PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA TOPOLOGIE DE WIJSMAN SUR L'HYPERESPACE $CL(E)$

BASILE BEYER DE RYKE

Mathematics Subject Classification (2020) : Primary 54B20 - 54A20 - 54C05 - 54D05 - 54D10 ; Secondary 54A05 - 54A25

Préface et résumé

La topologie de Wijsman est un sujet passionnant et capital en topologie générale, c'est pourquoi j'ai décidé dans le cadre de mon travail de recherche de prouver ou de reprouver certaines propriétés topologiques fondamentales de la topologie de Wijsman sur $CL(E)$ afin d'obtenir une approche intuitive et innovante de cet hyperespace et de sa topologie.

Dans cet article je commence par donner une définition de la convergence de Wijsman sur $CL(E)$ avant de faire une caractérisation des ouverts pour la topologie de Wijsman.

J'étudie ensuite la finnesse maxiamale que peut avoir la topologie de Wijsman et j'obtiens les résultats qu'elle est toujours la topologie discrète lorsque $\#E$ est fini et qu'elle n'est jamais la topologie discrète lorsque $\#E$ est infini.

Je continue en regardant comment $CL(E)$ se comporte par rapport aux axiomes de séparations ; je prouve que $CL(E)$ muni de la topologie de Wijsman est T_2 et T_3 et j'énonce un cas dans lequel l'hyperespace n'est pas T_4.

Je termine l'article en étudiant la connexité de $CL(E)$: j'obtiens le résultat majeur qui est que la connexité de E implique celle de $CL(E)$ muni de la topologie de Wijsman et je démontre une proposition plus faible que la réciproque qui s'applique à un type d'espace métrique que j'introduis sous le nom d'espace "rempli".

Enfin je propose une façon de visualiser la connexité des ouverts dans $CL(\mathbb{R})$.

Date: Juin 2026.

notations :

-$[\![1, ..., n]\!]$: l'ensemble des entiers de 1 à n
-$\mathbb{R}^+$: l'ensemble des réels positifs avec 0 muni de la topologie induite par la distance valeur absolue sur $\mathbb{R}$
-$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels sans 0 -(E, d) : un espace métrique
-$CL(E)$: l'ensemble de tous les fermés non vides de E
-T_E : la topologie de Wijsman sur $CL(E)$
-f_x : la fonction distance à $x \in E$
-I : un ensemble ordonné filtrant
-$V(x)$: l'ensemble des voisinages de x
-$\overline{A}$: l'adérence de A
-$Int(A)$: l'interieur de A
-$B_r(x)$: la boule ouverte de centre x et de rayon r
-$B_r^F(x)$: la boule fermée de centre x et de rayon r
-$diam(E) = sup_{(x,y)\in E^2}(d(x, y))$: le diamètre de l'espace métrique E
-$\#E$: le cardinal de l'ensemble E

1. définition de la convergence de Wijsman

Soit (E, d) un espace métrique,
$\forall x \in E$ on définit f_x de $CL(E)$ dans $\mathbb{R}^+$ comme :

$$\forall A \in CL(E), f_x(A) = d(x, A) = inf_{y\in A}(d(x, y))$$

et l'on dit qu'une suite $(A_i)_{(i\in I)} \in Cl(E)^I$ converge au sens de Wijsman $(A_i* \to A)$ vers $A \in Cl(E)$ si et seulement si $\forall x \in E, lim_{i\to+\infty} f_x(A_i) = f_x(A)$

On voit donc que la convergence de Wijsman est une convergence de sous ensembles par le critère de convergence simple de leurs distances aux points de l'ensemble, c'est donc une forme de convergence pontuelle qui intuitivement peut paraitre assez faible étant donné qu'elle est fortement liée au mode de convergence le plus faible à savoir la convergence simple.

2. caractérisation d'un ouvert pour la topologie de Wijsman

Un premier critère qui nous vient à l'esprit en ce qui concerne les rapports entre fermés de E pour la topologie de Wijsman est que si les distances aux points de E entre deux fermés sont proches,(elles ne diffèrent pas trop) alors ces deux fermés sont proches pour Wijsman. [1]

Ce critère est équivalent à :$\forall x \in E, \forall V \subset \mathbb{R}^+$ un voisinage de $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{f}_x^{-1}(V)$ est un voisinage de $CL(E)$, autrement dit, ce critère est satisfait si et seulement si toutes les applications f_x (pour $x \in E$) sont continues.

1. On notera que la réciproque n'est pas forcément vrai, on pourrait avoir des fermés proches avec des distances aux points assez différentes.

On utilise donc la topologie la moins fine telle que les f_x soient continues, il s'agit de la topologie initiale [2].

Un ouvert pour la topologie de Wijsman est donc une intersection finie ou une réunion quelconque d'ensembles du type $\{f_x^{-1}(U) \mid U \subset \mathbb{R}^+\}$ avec $x \in E$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^+$.

