

Premières neiges

Armadi Mohamed - Destrée Naël - Hauzeur Marion

4 juin 2025



FIGURE 1 – L'équipe de recherche

Élèves et professeurs de mathématiques de 5e et 6e secondaire au
Collège Saint-André Auvélais du site des Auges.

Avec l'aide de leurs enseignantes Madame Wartique et Madame
Mallia

Et des chercheurs accompagnateurs
François-Grégoire Bierwart et Marie Dorchain
de l'Université de Namur

De gauche à droite : Naël Destrée, Mohamed Armadi, Madame Mallia, Marion Hauzeur,
Madame Wartique, Marie Dorchain, François-Grégoire Bierwart...
(les trois dernières personnes ne faisant pas partie de notre groupe)

Merci à Mme Wartique et Mme Mallia et aux assistants de
l'Unamur pour leur aide dans ce projet MEJ (Math En Jeans)

Table des matières

1 Mise en contexte du travail de recherche

Élèves d'une classe mixte de 5e et 6e secondaires, il nous a été proposé de choisir un problème parmi six sujets proposés par les chercheurs de l'Université de Namur. Ces sujets, variés, couvraient des domaines allant de l'arithmétique aux suites, en passant par la géométrie et les palindromes. Après mûre réflexion, notre choix s'est porté sur "Premières neiges". Ce problème nous a particulièrement séduits car il associait deux domaines fascinants : les suites (que Marion avait déjà étudiées en rhéto) et la géométrie (qui passionnait l'ensemble du groupe).



FIGURE 2 – Séance de travail en équipe

Notre mission était claire : résoudre ce problème avant le 14 avril 2025 en documentant minutieusement nos découvertes, essais, erreurs et réussites. Nous devions présenter nos résultats à nos professeurs et aux chercheurs de l'Université de Namur. Le projet a débuté en novembre avec Marion et Naël, puis Mohamed nous a rejoints en janvier, formant ainsi notre équipe définitive.

La force de notre groupe résidait dans la complémentarité de nos compétences. Marion, avec ses connaissances en suites, nous a guidés dans les aspects théoriques. Naël et Mohamed, avec leur regard neuf, ont apporté des idées originales et des approches innovantes. Nous avons rapidement établi une dynamique de travail basée sur l'entraide et la répartition des tâches.

En janvier, nous avons eu l'opportunité de présenter nos avancées lors d'une rencontre à l'Université de Namur. Cette expérience enrichissante nous a permis d'échanger avec d'autres élèves et professeurs. Bien que nous n'ayons pu participer au congrès de Nancy comme initialement prévu, cela ne nous a pas empêchés de poursuivre nos recherches avec détermination.

Au fil des semaines, nos séances de travail se sont succédé, alternant moments de frustration face aux blocages et instants de jubilation lors des découvertes. Ces mois de recherche intense se sont achevés le 14 avril par la remise de notre travail final, fruit de nos efforts collectifs.

2 Présentation du projet

Voici l'énoncé qui a initié notre aventure mathématique :

"On vous propose la construction itérative d'une figure. À la première itération, considérez un triangle équilatéral. À l'itération suivante, divisez chaque côté en 3 parties égales. Sur la partie centrale de chaque

côté, construisez un triangle équilatéral. Retirez la base de ces nouveaux triangles. À la troisième itération, divisez en 3 parties égales les côtés des triangles construits à l'itération précédente. Les itérations suivantes suivent le même principe."

Pour aborder ce problème de manière structurée, nous l'avons décomposé en quatre étapes clés :

1. **Étape 1 :** Représenter visuellement les trois premières itérations et calculer leur périmètre (en partant d'un triangle de côté unitaire).
2. **Étape 2 :** Établir une formule générale pour le périmètre à la n-ième itération.
3. **Étape 3 :** Calculer l'aire de la figure aux différentes itérations (en partant d'une aire initiale unitaire).
4. **Étape 4 :** Déterminer une formule générale pour l'aire à la n-ième itération.

Cette progression méthodique nous a permis d'avancer systématiquement dans la résolution du problème, chaque étape constituant un fondement pour la suivante.

