

Étude monodimensionnelle d'un choc élastique

J. Arias Luna et G. Gielen

October 2, 2023

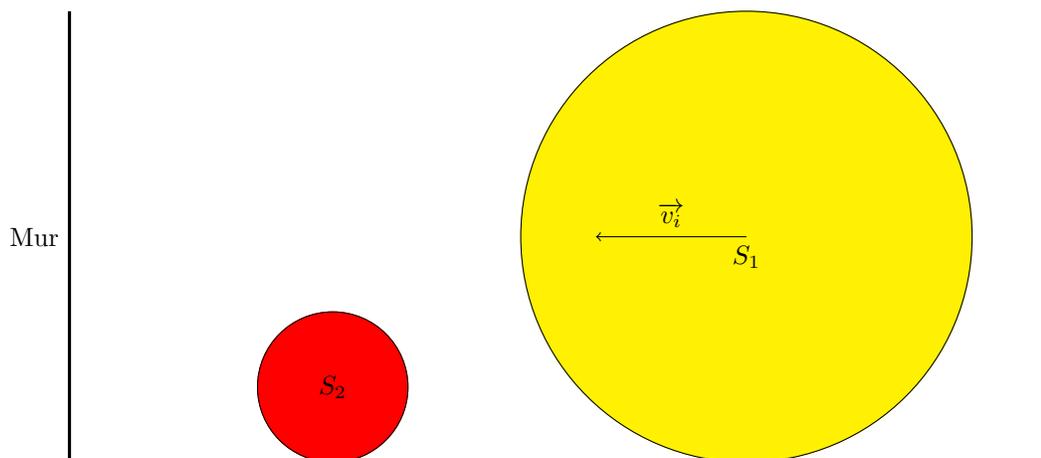
1 Présentation du sujet

Nous considérons dans ce travail les vitesses de deux objets se déplaçant

- dans un espace à une dimension,
- sans frottement,
- qui, lorsqu'elles entrent en collision, respectent les principes des chocs élastiques.

Soient deux sphères S_1 et S_2 de masses respectives m_1 et m_2 avec $m_1 > m_2$. La sphère S_2 est initialement immobile et située entre un mur et S_1 qui, elle, se dirige vers S_2 avec une vitesse initiale v_i . Plaçons un axe de manière à ce qu'il soit orienté vers le mur. La position de l'origine n'affectera pas l'étude. En effet, nous ne manipulerons que les vecteurs de vitesse (à une composante), et ces manipulations sont valables quelles que soient les positions initiales des deux sphères.

Problématique : Combien y aura-t-il de chocs entre les sphères en fonction de la répartition de leur masse ?



2 Quelques rappels de physique

2.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique E_c d'un corps en physique est la quantité d'énergie que possède ce corps en raison de sa masse m et de sa vitesse v telle que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

2.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement \vec{p} d'un corps est le produit de sa masse m par sa vitesse v . On a :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2.3 Choc élastique

Dans un choc élastique, il y a conservation de la quantité de mouvement p et d'énergie cinétique E_c du système à tout instant.

À une dimension, si deux objets de masses respectives m_1 et m_2 entrent en collision avec des vitesses respectives v_1 et v_2 , alors ils repartent avec des vitesses v'_1 et v'_2 . Nous avons le système suivant.

$$\begin{cases} p_i = p_f \\ E_{ci} = E_{cf} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2} \end{cases}$$

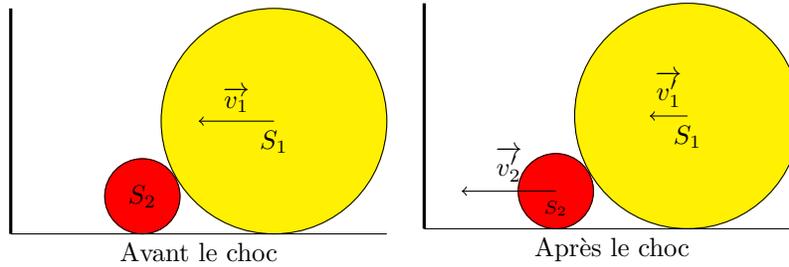
2.4 Calcul des vitesses résultantes

Puisque le déplacement des solides se fait sans aucun frottement avec le sol et que les solides respectent le principe du choc élastique, les vitesses v'_1 et v'_2 des solides après le choc sont trouvées en résolvant le système:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \end{cases}$$

Les solutions $v'_1 = v_1$ et $v'_2 = v_2$, bien qu'étant mathématiquement valables, ne sont d'aucun intérêt ici. En effet, si nous prenions en compte ces solutions,

cela impliquerait que les sphères ont continué leur trajectoire sans changement de sens ou de vitesse. C'est bien sûr absurde.