On remarque que :

$$\{f_x^{-1}(U) \mid U \subset \mathbb{R}^+\} \iff \{A \in CL(E) \mid d(x,A) \in U\}$$

et que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{A \in CL(E) \mid d(x_i,A) \in U_i\} \iff \{A \in CL(E) \mid \forall i \in [\![1,...,n]\!], d(x_i,A) \in U_i\}$$

[3]

Nous adopterons ces caractérisations le plus souvent car elles sont assez confortables.

On vérifie aisément que la donnée d'ouverts précédement explicitée est bien une topologie sur $CL(E)$ en vérifiant le dernier axiome et en effet $\emptyset$ et $CL(E)$ sont ouverts dans $CL(E)$ car $\{A \in CL(E) \mid d(x,A) \in \emptyset\} = \emptyset$ et $\{A \in CL(E) \mid d(x,A) \in [0;+\infty[\} = CL(E)$.

Intéressons nous maintenant à la convergence d'une suite dans $CL(E)$ pour la topologie intitiale : d'après la définition, une suite $(A_i)_{i\in I} \in CL(E)^I$ converge vers $A \in CL(E)$ si et seulement si :

$$\forall \{A \in CL(E) \mid \forall i \in [\![1,...,n]\!], d(x_i,A) \in U_i\}\ [4] \in V(A),$$

$$\exists m \in I, \forall n > m, A_n \in \{A \in CL(E) \mid \forall i \in [\![1,...,n]\!], d(x_i,A) \in U_i\}$$

Comme la définition si dessous s'applique pour tout choix de $x \in E$ et pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^+$, cette définition est équivalente au fait que :

$$\forall x \in E, \forall U \subset \mathbb{R}^+, d(x,A) \in U,$$

$$\exists m \in I, \forall n > m, d(x,A_n) \in U$$

Cette définition n'est autre que la convergence simple des applications distances, autrement dit,

$$\forall x \in E, lim_{i\to+\infty} f_x(A_i) = f_x(A) \iff A_i* \to A$$

On en conclut que la convergence des suites dans $CL(E)$ pour la topologie décrite ci dessus est équivalente à la convergence de Wijsman et daurénavant nous noterons T_E cette topologie sur $CL(E)$.

---

2. Cette dernière est définie comme suit : si on a une famille d'applications $(f_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique X vers un espace topologique Y, la topologie intitiale sur X est engendrée par les intersections finies et réunions quelconques des ensembles de la forme $\{f_i^{-1}(U) \mid U \subset Y\}$ pour i parcourant I et U parcourant la topologie de Y.

3. Les ouverts de cette forme forment une base d'ouverts pour T_E, en effet, on remarque bien que leur réunion est égale à $CL(E)$ et que tout ouvert pour Wijsman possède au moins un sous ensemble de ce type.

cette base nous sera bien utile dans nombre de démonstrations et je l'appelerai la base classique.

4. La définition standard de la convergence d'une suite pour une certaine topologie concerne les voisinages, cependant pour établir l'équivalence qui va suivre il est plus aisé de considérer les ouverts de la base d'ouverts précédement établie, cette définition est évidemmment équivalente étant donné que les ouverts sont des voisinages et que tout voisinage contient un ouvert qui lui même contient un élément de la base d'ouverts.

Avant de passer à la prochaine section, il nous reste une proposition à établir sur la topologie initiale, celle-ci nous sera très utile lorsque l'on souhaitera déterminer la connexité de $CL(E)$.

Proposition 2.1 : Une application g d'un ensemble X dans $CL(E)$ est continue si et seulement si $f_x \circ g$ est continue pour tout x dans E.

Preuve : Le sens f_x et g continues implique $f_x \circ g$ continue est un résultat bien connu qui est que la composée d'applications continues est continue, nous allons donc seulement prouver l'autre sens.

Supposons que $f_x \circ g$ est continue,

c'est équivalent à ce que pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^+$, $g^{-1}(f_x^{-1}(U))$ est ouvert dans X,

de plus, d'après la définition que l'on a donné des ouverts pour T_E, on a que $f_x^{-1}(U)$ est ouvert dans $CL(E)$,

donc pour tout ouvert de la forme $f_x^{-1}(U)$, $g^{-1}(f_x^{-1}(U))$ est ouvert dans X,

il n'est pas compliqué de généraliser aux intersections finies et réunions quelconques d'ouverts de la forme $f_x^{-1}(U)$ et on obtient donc que pour tout ouvert B dans $CL(E)$, $g^{-1}(B)$ est ouvert dans X,

on en conclut que g est continue.