3 Hypothèses et réflexions initiales

Dès le départ, une interrogation cruciale s'est imposée : lorsque l'énoncé précise que "le triangle initial (aire) vaut 1", cela signifie-t-il que les côtés valent également 1 ? Nous avons testé cette hypothèse à l'aide de la formule de l'aire d'un triangle équilatéral :

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Si l'aire vaut 1, alors :

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad c \approx 1.52$$

Pour confirmer ce résultat, nous avons employé une seconde méthode en traçant la hauteur du triangle et en appliquant le théorème de Pythagore. Dans un triangle équilatéral de côté c , la hauteur h est :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

L'aire s'exprime donc :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Ainsi, si $A = 1$, alors $c = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \approx 1.52$, confirmant que les côtés ne valent pas 1 lorsque l'aire est unitaire. Cette découverte précoce nous a évité des erreurs dans nos calculs ultérieurs.

Nous nous sommes également interrogés sur l'évolution du périmètre et de l'aire au fil des itérations. Convergeraient-ils vers une valeur limite ? Ou divergeraient-ils vers l'infini ? Ces questions ont orienté nos recherches tout au long du projet.

4 Démarche détaillée

Étape 1 : Construction et calculs initiaux

Nous avons débuté par tracer méticuleusement les trois premières itérations. Ces représentations visuelles se sont révélées indispensables pour appréhender l'évolution de la figure et dénombrer les côtés à chaque étape. Voici nos observations :

- **Itération 0** : Un triangle équilatéral simple. Avec des côtés de longueur unitaire, le périmètre est $3 \times 1 = 3$.
- **Itération 1** : Après division de chaque côté en trois segments égaux et ajout des triangles équilatéraux, nous avons dénombré 12 côtés. Chaque côté mesurant $\frac{1}{3}$, le périmètre devient $12 \times \frac{1}{3} = 4$.
- **Itération 2** : La figure gagne en complexité avec 48 côtés. Chaque côté mesure désormais $\frac{1}{9}$ (division supplémentaire par 3), d'où un périmètre de $48 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{3} \approx 5.333$.
- **Itération 3** : Nous avons comptabilisé 192 côtés de longueur $\frac{1}{27}$, conduisant à un périmètre de $192 \times \frac{1}{27} = \frac{64}{9} \approx 7.111$.

Ces résultats nous ont révélé une régularité frappante : à chaque itération, le nombre de côtés est multiplié par 4, tandis que la longueur de chaque côté est divisée par 3.

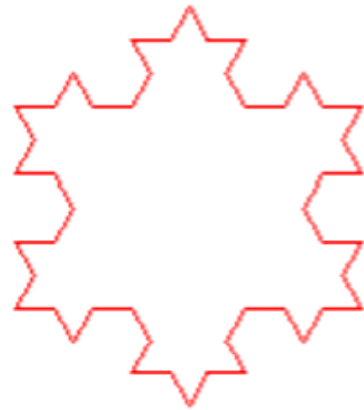


FIGURE 3 – Schémas de construction

Itération	Nombre de côtés	Longueur côté	Périmètre
0	3	1	3
1	12	$\frac{1}{3}$	4
2	48	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{3}$
3	192	$\frac{1}{27}$	$\frac{64}{9}$

Étape 2 : Formalisation du périmètre

L'analyse de nos résultats a mis en évidence une progression géométrique :

- Nombre de côtés : 3, 12, 48, 192, ... soit 3×4^n
- Longueur d'un côté : 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ... soit $\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Le périmètre à l'étape n s'exprime donc :

$$P_n = (\text{nombre de côtés}) \times (\text{longueur d'un côté}) = 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Cette formule élégante démontre que le périmètre croît exponentiellement avec le nombre d'itérations.

Etape = n	Périmètre
0	3*1=3
1	12*1/3=4
2	48*1/9= 16/3
3	192*1/27=64/9

FIGURE 4 – Évolution du périmètre

Étape 3 : Calcul des aires

Le calcul des aires s'est avéré plus complexe. Voici notre démarche :

- **Itération 0** : Par définition, aire $A_0 = 1$

- **Itération 1 :** Nous ajoutons 3 petits triangles. Chacun possède un côté de $\frac{1}{3}$, donc une aire de $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ de l'aire initiale (l'aire étant proportionnelle au carré des dimensions).

$$A_1 = 1 + 3 \times \frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

- **Itération 2 :** Nous ajoutons 12 triangles plus petits. Chacun a un côté de $\frac{1}{9}$, donc une aire de $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$.