2.5 Rapport des masses

Posons $k = \frac{m_1}{m_2}$. Cela veut dire que k est le rapport des masses. Bien sûr, comme $m_1 > m_2$, on a $k > 1$. Après introduction de k , les solutions deviennent :

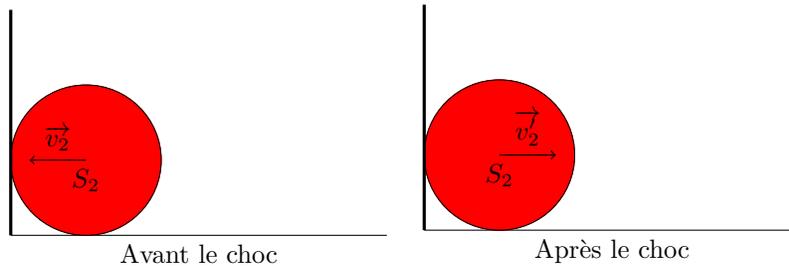
$$\begin{cases} v'_1 = \frac{k \cdot m_2 - m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_2 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{k \cdot m_2 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - k \cdot m_2}{k \cdot m_2 + m_2} v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v'_1 = \frac{k-1}{k+1} v_1 + \frac{2}{k+1} v_2 \\ v'_2 = \frac{2k}{k+1} v_1 - \frac{k-1}{k+1} v_2 \end{cases} \quad (1)$$

2.6 Choc élastique de S_2 avec le mur

Etudions uniquement le choc résultant de la collision entre S_2 et le mur et considérons que celui-ci est élastique. .

Puisque le mur est fixe (sa vitesse est toujours nulle), S_2 conserve son énergie cinétique et sa quantité de mouvement avant et après le choc de celui-ci avec le mur. Par conséquent, S_2 repartira toujours avec une vitesse opposée avec laquelle il frappe le mur.



3 Généralisation

Afin de faciliter l'étude, nous généraliserons quelques notions. Il convient en outre de signaler que nous considérerons toujours les vitesses - et leurs combinaisons linéaires - aux différentes phases comme des fonction dont k est la variable.

De plus, notons, aussi surprenant que cela puisse paraître, que la vitesse initiale de S_1 n'influence pas le nombre de collisions qu'il y aura. En effet, v_i est un scalaire strictement positif qui, comme nous le verrons, multiplie aussi bien $v_1(P_n)$ que $v_2(P_n)$.

3.1 Formule générale d'itération

Quel que soit le sens du choc, le système qui donne les vitesses résultantes est la même, et est la suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} v_1(P_n) = \frac{k-1}{k+1}v_1(P_{n-1}) - \frac{2}{k+1}v_2(P_{n-1}) \\ v_2(P_n) = \frac{2k}{k+1}v_1(P_{n-1}) + \frac{k-1}{k+1}v_2(P_{n-1}) \end{cases}$$

La généralité de cette relation de récurrence est démontrée en considérant toutes les directions de collision possibles, pour autant qu'elles aient un sens dans notre cadre de référence.

3.2 Terme général

Démontrons par récurrence la formule suivante, sur base de la formule générale d'itération.

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ v_2(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \end{cases}$$

Le cas de base est $n = 0$. C'est trivial :

pour $v_1(P_0)$:

$$\frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^{0+1} C_2^{2p} (-1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} (k-1)$$

et pour $v_2(P_0)$,

$$\frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^0 C_2^{2p+1} (-1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} \cdot 2k.$$

Supposons que les égalités soient vraies pour $n = N$, et démontrons-les pour $n = N + 1$. Auparavant, il convient de noter l'identité suivante.