3. Finesse maximale de T_E sur $CL(E)$

3.1. **T_E pour $CL(E)$ fini.** Comme précédement énoncé, la convergence de Wijsman est ponctuelle ce qui fait qu'elle est par nature moins restrictive que des formes de convergence plus fortes telles que la convergence uniforme par exemple, on peut alors se poser la question de si il est possible que T_E soit la plus fine qui soit, c'est à dire qu'elle soit la topologie discrète.

Proposition 3.1.1 : Pour E un ensemble fini, $(CL(E), T_E)$ est discret.

Preuve :

Comme les réunions quelconques d'ouverts sont des ouverts, pour que $CL(E)$ soit discret il suffit que $\forall A \in CL(E), \{A\}$ soit ouvert pour T_E.

Soit (E, d) un espace métrique tel que $\#E = m$, notons $x_1, ..., x_m$ ses éléments,

Soit $\{A'\} \in CL(E)$, $\forall x_i \in E$, on note $d(x_i, A') = z_i$,

dès lors $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_*^+$ tel que :

$$B = \{A \in CL(E) \mid \forall 1 \leq i \leq m, d(x_i, A) \in]z_i - \epsilon, z_i + \epsilon[\cap \mathbb{R}^+\} = \{A'\}$$

En effet, si A est un fermé de E différent de A', il existe au moins un élément x_i de E tel que $d(x_i, A) \neq d(x_i, A')$ [5],

on note alors $\mid d(x_i, A) - d(x_i, A') \mid = r_A > 0$ et il en découle que

$A \notin \{A \in CL(E) \mid d(x_i, A) \in]z_i - \frac{r_A}{2}, z_i + \frac{r_A}{2}[\}$

$\#E = m$ donc il y a au plus $2^m - 1$ fermés A non vides dans E, en particulier il y en a un nombre fini donc on peut prendre $\epsilon = \frac{\min_{A \neq A'}(r_A)}{2}$

5. Cela peut sembler trivial mais lorsque que l'on travail dans des ensembles pathologiques infinis il est plus difficile de le déterminer.

T_E peut sembler peu fine sous certains abords mais on constate néamoins qu'il est possible que cette dernière soit la plus fine possible.

Daurénavant nous ne nous intéresserons plus vraiment à $CL(E)$ lorsque E est fini étant donné que la topologie discrète est bien connue et est peu surprenante au niveau de ses propriétés.

Ce résultat est assez intuitif et moralement il énonce que lorsque l'on a un nombre fini de données de départ, on peut être assez précis pour repérer la position de n'importe quel fermé non vide de E grâce à sa position par rapport à tous les points de l'ensemble.

3.2. T_E **pour** $CL(E)$ **infini.** La condition que E soit fini est peu intéressante et très restrictive car évidement sa structure tent vers le discret.

Nous allons donc nous poser la question de quand T_E est la topologie discrète lorsque E est infini.

Pour cela nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 : Si E est métrique alors E est T_2.

Preuve : Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, on a $d(x, y) = r$ pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, dès lors, $B_{\frac{r}{2}}(x)$ et $B_{\frac{r}{2}}(y)$ sont respectivement des voisinages de x et de y et on a bien $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$

La notion d'espace T_2 est assez utile notamment grâce au lemme suivant :

Lemme 3.2.2 : Si E est T_2 alors $\forall x \in E, \{x\}$ est fermé dans E.

Preuve : Soit $x \in E$,

$\{x\}$ fermé dans $E \iff E\backslash\{x\}$ est ouvert dans E,

soit $y \in E\backslash\{x\}$, si E est T_2 alors il existe un ouvert U contenant x et un ouvert V contenant y tels que $V \cap U = \emptyset$, en particulier $x \notin V$ d'où $V \subset E\backslash\{x\}$ et il s'en suit que $E\backslash\{x\}$ est ouvert et on en conclut que $\{x\}$ est fermé.

Nous avons maintenant assez d'outils afin d'établir la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 : Si $\#E = +\infty$ alors il est impossible que T_E soit la topologie discrète.

Preuve : Soit E un espace métrique de cardinal infini,

E est fermé non vide donc $E \in CL(E)$,

Soit $\{A \in CL(E) \mid \forall i \in [\![1, ..., n]\!], d(x_i, A) \in U_i\}$ un ouvert de la base classique de T_E tel que E appartient à ce dit ouvert,

dès lors, $\forall i \in [\![1, ..., n]\!], 0 \in U_i$ car $\forall x \in E, d(x, E) = 0$

de plus, on a par le lemme 3.2.1 que E est T_2 donc par le lemme 3.2.2 on a que $\{x\}$ est fermé pour tout x dans E et par axiomes des ouverts et des fermés que $B = \{x_1, ..., x_n\}$ est fermé dans E,

comme $\forall i \in [\![1, ..., n]\!], x_i \in B$, on a que $d(x_i, B) = 0$ et il s'en suit que

$B \in \{A \in CL(E) \mid \forall i \in [\![1, ..., n]\!], d(x_i, A) \in U_i\}$ donc le singleton E n'est jamais ouvert pour T_E et on en conclut qu'avec ces conditions il est impossible que T_E soit la topologie discrète.