$$A_2 = \frac{4}{3} + 12 \times \frac{1}{81} = \frac{4}{3} + \frac{4}{27} = \frac{36}{27} + \frac{4}{27} = \frac{40}{27}$$

- **Itération 3 :** Nous ajoutons 192 triangles minuscules avec côté $\frac{1}{27}$, soit une aire de $\frac{1}{729}$.

$$A_3 = \frac{40}{27} + 192 \times \frac{1}{729} = \frac{40}{27} + \frac{64}{243} = \frac{360}{243} + \frac{64}{243} = \frac{424}{243}$$

Nous avons identifié un motif : à chaque étape, nous ajoutons 4 fois plus de triangles qu'à l'itération précédente, mais chaque nouveau triangle a une aire 9 fois plus petite.

Étape 4 : Généralisation de l'aire

En systématisant nos observations, nous avons établi que :

- À l'étape k , nous ajoutons $3 \times 4^{k-1}$ nouveaux triangles
- Chaque nouveau triangle a une aire de $\frac{1}{9^k}$

L'aire totale à l'étape n s'écrit donc :

$$A_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(3 \times 4^{k-1} \times \frac{1}{9^k} \right)$$

En simplifiant l'expression dans la somme :

$$3 \times 4^{k-1} \times \frac{1}{9^k} = \frac{3}{4} \times \frac{4^k}{9^k} = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

D'où :

$$A_n = 1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

Simplification par les séries géométriques

Nous avons reconnu une série géométrique. Pour rappel, une série géométrique est une somme de termes où chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par une raison constante.

La formule générale pour la somme des premiers termes d'une série géométrique est :

$$\sum_{k=1}^n r^k = r \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Avec $r = \frac{4}{9}$, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{4}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

En substituant dans l'expression de l'aire :

$$A_n = 1 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Ce qui se simplifie en :

$$A_n = 1 + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Cette formule concise permet de calculer l'aire à n'importe quelle itération sans sommation explicite des termes intermédiaires !

Etape	Aire
0	1
1	$1 + (3 \cdot 1/9) = 4/3$
2	$4/3 + (12 \cdot 1/81) = 40/27$
(...)	(...)

FIGURE 5 – Évolution de l'aire

5 Résultats et prolongements

Une fois les formules générales établies, nous avons exploré leurs implications. Voici nos principales découvertes :

- Le périmètre tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$
- L'aire converge vers $\frac{8}{5} = 1.6$: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1.6$
- Le paradoxe fractal : une surface finie mais un périmètre infini !



FIGURE 6 – Présentation de nos résultats

Nous avons également calculé les valeurs pour les 10 premières itérations :

Itération	Périmètre	Aire
0	3.000	1.000
1	4.000	1.333
2	5.333	1.481
3	7.111	1.580
4	9.481	1.626
5	12.642	1.645
6	16.856	1.653
7	22.474	1.657
8	29.966	1.659
9	39.954	1.659
10	53.272	1.660

Notre fierté majeure a été de démontrer la formule du périmètre par récurrence. Voici l'essence de notre démonstration :

1. **Initialisation** : Pour $n = 0$, $P_0 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 3 \times 1 = 3$, ce qui correspond.
2. **Hérédité** : Supposons la formule vraie au rang n : $P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$
 À l'itération $n + 1$, le nombre de côtés est multiplié par 4, et chaque côté est divisé par 3, donc :

$$P_{n+1} = P_n \times 4 \times \frac{1}{3} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{4}{3} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

La formule est donc valide au rang $n + 1$.

Cette démonstration rigoureuse a constitué un point culminant de notre travail, illustrant la puissance du raisonnement mathématique.

6 Perspectives futures

Ce projet n'est qu'un point de départ ! Voici les perspectives que nous envisageons :

- Démontrer la formule de l'aire par récurrence
- Explorer d'autres fractales emblématiques comme le triangle de Sierpiński
- Étudier la dimension fractale du flocon de Koch
- Développer une simulation interactive avec Python

Nous réfléchissons également à une expression plus compacte pour l'aire, potentiellement via des fonctions génératrices. Ces pistes nous passionnent et nous comptons les approfondir dans les mois à venir.