Par deux applications consécutives de la formule du triangle de Pascal¹, on a

$$\begin{aligned} \forall n, p \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq p \leq n+1 : C_{2n+2}^{2p} + 2 \cdot C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} &= C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1} \\ &= C_{2n+4}^{2p}. \end{aligned}$$

Considérons d'abord $v_1(P_n)$.

$$\begin{aligned} v_1(P_{N+1}) &= \frac{k-1}{k+1} v_1(P_N) - \frac{2}{k+1} v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)} \\ &= \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \\ &\text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left((k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right) \end{aligned}$$

(séparation des premiers et derniers termes de la première et dernière somme respectivement)

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p-2} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

¹Pour tous les naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$, la formule du triangle de Pascal est l'égalité $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$, où $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

(renumération des deux dernières sommes)

$$\begin{aligned}
&= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} \left[C_{2N+2}^{2p} + 2C_{2N+2}^{2p-1} + C_{2N+2}^{2p-2} \right] (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right) \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right) \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \sum_{p=0}^{N+2} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \quad , \text{ comme attendu.}
\end{aligned}$$

Considérons ensuite $v_2(P_n)$.

$$\begin{aligned}
v_2(P_{N+1}) &= \frac{2k}{k+1} v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_N) \quad (\text{par hypothèse}) \\
&= \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}
\end{aligned}$$

(par hypothèse de récurrence)

$$\begin{aligned}
&= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right) \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right) \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+2}^1 k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + 2k^{N+2} + \sum_{p=1}^N 2C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + 2(-1)^{N+1} k \right) \\
&+ \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^{N-1} C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} \cdot k \right)
\end{aligned}$$

(séparation du premier terme de la première somme, des premier et dernier termes de la deuxième somme, et du dernier terme de la dernière somme)

Grâce à l'égalité du triangle de Pascal, on peut démontrer que

$$C_{2N+2}^1 \cdot k^{N+2} + 2k^{N+2} = C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2}$$

et

$$(-1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} \cdot k + (-1)^{N+1} \cdot 2k = (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k$$

Dès lors, en utilisant ces égalités et en renumérotant l'indice de la dernière somme, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^N 2C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + 2(-1)^{N+1} k \right) \\
& + \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \right) \\
& = \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N \left[C_{2N+2}^{2p+1} + 2C_{2N+2}^{2p} + C_{2N+2}^{2p-1} \right] (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \right) \\
& = \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+4}^1 \cdot k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+4}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} \cdot k \right) \\
& = \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+4}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p}, \text{ ce qui complète la récurrence.}
\end{aligned}$$

■

3.3 Formules fermées

On a démontré que, pour tout n naturel, la formule suivant tient.

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ v_2(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \end{cases}$$

3.3.1 Formules fermées pour $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$, et leurs zéros

En utilisant les nombres complexes, joignons les deux sommes, de sorte que $v_1(P_n)$ soit la partie réelle, et $v_2(P_n)/\sqrt{k}$ la partie imaginaire.

On a, grâce à cet artifice de calcul,

$$\begin{aligned}
v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}} &= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} + i \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1/2-p} \right) \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} i^{2p} k^{2n+2-2p} + \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} i^{2p+1} \sqrt{k}^{2n+2-(2p+1)} \right) \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{2n+2} C_{2n+2}^p i^p k^{2n+2-p} \\
&= \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} (\sqrt{k} + i)^{2n+2}
\end{aligned}$$

Le module du nombre complexe $\sqrt{k} + i$, où $k > 1$, vaut $\sqrt{k+1}$ et son argument $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \operatorname{arccot}(\sqrt{k})$.

Dès lors $(\sqrt{k} + i)^{2n+2} = (k + 1)^{n+1} \exp((2n + 2)i \operatorname{arccot}(\sqrt{k}))$. Il vient, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{cases} v_1(P_n) = v_i \cos((2n + 2) \operatorname{arccot}(\sqrt{k})) \\ v_2(P_n) = v_i \sqrt{k} \sin((2n + 2) \operatorname{arccot}(\sqrt{k})) \end{cases}$$

pour tout n naturel.

Recherchons les zéros de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$. Notons que la fonction $\cot : x \mapsto \cot(x)$ est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $]0, \pi[$: c'est une bijection de $]0, \pi[$ dans \mathbb{R} .