Cette proposition est importante car elle témoigne du fait que T_E est au finale assez faible, en effet, dès qu'il s'agit d'ensembles infinis on ne peut plus être assez précis que pour cibler n'importe quel sous ensemble de E, c'est un résultat peu surprenant qui résulte en partie du fait que la topologie de Wijsman est définie en usant de la convergence simple de fonctions.

4. Les axiomes de séparation dans l'hyperespace $(CL(E), T_E)$

En analysant la structure de $(CL(E), T_E)$ on peut constater ou au moins avoir une intuition du fait que l'hyperespace est toujours T_1 et comme $T_2 \implies T_1$ on va directement montrer que $CL(E)$ est T_2.

Etant donné que la convergence de Wijsman consiste en partie en la convergence de suites de réels positifs, le fait que $CL(E)$ soit T_2 peut sembler presque intuitif et pour le démontrer nous aurons besoin de trois lemmes :

Lemme 4.1 : un ensemble A est égal à son adérence si et seulement si il est fermé.

Preuve : Soient E un espace topologique et $A \subset E$ un sous ensemble fermé de E,
A est fermé dans E est équivalent à $X \backslash A$ est ouvert dans E,
$\forall x \in A, x \in \overline{A}$, car $\forall V \in V(x), x \in V \cap A$,
$X \backslash A$ est ouvert dans E si et seulement si $\forall x \in X \backslash A, \exists V \in V(x), V \subset X \backslash A$ ce qui est équivalent à $V \cap A = \emptyset$ et il s'en suit que $x \notin \overline{A}$.
On en conclut que $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

Lemme 4.2 : Dans un espace métrique (E, d) avec $A \subset E$, $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

Preuve : Soient (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $A \subset E$,

$$x \in \overline{A} \iff \forall r \in \mathbb{R}_*^+, B_r(x) \cap A \neq \emptyset \iff \forall r \in \mathbb{R}^*, r > d(x, A) \iff d(x, A) = 0$$

Lemme 4.3 : Pour tous A et B des fermés distincts de E , il existe $x \in E$ tel que $d(x, A) \neq d(x, B)$.

Preuve : Soient $A, B \in CL(E)$ tels que $A \neq B$,
Supposons par l'absurde que $\forall x \in E, d(x, A) = d(x, B)$,
soit $x \in E$ tel que $d(x, A) = 0$, par le lemme 4.2 on sait que c'est équivalent à $x \in \overline{A}$ et par hypothèse on a aussi $d(x, B) = 0$ donc $x \in \overline{B}$,
il s'en suit que $x \in \overline{A} \iff x \in \overline{B}$ d'où $\overline{A} = \overline{B}$,
d'autre part, A et B sont fermés dans E donc par le lemme 4.1 on sait que $\overline{A} = A$ et que $\overline{B} = B$,
on obtient donc $A = B$ ce qui contredit l'hypothèse de départ,
on en conclut que pour tous fermés A et B distincts, il existe $x \in E$ tel que $d(x, A) \neq d(x, B)$.

Nous avons à présent assez d'informations pour prouver que $CL(E)$ muni de T_E est T_2.

Théorème : $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ est T_2.

Preuve : Soient $A, B \in CL(E)$ tels que $A \neq B$,
par le lemme 4.3 on sait qu'il existe $x^* \in E$ tel que $d(x^*, A) \neq d(x^*, B)$,
on pose donc $|d(x^*, A) - d(x^*, B)| = r$ pour $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère $C = \{X \in CL(E) \mid d(x^*, X) \in]d(x^*, A) - \frac{r}{2}, d(x^*, A) + \frac{r}{2}[\cap\mathbb{R}^+\}$ et $D = \{X \in CL(E) \mid d(x^*, X) \in]d(x^*, B) - \frac{r}{2}, d(x^*, B) + \frac{r}{2}[\cap\mathbb{R}^+\}$ deux ouverts de $CL(E)$,
on remarque que $A \in C$ et $B \in D$,
enfin, comme $]d(x^*, A) - \frac{r}{2}, d(x^*, A) + \frac{r}{2}[\cap]d(x^*, B) - \frac{r}{2}, d(x^*, B) + \frac{r}{2}[= \emptyset$, on a que $C \cap D = \emptyset$.
On conclut de cela que $CL(E)$ est T_2.

Etant donné que la construction de la topologie de Wijsman fait appel à un espace métrique E et que la topologie sur $CL(E)$ est fortement liée à la distance d sur E, il n'est pas surprenant que $CL(E)$ muni de T_E soit T_2.

