Les sommes palindromiques

Gauthier, Antoine, Lucas

Avril 2022

Structure de l'exposé

Définitions

Un *palindrome* est un nombre ou un mot qui se lit indifférement dans un sens ou l'autre.

Définitions

Un *palindrome* est un nombre ou un mot qui se lit indifférement dans un sens ou l'autre.
ex : kayak, radar, 121, 33...

Définitions

Un *palindrome* est un nombre ou un mot qui se lit indifférement dans un sens ou l'autre.
ex : kayak, radar, 121, 33...
ex : elu par cette crapule

Définitions

Un *palindrome* est un nombre ou un mot qui se lit indifférement dans un sens ou l'autre.
ex : kayak, radar, 121, 33...
ex : elu par cette crapule

Une autre façon équivalente de définir un palindrome est de dire que les caractères équidistants des extrémités du nombre (ou du mot) sont identiques.

Somme palindromique

- Le *nombre miroir* d'un nombre x est le nombre obtenu en écrivant les chiffres de x dans l'ordre inverse.

Somme palindromique

- Le *nombre miroir* d'un nombre x est le nombre obtenu en écrivant les chiffres de x dans l'ordre inverse.
  Ex : le miroir de 123 est 321

Somme palindromique

- Le *nombre miroir* d'un nombre x est le nombre obtenu en écrivant les chiffres de x dans l'ordre inverse.
  Ex : le miroir de 123 est 321

- La *somme palindromique* d'un nombre x est la somme de ce nombre et de son miroir.

Somme palindromique

- Le *nombre miroir* d'un nombre x est le nombre obtenu en écrivant les chiffres de x dans l'ordre inverse.
  Ex : le miroir de 123 est 321

- La *somme palindromique* d'un nombre x est la somme de ce nombre et de son miroir.
  Ex :
  - $123+321=444$
  - $567+765=1332$

Somme palindromique

- Le *nombre miroir* d'un nombre x est le nombre obtenu en écrivant les chiffres de x dans l'ordre inverse.
  Ex : le miroir de 123 est 321

- La *somme palindromique* d'un nombre x est la somme de ce nombre et de son miroir.
  Ex :
  - $123+321=444$
  - $567+765=1332$

Au vu des deux exemples, on voit que la somme palindromique peut être un palindrome ou pas.

Problématiques

D'où les questions suivantes :

- A quelle(s) condition(s) la somme palindromique d'un nombre est-elle un palindrome ?

Problématiques

D'où les questions suivantes :

- A quelle(s) condition(s) la somme palindromique d'un nombre est-elle un palindrome ?
- Y a-t-il une méthode de construction de nombres dont la somme palindromique est un palindrome ?

Problématiques

D'où les questions suivantes :

- A quelle(s) condition(s) la somme palindromique d'un nombre est-elle un palindrome ?
- Y a-t-il une méthode de construction de nombres dont la somme palindromique est un palindrome ?
- Si la somme palindromique n'est pas un palindrome et qu'on lui applique le processus (éventuellement plusieurs fois), obtient-on toujours un palindrome ?

Question 1 : Approche à l'aide d'exemples

Essayons avec de petits nombres à deux chiffres:

23+32= 55	85+58= 142
16+61= 77	73+37= 110
63+36= 99	97+79= 176
47+74=121	

Approche à l'aide d'exemples

Essayons avec de petits nombres à deux chiffres:

23+32= 55	85+58= 142
16+61= 77	73+37= 110
63+36= 99	97+79= 176
47+74=121	

Nous remarquons vite que

- si il n'y a pas de report, la somme palindromique est un palindrome,

Approche à l'aide d'exemples

Essayons avec de petits nombres à deux chiffres:

$23+32=55$	$85+58=142$
$16+61=77$	$73+37=110$
$63+36=99$	$97+79=176$
$47+74=121$	

Nous remarquons vite que

- si il n'y a pas de report, la somme palindromique est un palindrome,
- dès qu'il y a un report dans l'opération, ... la somme n'est pas toujours un palindrome.