Sa fonction réciproque $\operatorname{arccot}(\cdot)$ est donc bien définie sur \mathbb{R} , et on a, d'un côté

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cot(\operatorname{arccot}(x)) = x,$$

et de l'autre

$$\forall x \in]0, \pi[: \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x.$$

Pour $v_1(P_n)$, on a

$$\begin{aligned} v_1(P_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos((2n + 2) \operatorname{arccot}(\sqrt{k})) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2n + 2) \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) &= \frac{2\ell + 1}{2} \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) &= \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi \end{aligned}$$

Comme contrainte, nous avons, de par l'ensemble des valeurs de $\operatorname{arccot}(x)$,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi < \pi \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &< \ell < \frac{4n + 3}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \ell \leq 2n + 1 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) &= \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi \\ \Leftrightarrow \sqrt{k} &= \cot\left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi\right), \text{ avec } \cot\left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \ell \leq \frac{2n + 1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \ell \leq n \\ \Leftrightarrow k &= \cot^2\left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \cdot \pi\right), \text{ où } \ell \in [0, n] \cap \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pour $v_2(P_n)$, on a

$$\begin{aligned}
v_2(P_n) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{k} \sin((2n+2) \operatorname{arccot}(\sqrt{k})) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2n+2) \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) = \ell \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) = \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}.
\end{aligned}$$

Comme contrainte, nous avons, de par l'ensemble des valeurs de $\operatorname{arccot}(x)$,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2} < \pi \\
&\Leftrightarrow 0 < \ell < 2n+2 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq 2n+1.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) = \frac{\ell \cdot \pi}{2n+2} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{k} = \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\right), \text{ avec } \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \ell \leq \frac{2n+2}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq n+1 \\
&\Leftrightarrow k = \cot^2\left(\frac{2\ell+1}{4n+4} \cdot \pi\right), \text{ où } \ell \in [1, n+1] \cap \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

3.3.2 Formules fermées pour $v_1(P_n) + v_2(P_n)$, $v_2(P_n) - v_1(P_n)$ et leurs zéros

Grâce à un artifice de calcul :

$$\begin{aligned}
&\frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} (\sqrt{k} + i)^{2n+2} \cdot (\sqrt{k} + i) \\
&= \left(v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}} \right) \cdot (\sqrt{k} + i) \\
&= \sqrt{k} \cdot v_1(P_n) - \frac{v_2(P_n)}{\sqrt{k}} + i(v_1(P_n) + v_2(P_n))
\end{aligned}$$

on remarque que

$$\begin{aligned}
v_1(P_n) + v_2(P_n) &= \Im\left(\frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} (\sqrt{k} + i)^{2n+3}\right) \\
&= v_i \sqrt{k+1} \sin\left((2n+3) \operatorname{arccot}(\sqrt{k})\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
v_1(P_n) + v_2(P_n) &= 0 \\
\Leftrightarrow \sqrt{k+1} \sin((2n+3) \operatorname{arccot}(\sqrt{k})) &= 0 \\
\Leftrightarrow (2n+3) \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) &= \ell \cdot \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \operatorname{arccot}(\sqrt{k}) &= \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Comme contrainte, nous avons, de par l'ensemble des valeurs de $\operatorname{arccot}(x)$,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3} < \pi \\
\Leftrightarrow 0 &< \ell < 2n+3 \\
\Leftrightarrow 1 &\leq \ell \leq 2n+2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot}(\sqrt{k}) &= \frac{\ell \cdot \pi}{2n+3} \\
\Leftrightarrow \sqrt{k} &= \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\right), \text{ avec } \cot\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \ell \leq \frac{2n+3}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq n+1 \\
\Leftrightarrow k &= \cot^2\left(\frac{2\ell+1}{4n+4} \cdot \pi\right), \text{ où } \ell \in [1, n+1] \cap \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Enfin, grâce à la formule générale d'itération, il est immédiat de vérifier que $v_2(P_{n+1}) - v_1(P_{n+1}) = v_1(P_n) + v_2(P_n)$, pour tout n naturel.

4 Résolution

Grâce aux généralisations obtenues, entamons l'étude des phases pour pouvoir résoudre le problème. Ajoutons que la fonction $\cot^2 : x \rightarrow \cot^2(x)$ est strictement décroissante, continue et positive sur $]0, \pi/2]$ (c'est une bijection de $]0, \pi/2]$ dans les réels positifs); comme valeurs particulières, $\cot^2(\pi/2) = 0$ et $\cot^2(\pi/4) = 1$. Par conséquent, comme on limite l'étude au cas où $k > 1$, on ne considère que les arguments dans l'intervalle $]0, \pi/4[$.