$(CL(E),\mathrm{T}_E)$ T_2 est un résultat majeur car dans un premier temps, cet hyperespace est enfin admissible dans une catégorie d'espaces topologiques plus facile à manipluler que la plupart des espaces topologiques étant donné sa propriété de séparabilité.

Dans un second temps, savoir que $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ est T_2 est cruciale pour étudier le comportement des suites qui convergent au sens de Wijsman, la proposition suivante témoigne de ce fait.

Proposition 4.1 : Si un espace topologique E est T_2 alors toute suite convergente admet une limite unique.

Preuve : Soit E un espace T_2,
une suite $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ converge vers $x \in E$ si et seulement si $\forall V \in V(x), \exists m \in I, \forall n > m, x_n \in V$
Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ convergente qui admet deux limites $x, y \in E$ tels que $x \neq y$,
comme E est T_2, $\exists U \in V(x), \exists V \in V(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$
$\exists m \in I, \forall n > m, x_n \in U$ et $\exists m' \in I, \forall n > m', x_n \in U$ donc $\forall n > max(m, m'), x_n \in U \cap V = \emptyset$
mais cela est absurde, on obtient une contradiction et on en conclut que dans un espace T_2, toute suite convergente admet une limite unique.

Le caractère T_2 de $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ nous permet d'affirmer que toute suite convergant au sens de Wijsman admet une limite unique.

Néanmoins nous ne sommes pas obligé de nous arrêter en si bon chemin ; on souhaiterait montrer que $(CL(E), T_E)$ est T_3.

Pour pouvoir prouver cela nous allons devoir commencer à nous intéresser plus profondement à ce qu'est un fermé pour T_E :

Soit $B = \{A \in CL(E) \mid d(x, A) \in U\}$ avec U ouvert dans $\mathbb{R}^+$, B est ouvert dans $CL(E)$ donc $F = CL(E)\backslash U$ est fermé, de plus on remarque que les éléments A de F sont exactement ceux tels que $d(x, A) \notin U$ donc $F = \{A \in CL(E) \mid d(x, A) \in \mathbb{R}^+\backslash U\}$.

Les fermés de $CL(E)$ sont donc les intersections quelconques et réunions finies d'ensembles de la forme $F = \{A \in CL(E) \mid d(x, A) \in C\}$ pour C fermé dans $\mathbb{R}^+$.

Grâce à cette forme de dualité entre fermés et ouverts on peut construire une sorte de "base de fermés" qui va nous faciliter la démonstration à venir.

Notre "base de fermés" est constituée des ensembles de la forme $CL(E)\backslash B$ pour B un ouvert de la base d'ouvert classique c'est à dire que B est de la forme

$\{A \in CL(E) \mid \bigwedge_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in U_i\}$, on a donc $CL(E)\backslash B = \{A \in CL(E) \mid \bigvee_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in \mathbb{R}^+\backslash U_i\}$ et on remarque qu'il est équivalent de prouver que $CL(E)$ est T_3 pour tout fermé ou pour les fermés de la "base de fermés".

Théorème : $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ est T_3.

Soient (E, d) un espace métrique, $F = \{A \in CL(E) \mid \bigvee_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in F_i\}$ un fermé de la "base de fermés" et $A^* \in B = CL(E)\backslash F = \{A \in CL(E) \mid \bigwedge_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in \mathbb{R}^+\backslash F_i\}$,

$\forall i \in [\![1, ..., n]\!], F_i = \bigcup_{y \in F_i} \{y\}$,

de plus, comme $A^* \notin F$ on a que $\forall F_i, inf_{y \in F_i}(|d(x_i, A^*) - y|) > 0$,[6] on note ϵ_i cette quantité,

dès lors on note $V_i = \bigcup_{y \in F_i}]y - \frac{\epsilon_i}{2}, y + \frac{\epsilon_i}{2}[\cap \mathbb{R}^+$ et $V = \{A \in CL(E) \mid \bigvee_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in V_i\}$ est un ouvert de $CL(E)$ tel que $F \subset V$,

enfin $\forall i \in [\![1, ..., n]\!]$, on a $]d(x_i, A^*) - \frac{\epsilon_i}{2}, d(x_i, A^*) + \frac{\epsilon_i}{2}[\cap \mathbb{R}^+$ un voisinage disjoint de V_i donc on obtient que $d(x_i, A^*) \notin \overline{V_i}$,

il en découle que $A^* \in C = \{A \in CL(E) \mid \bigwedge_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in \mathbb{R}^+\backslash \overline{V_i}\}$,

on voit clairment que $C \cap V = \emptyset$ donc on a bien prouvé que pour tout fermé F de $CL(E)$ et pour tout élément A^* n'appartenant pas à ce fermé il existe des ouverts disjoints tels que A^* appartient à l'un des deux ouverts et que F est contenu dans l'autre,

on en conclut que $CL(E)$ est T_3.