Notation

Soit un nombre x naturel à $n+1$ chiffres. Nous désignerons ses $n+1$ chiffres par

$$a_n a_{n-1} \ldots \cdots a_1 a_0$$

Notation

Soit un nombre x naturel à $n+1$ chiffres. Nous désignerons ses $n+1$ chiffres par

$$a_n a_{n-1} \ldots \cdots a_1 a_0$$

où a_n, a_{n-1}, ..., a_1,a_0 sont des naturels tels que

$$0 \leq a_i \leq 9, \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ et } a_n \neq 0$$

Notation

Soit un nombre x naturel à $n+1$ chiffres. Nous désignerons ses $n+1$ chiffres par

$$a_n a_{n-1} \dots \cdots a_1 a_0$$

où a_n, a_{n-1}, ..., a_1,a_0 sont des naturels tels que

$$0 \leq a_i \leq 9, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ et } a_n \neq 0$$

et

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Notation

Soit un nombre x naturel à $n+1$ chiffres. Nous désignerons ses $n+1$ chiffres par

$$a_n a_{n-1} \ldots \cdots a_1 a_0$$

où a_n, a_{n-1}, ..., a_1,a_0 sont des naturels tels que

$$0 \leq a_i \leq 9, \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ et } a_n \neq 0$$

et

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Exemple : si $x = 321$, on a $321 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$,
càd $a_2 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_0 = 1$.

Etude du cas avec report

Une somme peut-elle être un palindrome malgré un report ?

Etude du cas avec report

Une somme peut-elle être un palindrome malgré un report ?

Nombres à 2 chiffres

Considérons tout d'abord le cas d'un nombre à deux chiffres $a_1 a_0$ avec : $0 \leq a_i \leq 9, \quad a_0 + a_1 \geq 10,$

Etude du cas avec report

Une somme peut-elle être un palindrome malgré un report ?

Nombres à 2 chiffres

Considérons tout d'abord le cas d'un nombre à deux chiffres $a_1 a_0$ avec : $0 \leq a_i \leq 9, \quad a_0 + a_1 \geq 10,$

Soit R le reste de la division de $(a_0 + a_1)$ par 10 on peut aussi dire $R = (a_0 + a_1)$ modulo 10.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & a_1 & a_0 \\
+ & & a_0 & a_1 \\
\hline
 & 1 & R+1 & R
\end{array}
$$

Etude du cas avec report

Une somme peut-elle être un palindrome malgré un report ?

Nombres à 2 chiffres

Considérons tout d'abord le cas d'un nombre à deux chiffres $a_1 a_0$ avec : $0 \leq a_i \leq 9, \quad a_0 + a_1 \geq 10,$

Soit R le reste de la division de $(a_0 + a_1)$ par 10 on peut aussi dire $R = (a_0 + a_1)$ modulo 10.

$$\begin{array}{cccc} & & a_1 & a_0 \\ + & & a_0 & a_1 \\ \hline & 1 & R+1 & R \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 6 & 5 \\ + & & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Etude du cas avec report

Conclusion

La somme palindromique d'un nombre à deux chiffres est un palindrome ssi $R = 1$,
La seule valeur possible de $a_0 + a_1$ est 11.
La seule somme palindromique qui est un palindrome est 121.

Etude du cas avec report

Conclusion

La somme palindromique d'un nombre à deux chiffres est un palindrome ssi $R = 1$,
La seule valeur possible de $a_0 + a_1$ est 11.
La seule somme palindromique qui est un palindrome est 121.

Exemple :

$$65 + 56 = 121 \mid 38 + 83 = 121$$

Peut-on avoir un palindrome sans report "extérieur" et des reports "internes" ?

Pas de report exterieur et report intérieur

Nous ne pouvons pas avoir de palindrome avec des reports "internes" si nous n'avons pas de reports externes.

Exemples :

$$\begin{array}{ccccc} & +1 & +1 & & \\ & 3 & 6 & 7 & 5 \\ + & 5 & 7 & 6 & 3 \\ \hline & \color{red}{9} & 4 & 3 & \color{red}{8} \end{array}$$

Peut-on avoir un palindrome sans report "extérieur" et des reports "internes" ?

Pas de report exterieur et report intérieur

Nous ne pouvons pas avoir de palindrome avec des reports "internes" si nous n'avons pas de reports externes.

Exemples :

$$\begin{array}{ccccc} & +1 & +1 & & \\ & 3 & 6 & 7 & 5 \\ + & 5 & 7 & 6 & 3 \\ \hline & \color{red}{9} & 4 & 3 & \color{red}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} +1 & +1 & +1 & & & \\ & & 4 & 6 & 7 & 5 \\ + & & 5 & 7 & 6 & 4 \\ \hline \color{blue}{1} & & 0 & 4 & 3 & \color{blue}{9} \end{array}$$

Les sommes palindromiques ne sont pas des palindromes.