Pour faciliter l'étude des phases en fonction des valeurs-pivot que nous avons calculées, soient :

- c_n la plus grande valeur annulant $v_1(P_n)$, c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right),$$

- r_n la plus grande valeur annulant $v_2(P_n)$, c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right),$$

- s_n la plus grande valeur annulant $v_1(P_n) + v_2(P_n)$, c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2n+3}\right).$$

4.1 Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré $n+1$ en k ;
- le dénominateur est $(k+1)^{n+1}$, strictement positif si $k > 1$;
- $n+1$ zéros différents du pôle ont été trouvés.

Dès lors, en vertu du théorème fondamental de l'algèbre, nous pouvons écrire pour tout n naturel :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \cdot \prod_{\ell=0}^n \left(k - \cot^2\left(\frac{2 \cdot \ell + 1}{4n+4} \cdot \pi\right) \right) \\ v_2(P_n) = \frac{(2n+2)v_i}{(k+1)^{n+1}} \cdot \prod_{\ell=1}^{n+1} \left(k - \cot^2\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+2}\right) \right) \\ v_1(P_n) + v_2(P_n) = \frac{(2n+3)v_i}{(k+1)^{n+1}} \cdot \prod_{\ell=1}^{n+1} \left(k - \cot^2\left(\frac{\ell \cdot \pi}{2n+3}\right) \right) \end{array} \right.$$

4.2 Etude de phases

Comme on a vu au point 1.2, pour la phase P_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{array} \right.$$

Lors de cette phase, les deux sphères se dirigent donc vers le mur : il y a un choc après le rebond de S_2 contre le mur.

Pour la phase P_1 :

Les formules pour cette phase sont les suivantes.

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} \cdot \left(k - \cot^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \left(k - \cot^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \\ v_2(P_1) = \frac{4v_i}{(k+1)^2} \cdot \left(k - \cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(k - \cot^2\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right) \\ v_1(P_1) + v_2(P_1) = \frac{5v_i}{(k+1)^2} \cdot \left(k - \cot^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \left(k - \cot^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) \end{cases}$$

Aussi, $\cot^2(\pi/8)$ est le plus grand zéro de $v_1(P_1)$.

L'étude du signe de chacune des expressions donne le tableau suivant.

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/	-	-	-	-	0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/	-	-	0	+	+	+

Notons que les autres zéros sont inférieurs à 1.

Nous pouvons en tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \in]r_1, s_1[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_1$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_1, c_1[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = c_1$, alors S_1 s'immobilise ;
- si $k > c_1$, alors S_1 continue sa trajectoire vers le mur.

Dans les trois derniers cas, il y a encore un choc.

Dans le cas où $k = \cot^2(\pi/8)$, on peut déjà prédire qu'à la phase P_3 , $v_1(P_3) = -v_i$ et $v_2(P_3) = 0$. C'est-à-dire qu'à la phase P_3 , S_1 repartira en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale, et S_2 s'immobilisera (ce qui est corroboré par le théorème de conservation de l'énergie cinétique). En effet, $v_2(P_3) = v_i \cot(\pi/8) \sin(8 \operatorname{arccot}(\cot(\pi/8))) = 0$, et $v_1(P_3) = v_i \cos(8 \operatorname{arccot}(\cot(\pi/8))) = -v_i$.

Pour la phase P_2 :

Étudions uniquement l'intervalle $]s_1, c_1[$. Pour la phase P_2 , on a :

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} \cdot \prod_{\ell=0}^2 \left(k - \cot^2 \left(\frac{2 \cdot \ell + 1}{12} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_2) = \frac{6v_i}{(k+1)^3} \cdot \prod_{\ell=1}^3 \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{6} \right) \right) \\ v_1(P_2) + v_2(P_2) = \frac{7v_i}{(k+1)^3} \cdot \prod_{\ell=1}^3 \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{7} \right) \right) \end{cases}$$

L'étude du signe de chacune des expressions donne le tableau suivant.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_2)$	/	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/	-	-	-	-	0	+	+	/

Dans ce cas, $c_2 = \cot^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)$, $s_2 = \cot^2 \left(\frac{\pi}{7} \right)$ et $r_2 = \cot^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)$.

Nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_2$, alors S_2 s'immobilise et S_1 repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si $k \in]r_2, s_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_2$, alors S_1 et S_2 repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_2, c_1[$, alors S_1 repart en direction opposée au mur plus lentement que S_2 .