Enfin on sait que $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ est T_3 mais pas toujours T_4, en effet il existe des espaces métriques bien connus pour lesquels $CL(E)$ muni de T_E n'est pas T_4 comme par exemple R l'ensemble des réels muni de la topologie discrète.

5. La connexité de $(CL(E), T_E)$

La connexité d'un espace topologique est un point crucial dans la compréhension de ce dit espace, c'est pourquoi dans cette dernière section nous nous intéressons à comment la connexité de E influence celle de $CL(E)$ et réciproquement.

Lemme 5.1 : L'image directe d'un connexe par une application continue est connexe.

Lemme 5.2 : Si A et B sont connexes avec $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est connexe.

Lemme 5.3 : E connexe est équivalent à E^n connexe.

Ces trois résultats, très connus, seront admis et non démontrés dans cet article.

Lemme 5.4 : Si U est connexe alors $\overline{U}$ l'est aussi.

6. On peut l'affirmer une fois de plus grâce à la combinaison des lemmes 4.1 et 4.2

Preuve : Supposons U connexe,

soit $f : \overline{U} \to \{0, 1\}$ une fonction continue,

U est connexe donc $f_{|U}$ est continue et constante, notons y la valeur de $f(x)$ pour $x \in U$,

$\forall z \in \overline{U}, lim_{x\to z} f(x) = y$ et comme f est continue on a aussi que $lim_{x\to z} f(x)$ existe et vaut $f(z)$ donc on en conclut que f est constante ce qui implique $\overline{U}$ connexe.

Nous pouvons à présent fournir la preuve du résultat le plus important de cet article.

Théorème : Si E est connexe alors $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ l'est aussi.

Preuve : On suppose E connexe et on considère $W = \{A \in CL(E) \mid \#A < +\infty\}$ un sous ensemble de $CL(E)$,

dans un premier temps on va montrer que cet ensemble est dense dans $CL(E)$ c'est à dire que $\overline{W} = CL(E)$.

Soit $A' \in CL(E)$ [7] et $B = \{A \in CL(E) \mid \bigwedge_{i=1}^{n} d(x_i, A) \in U_i\}$ un ouvert de la base d'ouverts classique tel que $A' \in B$, posons $d(x_i, A') = z_i$,

comme pour tout $i \in [\![1, ..., n]\!]$, $z_i \in U_i$ et que U_i est ouvert, il existe $\epsilon_i > 0$ tel que $B_{\epsilon_i}(z_i) \subset U_i$,

de plus si il n'existait pas de y_i dans A' tel que $z_i \leq d(x_i, y_i) < z_i + \epsilon_i$ alors $z_i + \epsilon_i$ serait un minorant des quantités $d_{y\in A'}(x_i, y)$ donc on aurait $inf_{y\in A'}(d(x_i, y)) = z_i \geq z_i + \epsilon_i$ ce qui est absurde,

il s'en suit qu'il existe un tel y_i dans A' et donc que $d(x_i, y_i) \in U_i$,

il découle de tout cela que $\{y_1, ..., y_n\} \in B$ et on en conclut que $\forall A' \in CL(E), \forall V \in V(A'), V \cap W \neq \emptyset$ donc $\overline{W} = CL(E)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, soient $W_n = \{A \in W \mid \#A \leq n\}$ et

$$e_n : E^n \to W_n$$

$$(x_1, ..., x_n) \to \{x \in E \mid \exists 1 \leq i \leq n, x = x_i\}$$

La proposition 2.1 nous dit que pour prouver que e_n est continue il suffit de montrer que $f_x \circ e_n$ de E^n dans $\mathbb{R}^+$ est continue,

on remarque que $(f_x \circ e_n)((x_1, ..., x_n)) = min_{1\leq i\leq n}(d(x_i, x))$,

$\pi_i : E^n \to E$ telle que $\pi_i((x_1, ..., x_n)) = x_i$ est la projection qui est une application continue,

l'application g_x de E dans $\mathbb{R}^+$ qui à $y \in E$ associe $d(x, y)$ est aussi continue,

enfin l'application h de $\mathbb{R}^n_+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à $(r_1, ..., r_n)$ associe $min_{1\leq i\leq n}(r_i)$ est continue, en composant on obtient que l'application j de E^n dans $\mathbb{R}^n_+$ qui à $(x_1, ..., x_n)$ associe $((g_x \circ \pi_1)((x_1, ..., x_n)), ..., (g_x \circ \pi_n)((x_1, ..., x_n)))$ est continue et finalement que $h \circ j$ de E^n dans $\mathbb{R}^+$ qui à $(x_1, ..., x_n)$ associe $min_{1\leq i\leq n}(d(x_i, x))$ est continue.

