!$

  Pour qu'on ne puisse pas faire deviner la plus haute carte il faudrait qu'il y ait un écart d'au moins $(n-1)!$ entre la deuxième plus haute carte piochée et la plus haute carte.

  Pour qu'on ne puisse pas faire deviner la plus petite carte, il faudrait qu'il y ait un écart d'au moins $(n-1)!$ entre la plus haute carte et la plus petite.

  Il faudrait donc qu'il reste $2 \times (n-1)!$ cartes dans le paquet

  En comptant les cartes piochées et les cartes restantes, le paquet serait composé de $n+2(n-1)!$ au minimum, pour qu'il y ait la possibilité que le tour échoue

  Pour que le tour marche à tous les coups il suffit donc de retirer 1 une carte à ce paquet.

  On obtient donc la formule $(n-1)+2(n-1)!$ qui est bien notre formule.

CQFD!!!