Dans le dernier cas, il y a encore un choc.

Pour la phase P_3 :

Etudions uniquement l'intervalle $]s_2, c_1[$. Pour la phase P_3 , on a :

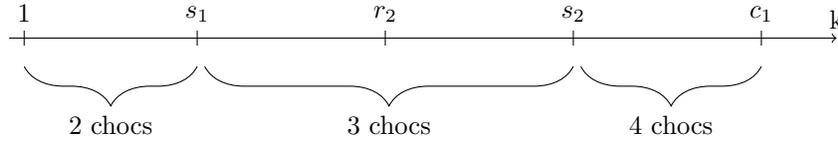
$$\begin{cases} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} \cdot \prod_{\ell=0}^3 \left(k - \cot^2 \left(\frac{2 \cdot \ell + 1}{16} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_3) = \frac{8v_i}{(k+1)^4} \cdot \prod_{\ell=1}^4 \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{8} \right) \right) \\ v_1(P_3) + v_2(P_3) = \frac{9v_i}{(k+1)^4} \cdot \prod_{\ell=1}^4 \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{9} \right) \right) \end{cases}$$

Remarquons que dans l'intervalle $]s_2, c_1[$, il n'y a plus de valeurs-pivot propres à la phase P_3 .

En effet, on a :

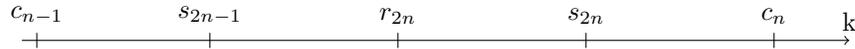
k	s_2	c_1	r_3
$v_1(P_3)$	-	-	-
$v_2(P_3)$	-	-	0
$v_1(P_3) + v_2(P_3)$	-	-	-

On conclut que si $k \in]s_2, c_1[$, alors il y a un dernier choc entre S_1 et S_2 . L'étude de l'intervalle $]1, c_1[$ est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



4.3 Généralisation par induction

Démontrons par récurrence que tout intervalle $]c_{n-1}, c_n]$, où n est un naturel non nul, se décompose somme suit.



Ces valeurs-pivot sont associées aux phases P_{2n-2} , P_{2n-1} , P_{2n} et P_{2n+1} . Le cas de base vient d'être considéré.

En supposant l'assertion vraie pour $n = N$, démontrons-la pour $n = N + 1$. Cela veut dire que l'on étudiera l'intervalle $]c_N, c_{N+1}]$.

Pour P_{2N+1} :

Pour la phase P_{2N+1} , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+1}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+2}} \cdot \prod_{\ell=0}^{2N+1} \left(k - \cot^2 \left(\frac{2 \cdot \ell + 1}{8N+8} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+1}) = \frac{(4N+4)v_i}{(k+1)^{2N+2}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+2} \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{4N+4} \right) \right) \\ v_1(P_{2N+1}) + v_2(P_{2N+1}) = \frac{(4N+5)v_i}{(k+1)^{2N+2}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+2} \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{4N+5} \right) \right) \end{array} \right.$$

Notons que $c_N = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4N+4} \right) = \cot^2 \left(\frac{\pi}{2(2N+1)+2} \right) = r_{2N+1}$

Comme tableau des signes, on a :

k		$r_{2N+1} = c_N$	s_{2N+1}	c_{N+1}		
$v_1(P_{2N+1})$	/	/	-	-	-	/
$v_2(P_{2N+1})$	/	/	+	+	+	/
$v_1(P_{2N+1}) + v_2(P_{2N+1})$	/	/	-	0	+	/

d'où l'on tire :

- Si $k \in]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+1}$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_{2N+1}, c_{N+1}[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur.

Dans le dernier cas, il y a encore un choc.

Tout autre zéro de $v_1(P_{2N+1})$, $v_2(P_{2N+1})$ ou de leur somme est inférieur à c_N . Or, par hypothèse de récurrence, cette valeur a déjà été étudiée. C'est pour cela que, dans le tableau des signes, seuls les zéros strictement supérieurs à c_N sont pris en compte.