On a donc e_n continue et on remarque aussi que c'est une surjection donc par les lemmes 5.1 et 5.3 cummulés on a que W_n est connexe,

d'autre part, on a $W_1 \subset W_2 \subset ...$ donc par le lemme 5.2 on obtient W connexe,

enfin on utilise le lemme 5.4 qui nous donne que $\overline{W} = CL(E)$ est connexe.

7. $\#A' = +\infty$ car le cas A' fini est trivial

Ce théorème est capital dans notre compréhension de l'hyperespace $(CL(E), T_E)$, il nous apprend que la connexité de E implique celle de $CL(E)$ ce qui en quelque sorte fait de la connexité une propriété "stable" par T_E.

La réciproque de ce théorème est plus délicate mais également beaucoup moins utile, en effet, il est en général plus ardu de déterminer la connexité de $CL(E)$ que celle de E donc savoir que $CL(E)$ est connexe car E l'est est plus intéressant que de savoir que E est connexe car $CL(E)$ l'est.

La réciproque reste cependant tout à fait digne d'intéret car si elle est vraie alors cela voudra dire que la connexité de $CL(E)$ est équivalente à celle de E.

Dans cet article je démontrerai une proposition plus faible qui s'applique à un type plus large d'espaces métriques que pour l'article je nommerai "espaces remplis".

Définition : Un espace métrique E est dit non rempli si et seulement si $\exists x \in E, \exists r < diam(E), \forall A \in CL(E), d(x, A) \neq r$ et $\exists r' > r, \exists A \in CL(E), d(x, A) = r'$.

Un espace métrique est dit rempli si il n'est pas non rempli.

La proposition suivante nous indique en quoi le fait que E soit rempli est intéressant et a un rapport avec sa connexité.

Proposition 5.1 : Soit (E, d) un espace métrique, E connexe implique que E est rempli.

Preuve : Démontrons la contraposée : supposons E non rempli,

il s'en suit qu'il existe un certain $x \in E$ et un certain réel positif $r < diam(E)$ tel que $\forall A \in CL(E), d(x, A) \neq r$,

comme E est T_2 on a que $\forall y \in E, \{y\} \in CL(E)$ donc en particulier $\forall y \in E, d(x, y) \neq r$

dès lors, $B_r(x) = B_r^F(x)$ et on sait que $B_r(x) \neq E$ car $\exists r' > r, \exists A \in CL(E), d(x, A) = r'$ donc il y a un sous ensemble de E non vide et différent de E qui est ouvert et fermé,

il s'en suit que E n'est pas connexe.

Proposition 5.2 : Si $(CL(E),\mathrm{T}_E)$ est connexe alors E est rempli.

Preuve : Utilisons encore une fois la contraposée : Supposons E non rempli,

c'est équivalent à $\exists x^* \in E, \exists r < diam(E), \forall A \in CL(E), d(x^*, A) \neq r$

et $\exists r' > r, \exists A \in CL(E), d(x^*, A) = r'$

dès lors, on considère $B = \{A \in CL(E) \mid d(x^*, A) \in [0, r[\}$ et $C = \{A \in CL(E) \mid d(x^*, A) \in]r, +\infty[\}$ des ouverts de $CL(E)$,

on est assuré que B et C sont non vide car $\{x^*\} \in B$ et comme E est non rempli, $\exists A \in CL(E), A \in C$,

comme $[0, r[$ et $]r, +\infty[$ sont disjoints on a $B \cap C = \{A \in CL(E) \mid d(x^*, A) \in \emptyset\} = \emptyset$

de plus, $B \cup C = \{A \in CL(E) \mid d(x^*, A) \in [0, r[\cup]r, +\infty[\}$ et $\forall A \in CL(E), d(x^*, A) \neq r$ donc on a $B \cup C = CL(E)$,

on a pu effectuer une séparation de $CL(E)$ en deux ouverts non vides et disjoints donc on en conclut que $CL(E)$ est non connexe.

Bien sûr cette propositon ne nous avance pas dans la preuve du cas général de la réciproque mais elle nous permet au moins d'affirmer qu'un espace métrique est rempli si on a l'information que l'hyperespace formé de ses fermés non vides que l'on muni de T_E est connexe.

Je terminerai cet article en proposant une manière de visualiser les ouverts pour T_E avec $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ, je pense qu'il est possible de généraliser la visualisation à des ensembles de départ connexes et assez simples à manipuler.

Cette visualisation permet également, lorsqu'elle est généralisée à E connexe, de voir comment la connexité de l'ensemble U ouvert dans $\mathbb{R}^+$ affecte celle de $\{A \in CL(E) \mid d(x, A) \in U\}$ ouvert dans $CL(E)$.

Bien qu'elle ne soit pas tout à fait rigoureuse elle nous conforte dans l'idée que si E est connexe et que $diam(E) \geq diam(U)$ alors $B = \{A \in CL(E) \mid d(x, A) \in U\}$ connexe est équivalent à U connexe. [8]

On considère $\mathbb{R}$ la droite réelle, un x dans $\mathbb{R}$ et $U = [0, l[$ pour un certain l dans $\mathbb{R}_*^+$.