Palindrome dans le cas : $a_0 + a_n \geq 10$

Conclusions

Palindrome dans le cas : $a_0 + a_n \geq 10$

Conclusions

- La somme palindromique d'un nombre ne peut être un palindrome que si la somme des chiffres équidistants des extrémités est nulle ou égale à 11.

$$a_i + a_{n-i} = 0 \text{ ou } a_i + a_{n-i} = 11, \forall n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, n\}$$

Palindrome dans le cas : $a_0 + a_n \geq 10$

Conclusions

- La somme palindromique d'un nombre ne peut être un palindrome que si la somme des chiffres équidistants des extrémités est nulle ou égale à 11.

$$a_i + a_{n-i} = 0 \text{ ou } a_i + a_{n-i} = 11, \forall n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, n\}$$

- Si la somme palindromique est un palindrome, cette somme ne peut être composée qu'au plus de 3 chiffres différents : "0", "1" et "2" (dans des configurations différentes).

Arbre d'un nombre à 8 chiffres

$a_7 + a_0$	$a_6 + a_1$	$a_5 + a_2$	$a_4 + a_3$	
$= 11$	$= 11$	$= 11$	$= 11$	$\Rightarrow 122222221$
			$= 0$	$\Rightarrow 122101221$
		$= 0$	$= 11$	$\Rightarrow 121121121$
			$= 0$	$\Rightarrow 121000121$
	$= 0$	$= 11$	$= 11$	$\Rightarrow 111222111$
			$= 0$	$\Rightarrow 111101111$
		$= 0$	$= 11$	$\Rightarrow 110121011$
			$= 0$	$\Rightarrow 110000011$

Arbre d'un nombre à 7 chiffres

$a_6 + a_0$	$a_5 + a_1$	$a_4 + a_2$	$2.a_3$	
$= 11$	$= 11$	$= 11$	$= 0$	$\Rightarrow 12211221$
		$= 0$	$= 0$	$\Rightarrow 12100121$
	$= 0$	$= 11$	$= 0$	$\Rightarrow 11111111$
		$= 0$	$= 0$	$\Rightarrow 11000011$

Méthode de construction récursive

Essayons de trouver une méthode de construction récursive dans le cas où $\forall a_i + a_{n-i} = 11$

Méthode de construction récursive

Essayons de trouver une méthode de construction récursive dans le cas où $\forall a_i + a_{n-i} = 11$

Exemple :

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 5 \\ + & & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Méthode de construction récursive

Essayons de trouver une méthode de construction récursive dans le cas où $\forall a_i + a_{n-i} = 11$

Exemple :

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 5 \\ + & & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 9 & 6 & 5 & 2 \\ + & & 2 & 5 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Méthode de construction récursive

Essayons de trouver une méthode de construction récursive dans le cas où $\forall a_i + a_{n-i} = 11$

Exemple :

$$\begin{array}{rrrr} & & 6 & 5 \\ + & & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 9 & 6 & 5 & 2 \\ + & & 2 & 5 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & 7 & 9 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ + & & 4 & 2 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

2^e méthode de construction récursive

Reprenons notre nombre de base

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 5 \\ + & & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

2^e méthode de construction récursive

Reprenons notre nombre de base

$$\begin{array}{rccc} & & 6 & 5 \\ + & & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} & & 3 & 0 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ + & & 8 & 0 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

2^e méthode de construction récursive

Reprenons notre nombre de base

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & & & & & & 6 & 5 \\ + & & & & & & 5 & 6 \\ \hline & & & & & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & 3 & 0 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ + & & 8 & 0 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} & & 4 & 0 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0 & 8 & 0 & 7 \\ + & & 7 & 0 & 8 & 0 & 5 & 6 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Somme palindromique après plusieurs itérations

Et si nous itérons jusqu'à obtenir un palindrome ?

Somme palindromique après plusieurs itérations

Et si nous itérons jusqu'à obtenir un palindrome ?

- En 6 itérations maximum pour la majorité des nombres que l'on a essayés.
  Ex : 96, 285, 486

$$486 + 684 = 1170$$
$$1170 + 711 = 1881$$

Somme palindromique après plusieurs itérations

Et si nous itérons jusqu'à obtenir un palindrome ?

- En 6 itérations maximum pour la majorité des nombres que l'on a essayés.
  Ex : 96, 285, 486

$$486 + 684 = 1170$$
$$1170 + 711 = 1881$$

$$285 + 582 = 867$$
$$867 + 768 = 1635$$
$$1635 + 5361 = 6996$$

Somme palindromique après plusieurs itérations

Et si nous itérons jusqu'à obtenir un palindrome ?

- En 6 itérations maximum pour la majorité des nombres que l'on a essayés.
  Ex : 96, 285, 486

$$486 + 684 = 1170$$
$$1170 + 711 = 1881$$

$$285 + 582 = 867$$
$$867 + 768 = 1635$$
$$1635 + 5361 = 6996$$

$$96 + 69 = 165$$
$$165 + 561 = 726$$
$$726 + 627 = 1353$$
$$1353 + 3531 = 4884$$

Somme palindromique après plusieurs itérations

- Très peu de nombres donnent un palindrome après plus de 20 itérations.