Pour P_{2N+2} :

Pour la phase P_{2N+2} , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+2}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+3}} \cdot \prod_{\ell=0}^{2N+2} \left(k - \cot^2 \left(\frac{2 \cdot \ell + 1}{8N+12} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+2}) = \frac{(4N+6)v_i}{(k+1)^{2N+3}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+3} \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{4N+6} \right) \right) \\ v_1(P_{2N+2}) + v_2(P_{2N+2}) = \frac{(4N+7)v_i}{(k+1)^{2N+3}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+3} \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{4N+7} \right) \right) \end{array} \right.$$

Le tableau des signes donne :

k	s_{2N+1}		r_{2N+2}		s_{2N+2}		c_{N+1}	
$v_1(P_{2N+2})$	-	-	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_{2N+2})$	-	-	0	+	+	+	+	/
$v_1(P_{2N+2}) + v_2(P_{2N+2})$	-	-	-	-	0	+	+	/

et on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_{2N+2}$, alors S_2 s'immobilise ;
- si $k \in]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+2}$, alors S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_{2N+2}, c_{N+1}[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 .

Dans le dernier cas, il y a un nouveau choc.

Pour P_{2N+3} :

Pour la phase P_{2N+3} , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+3}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+4}} \cdot \prod_{\ell=0}^{2N+3} \left(k - \cot^2 \left(\frac{2 \cdot \ell + 1}{8N+16} \cdot \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+3}) = \frac{(4N+8)v_i}{(k+1)^{2N+4}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+4} \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{4N+8} \right) \right) \\ v_1(P_{2N+3}) + v_2(P_{2N+3}) = \frac{(4N+9)v_i}{(k+1)^{2N+4}} \cdot \prod_{\ell=1}^{2N+4} \left(k - \cot^2 \left(\frac{\ell \cdot \pi}{4N+9} \right) \right) \end{array} \right.$$

Remarquons que dans l'intervalle $]s_{2N+2}, c_{N+1}[$, il n'y a plus de valeurs-pivot propres à la phase P_{2N+3} .

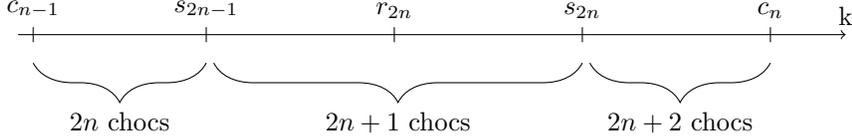
En effet, on a :

k		s_{2N+2}		c_{N+1}		r_{2N+3}	
$v_1(P_{2N+3})$	/	-	-	-	-	-	/
$v_2(P_{2N+3})$	/	-	-	-	-	0	/
$v_1(P_{2N+3}) + v_2(P_{2N+3})$	/	-	-	-	-	-	/

Ceci conclut la récurrence. ■

4.4 Conclusion

On peut généraliser chaque intervalle $]c_{n-1}, c_n]$ auquel k peut appartenir de la manière suivante :



où si $k \in]c_{n-1}, s_{2n-1}[$, il y aura $2n$ collisions entre les sphères ; si $k \in]s_{2n-1}, s_{2n}[$, il y aura $2n + 1$ collisions et si $k \in]s_{2n}, c_n]$, il y aura $2n + 2$ collisions.

Le tableau suivant recense l'issue des collisions, *i.e.* le nombre de chocs entre les sphères et les données concernant la direction et le module des vecteurs-vitesse, en fonction des valeurs de k .

k	v_1	v_2
c_{n-1}	$v_1(P_{2n-1}) = -v_i$	$v_2(P_{2n-1}) = 0$
$c_{n-1} < k < s_{2n-1}$	$ v_1(P_{2n-1}) > v_2(P_{2n-1}) $	$v_2(P_{2n-1}) > 0$
s_{2n-1}	$ v_1(P_{2n-1}) = v_2(P_{2n-1}) $	$v_2(P_{2n-1}) > 0$
$s_{2n-1} < k < r_{2n}$	$ v_1(P_{2n}) > v_2(P_{2n}) $	$v_2(P_{2n}) < 0$
r_{2n}	$v_1(P_{2n}) = -v_i$	$v_2(P_{2n}) = 0$
$r_{2n} < k < s_{2n}$	$ v_1(P_{2n}) > v_2(P_{2n}) $	$v_2(P_{2n}) > 0$
s_{2n}	$ v_1(P_{2n}) = v_2(P_{2n}) $	$v_2(P_{2n}) > 0$
$s_{2n} < k < c_n$	$ v_1(P_{2n+1}) > v_2(P_{2n+1}) $	$v_2(P_{2n+1}) < 0$
c_n	$v_1(P_{2n+1}) = -v_i$	$v_2(P_{2n+1}) = 0$

4.5 Apparition de π dans le nombre de chocs

D'après les simulations numériques, il semblerait que si $k = 100^p$, où p est un naturel, les décimales de π apparaissent progressivement lorsque le nombre de

chocs entre les sphères et le nombre de chocs de S_2 avec le mur sont comptabilisés.