$B = \{A \in CL(\mathbb{R}) \mid d(x, A) \in [0, l[\}$ n'est autre que l'ensemble des fermés non vides de $\mathbb{R}$ qui ont des points dans $]x - l, x + l[$,

on décide de les confondre sur une autre droite réelle que l'on place au dessus de la première,

sur celle ci, pour tout point r tel que $d(r, x) < l$,on colorie r en vert si et seulement si il existe un A dans B tel que $d(x, A) = |r - x|$, sinon on le colorie en bleu.

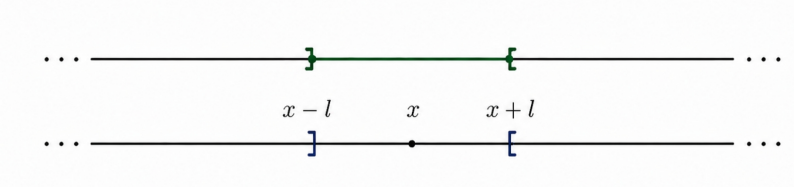


FIGURE 1. cas $U = [0, l[$

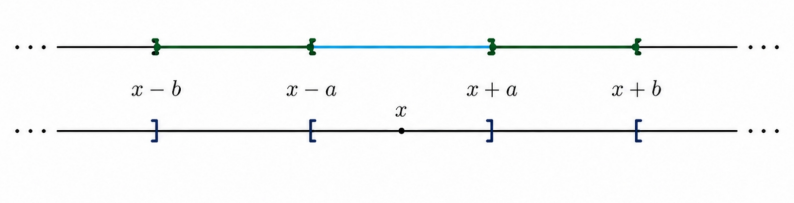


FIGURE 2. cas $U =]a, b[$

On dira alors que B est connexe si l'intervalle vert ou l'intervalle bleu l'est.

Si cette représentation est pertinente au niveau de la connexité alors cela signifie que dans $\mathbb{R}$ on a bien U connexe $\implies$ B connexe.

Quoi qu'il en soit si U n'est pas connexe alors on est assuré que B ne l'est pas, on le remarque aussi grâce à la visualisation :

8. Le sens B connexe $\implies$ U connexe n'est pas bien compliqué étant donné que si E connexe avec $diam(E) \geq diam(U)$ alors l'application de B dans U qui à A associe $d(x, A)$ est une surjection continue.

U connexe $\implies$ B connexe est cependant plus ardu à prouver cependant si E est non connexe alors il existe des contre exemples et d'ailleurs la visualisation dans ces cas ci ne tient plus vraiment.

par exemple si dans la figure 2, U devient $[0, \frac{a}{2}[\cup]a, b[$ alors l'intervalle vert sera $]x-b, x-a[\cup]x-\frac{a}{2}, x+\frac{a}{2}[\cup]x+a, x+b[$ et l'intervalle bleu sera $[x-a, x-\frac{a}{2}]\cup[x+\frac{a}{2}, x+a]$ aucun des deux intervalles n'est connexe ce qui indique par la visualistaion que $B = \{A \in CL(\mathbb{R}) \mid d(x, A) \in [0, \frac{a}{2}[\cup]a, b[\}$ n'est pas connexe et dans les faits c'est bien le cas.

Cette manière de se représenter la connexité des ouverts de $CL(\mathbb{R})$ n'est peut être pas toujours pertinente étant donné qu'elle se base fortement sur l'équivalence de la connexité de U avec celle de B, cependant elle peut se montrer très utile lorsqu'il faut se représenter mentalement certaines propriétés de $CL(E)$.

Je conclurerai cet article par une citation du mathématicien Francais Evariste Galois :

« Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera "je ne sais pas le reste". »

Références

[1]Robert A. Wijsman, Convergence of Sequences of Convex Sets, Cones and Functions. II, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 123, No. 1 (1966), pp. 32–45.

[2]Zhang, Eric K., Math 55b : Studies in Real and Complex Analysis, notes de cours du Math 55b,(enseigné par Joe Harris), Université Harvard, printemps 2020.

[3]J. R. Munkres, Topology, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[4]Wikipedia contributors, Wijsman convergence, Wikipedia, The Free Encyclopedia, https ://en.wikipedia.org/wiki/Wijsman convergence

[5]G. Skandalis, Topologie et analyse. Cours et exercices avec solutions, Dunod, Paris, 2020

[6]T. W. Gamelin and R. E. Greene, Introduction to Topology, 2nd ed., Dover Publications, Mineola, NY, 1999.

[7]L. A. Steen and J. A. Seebach, Jr., Counterexamples in Topology, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 18, Springer-Verlag, New York, 1978.

e-mail : basile.beyer@gmail.com