  Ex : 89

```
etape 1 nombre 89 miroir 98 somme 187 palyndrome False
etape 2 nombre 187 miroir 781 somme 968 palyndrome False
etape 3 nombre 968 miroir 869 somme 1837 palyndrome False
etape 4 nombre 1837 miroir 7381 somme 9218 palyndrome False
etape 5 nombre 9218 miroir 8129 somme 17347 palyndrome False
etape 6 nombre 17347 miroir 74371 somme 91718 palyndrome False
etape 7 nombre 91718 miroir 81719 somme 173437 palyndrome False
etape 8 nombre 173437 miroir 734371 somme 907808 palyndrome False
etape 9 nombre 907808 miroir 808709 somme 1716517 palyndrome False
etape 10 nombre 1716517 miroir 7156171 somme 8872688 palyndrome False
etape 11 nombre 8872688 miroir 8862788 somme 17735476 palyndrome False
etape 12 nombre 17735476 miroir 67453771 somme 85189247 palyndrome False
etape 13 nombre 85189247 miroir 74298158 somme 159487405 palyndrome False
etape 14 nombre 159487405 miroir 504784951 somme 664272356 palyndrome False
etape 15 nombre 664272356 miroir 653272466 somme 1317544822 palyndrome False
etape 16 nombre 1317544822 miroir 2284457131 somme 3602001953 palyndrome False
etape 17 nombre 3602001953 miroir 3591002063 somme 7193004016 palyndrome False
etape 18 nombre 7193004016 miroir 6104003917 somme 13297007933 palyndrome False
etape 19 nombre 13297007933 miroir 33970079231 somme 47267087164 palyndrome False
etape 20 nombre 47267087164 miroir 46178076274 somme 93445163438 palyndrome False
etape 21 nombre 93445163438 miroir 83436154439 somme 176881317877 palyndrome False
etape 22 nombre 176881317877 miroir 778713188671 somme 955594506548 palyndrome False
etape 23 nombre 955594506548 miroir 845605495559 somme 1801200002107 palyndrome False
etape 24 nombre 1801200002107 miroir 7012000021081 somme 8813200023188 palyndrome True
```

Somme palindromique après plusieurs itérations

- Certains ne nous donnent pas de palindromes même après plusieurs milliers d'itérations. Ces nombres sont les nombres de Lychrel.
  Ex : 196, 295, 394

Les nombres de Lychrel

Définition : Les nombres de Lychrel sont des nombres dont la somme palindromique semble ne jamais être un palindrome, quelque soit le nombre d'itérations effectuées.
Ex : 196, 295, 394...

Les nombres de Lychrel

Définition : Les nombres de Lychrel sont des nombres dont la somme palindromique semble ne jamais être un palindrome, quelque soit le nombre d'itérations effectuées.
Ex : 196, 295, 394...

- L'existence de ces nombres est une conjecture en base 10

Les nombres de Lychrel

Définition : Les nombres de Lychrel sont des nombres dont la somme palindromique semble ne jamais être un palindrome, quelque soit le nombre d'itérations effectuées.
Ex : 196, 295, 394...

- L'existence de ces nombres est une conjecture en base 10
- Mais elle est démontrée dans d'autres bases.

Nombre de Lychrel en base 2

Prenons le nombre 10110 en base 2 (22 en base 10).

Nombre de Lychrel en base 2

Prenons le nombre 10110 en base 2 (22 en base 10).

Etape 4 :	10110100
Etape 8 :	1011101000
Etape 12 :	101111010000
Etape 16 :	10111110100000
Etape 20 :	1011111101000000

Nombre de Lychrel en base 2

Prenons le nombre 10110 en base 2 (22 en base 10).

Etape 4 :	10110100
Etape 8 :	1011101000
Etape 12 :	101111010000
Etape 16 :	10111110100000
Etape 20 :	1011111101000000

Il y a une récurrence dans la structure du nombre.

Questions

- Tous les nombres de Lychrel en base 2 sont-ils soumis à un cycle de 4 étapes ?
- 10110_2 a-t-il un équivalent dans les autres bases puissance de 2 ?
- Tous les nombres de Lychrel s'indentifient-ils grâce à un cycle ? Si non, de quelles autres manières ?
- Cette méthode d'identification dépend-elle de la base ? Pourquoi ?

Remerciement

Merci pour votre écoute.

Nous remercions notre professeur de mathématiques M.Haine pour nous avoir assistés tout au long notre recherche et le chercheur de l'ULg M.Leroy pour ses suggestions.