Tout d'abord, remarquons que l'intervalle $]c_{n-1}, c_n]$ est associé aux phases P_{2n-1} à P_{2n+1} . Cela signifie que, si k appartient à cet intervalle, il y aura entre $2n$ et $2n + 2$ chocs entre les sphères. Si l'on compte les chocs contre le mur, il faut multiplier le résultat par deux car, à chaque phase, il y a choc contre le mur (sauf éventuellement lors de la dernière phase, où il est possible que S_2 continue à s'éloigner du mur). Dès lors, dans cet intervalle, il y aura entre $4n$ et $4n + 4$ chocs totaux.

Donc, si $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{N}_0 : k \mapsto f(k)$ désigne la fonction qui, pour tout rapport de masse strictement supérieur à 1, donne le nombre de chocs, alors, pour tout naturel n non nul,

$$\begin{aligned} 4n &\leq f\left(\cot^2\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right) \leq 4n + 4 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{f\left(\cot^2\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)}{4n} \leq 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\cot^2\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right)}{4n} = 1,$$

ou encore, en posant $x = 4n$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\cot^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)}{x} = 1.$$

En particulier, on peut écrire

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\cot^2\left(\frac{\pi}{\lfloor \pi \cdot 10^p \rfloor}\right)\right)}{\lfloor \pi \cdot 10^p \rfloor} = 1.$$

Or, la suite $x_p = 10^{-p} \cdot \lfloor \pi \cdot 10^p \rfloor$, $\forall p \in \mathbb{N}_0$ converge vers π (il s'agit de la suite dont le p^e élément contient les p premières décimales de π).

Dès lors, si $p \rightarrow +\infty$, alors $\frac{\pi \cdot 10^p}{\lfloor \pi \cdot 10^p \rfloor} = 1$. Donc $\cot^2\left(\frac{\pi}{\lfloor \pi \cdot 10^p \rfloor}\right) \sim \cot^2(10^{-p})$. D'autre part, on a $\cot^2(10^{-p}) \sim 100^p$.

Il vient $f(100^p) \sim \lfloor \pi \cdot 10^p \rfloor$, ce qui corrobore les observations.

Remerciements

Cette recherche a été réalisée dans le cadre du projet MATH.en.JEANS, organisé par l'Université de Liège (ULiège), par des élèves de 6^e secondaire de l'Athénée Royal Charles Rogier (A.R. Liège-1).

Nous souhaitons remercier M. Julien LEROY, chercheur et professeur à l'ULiège, pour nous avoir aidés et guidés dans notre recherche.

Nous remercions aussi chaleureusement M. Yvan HAINE, notre professeur de mathématiques, pour son aide et sa précieuse contribution dans la création de cet article grâce à LaTeX. Nous le remercions également pour son aide et sa disponibilité, tout au long de l'année, dans ses nombreuses vérifications des démonstrations ; et pour toutes ses suggestions.

Nous remercions enfin l'ensemble des professeurs de Mathématiques de l'A.R. Liège-1 qui nous ont aidés cette année, Mmes MOITROUX, GERMAIN, SUTERA et HALLEUX.

Contents

1	Présentation du sujet	1
2	Quelques rappels de physique	2
2.1	Energie cinétique	2
2.2	Quantité de mouvement	2
2.3	Choc élastique	2
2.4	Calcul des vitesses résultantes	2
2.5	Rapport des masses	3
2.6	Choc élastique de S_2 avec le mur	3
3	Généralisation	4
3.1	Formule générale d'itération	4
3.2	Terme général	4
3.3	Formules fermées	7
3.3.1	Formules fermées pour $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$, et leurs zéros	7
3.3.2	Formules fermées pour $v_1(P_n) + v_2(P_n)$, $v_2(P_n) - v_1(P_n)$ et leurs zéros	9
4	Résolution	10
4.1	Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme	11
4.2	Etude de phases	11
4.3	Généralisation par induction	14
4.4	Conclusion	17
4.5	Apparition de π dans le nombre de chocs	17