7 Conclusion et réflexions finales

Le projet "Premières neiges" a transcendé le cadre d'un simple exercice mathématique pour devenir une aventure humaine et intellectuelle transformatrice. À travers ces mois de recherche, nous avons découvert :

- La valeur de la **persévérance** : face aux obstacles, nous avons appris à explorer diverses approches plutôt qu'à renoncer.
- La puissance de la **collaboration** : nos compétences complémentaires nous ont permis de progresser là où chacun isolément aurait probablement échoué.
- L'élégance des **mathématiques** : derrière des concepts abstraits comme les fractales se cache une harmonie fascinante.
- L'importance de la **rigueur** : une démonstration mathématique exige une précision absolue.

Pour répondre à notre problématique initiale, nous avons adopté une stratégie collaborative mais structurée : Mohamed s'est concentré sur les aspects géométriques, Naël a approfondi les calculs d'aires, et Marion a formalisé les aspects liés aux suites. Naturellement, ces rôles étaient fluides et l'entraide constante.

Les conseils de nos professeurs et des chercheurs de l'Université de Namur se sont révélés inestimables. Leur guidance sans solutionnisme nous a permis de faire



FIGURE 7 – L'équipe complète

nos propres découvertes. Pour valider nos formules, nous avons utilisé plusieurs méthodes : vérification numérique sur des cas particuliers, analyse de cas limites, et démonstration par récurrence.

Au-delà des résultats mathématiques, ce projet nous a enseigné une leçon de vie : lorsque des esprits curieux collaborent avec passion, ils peuvent résoudre des problèmes qui semblaient insurmontables. La synergie d'équipe, alliée à une régularité dans l'effort, porte toujours ses fruits.

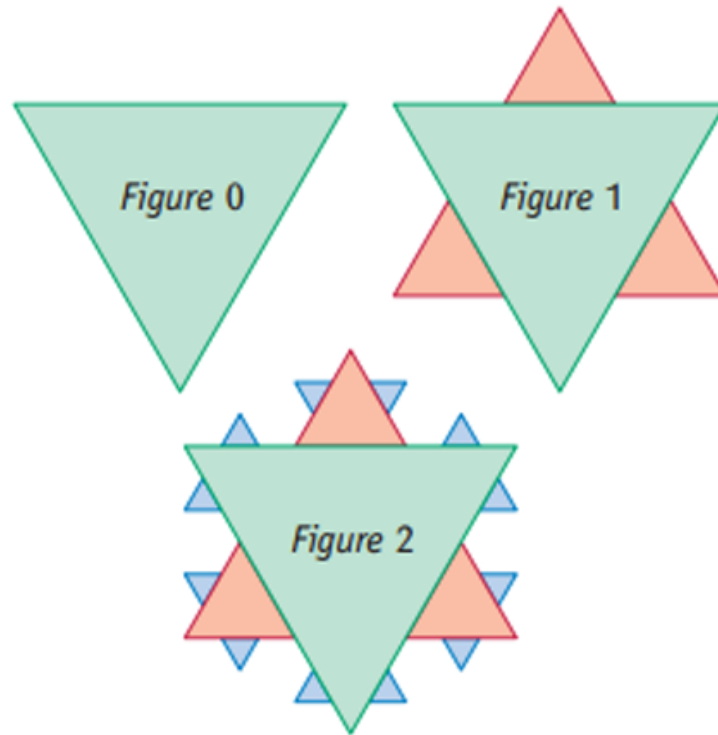


FIGURE 8 – Notre équipe de recherche

Conclusion mathématique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty \quad (\text{périmètre infini})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{8}{5} = 1.6 \quad (\text{aire finie})$$

Un objet fascinant aux propriétés contre-intuitives !

Remerciements

Ce projet n'aurait pu aboutir sans le soutien de nombreuses personnes. Nous tenons à exprimer notre gratitude envers :

- **Madame Wartique**, notre professeure, pour sa guidance éclairée, sa patience et sa passion communicative pour les mathématiques.

- **Madame Mallia**, pour son soutien constant et ses encouragements tout au long du projet.
- **Marie Dorchain et François-Grégoire Bierwart** de l'Université de Namur, pour leurs conseils avisés et leur disponibilité.
- Le **Collège Saint-André Auvelais**, pour nous avoir offert l'opportunité de participer au projet Math en Jeans.
- Nos **familles**, pour leur soutien indéfectible et leur compréhension durant les nombreuses heures consacrées à ce projet.

C'est grâce à cet écosystème bienveillant et stimulant que nous avons pu mener à bien cette recherche et vivre cette expérience formatrice.

**MERCI POUR VOTRE
ATTENTION!**