# Le mystère de 153

Max Joseph, Tom Magnan, Cyprien Nassogne, Lucas Tombeux

Mai 2023

# Sommaire


1. Sujet de la recherche
2. Simulations
3. Critère de divisibilité par 3
4. Transformations d'un naturel
5. Évolution des transformations

# Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

# Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$
\begin{array}{lclclcl}
153 & \longrightarrow & 1^3+5^3+3^3=153 & \longrightarrow & 153 & \longrightarrow & 153 \\
3 & \longrightarrow & 3^3=27 & \longrightarrow & 2^3+7^3=351 & \longrightarrow & 153
\end{array}
$$

# Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$\begin{array}{llllllllll}
153 & \longrightarrow & 1^3+5^3+3^3=153 & \longrightarrow & 153 & & \longrightarrow & 153 \\
3 & \longrightarrow & 3^3=27 & \longrightarrow & 2^3+7^3=351 & & \longrightarrow & 153 \\
9 & \longrightarrow & 9^3=729 & \longrightarrow & 1080 & & \longrightarrow & 513 & \longrightarrow & 153
\end{array}$$

# Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$
\begin{array}{lllllllll}
153 & \longrightarrow & 1^3+5^3+3^3=153 & \longrightarrow & 153 & & \longrightarrow & 153 & \\
3 & \longrightarrow & 3^3=27 & \longrightarrow & 2^3+7^3=351 & & \longrightarrow & 153 & \\
9 & \longrightarrow & 9^3=729 & \longrightarrow & 1080 & & \longrightarrow & 513 & \longrightarrow & 153 \\
72 & \longrightarrow & 7^3+2^3=351 & \longrightarrow & 153 & & & &
\end{array}
$$

# Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$153 \longrightarrow 1^3+5^3+3^3=153 \longrightarrow 153 \longrightarrow 153$$

$$3 \longrightarrow 3^3=27 \longrightarrow 2^3+7^3=351 \longrightarrow 153$$

$$9 \longrightarrow 9^3=729 \longrightarrow 1080 \longrightarrow 513 \longrightarrow 153$$

$$72 \longrightarrow 7^3+2^3=351 \longrightarrow 153$$

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?

# Sujet de la recherche

En additionnant les cubes des chiffres qui composent un nombre, on fait l'étrange observation suivante :

$$
\begin{array}{llllllll}
153 & \longrightarrow & 1^3+5^3+3^3=153 & \longrightarrow & 153 & \longrightarrow & 153 & \\
3 & \longrightarrow & 3^3=27 & \longrightarrow & 2^3+7^3=351 & \longrightarrow & 153 & \\
9 & \longrightarrow & 9^3=729 & \longrightarrow & 1080 & \longrightarrow & 513 & \longrightarrow 153 \\
72 & \longrightarrow & 7^3+2^3=351 & \longrightarrow & 153 & & &
\end{array}
$$

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?
- Sinon atteint-on toujours une valeur stable ? Laquelle ?

# Simulations pour les nombres de 1 à 15

## Transformations successives en colonnes

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

# Simulations pour les nombres de 1 à 15

## Transformations successives en colonnes

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 512 | | | | | | | | | | | | | |
| … | 134 | | | | | | | | | | | | | |
| | 92 | | | | | | | | | | | | | |
| | 737 | | | | | | | | | | | | | |
| | 713 | | | | | | | | | | | | | |
| | 371 | | | | | | | | | | | | | |
| | 371 | | | | | | | | | | | | | |
| | … | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

# Simulations pour les nombres de 1 à 15

## Transformations successives en colonnes

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 27 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 512 | 351 | | | | | | | | | | | | |
| ... | 134 | 153 | | | | | | | | | | | | |
| | 92 | 153 | | | | | | | | | | | | |
| | 737 | ... | | | | | | | | | | | | |
| | 713 | | | | | | | | | | | | | |
| | 371 | | | | | | | | | | | | | |
| | 371 | | | | | | | | | | | | | |
| | ... | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

## Transformations successives en colonnes

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| ... | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | ... | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | ... | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | ... | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | ... | ... | 371 | 1458 |
| | 371 | | ... | ... | 702 | ... | ... | | | 371 | | | ... | 702 |
| | ... | | | | 351 | | | | | 371 | | | | 351 |
| | | | | | 153 | | | | | ... | | | | 153 |
| | | | | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | ... | | | | | | | | | ... |

# Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

| | | ⇓ | | | ⇓ | | | ⇓ | | | ⇓ | | | ⇓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| … | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | … | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | … | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | … | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | … | … | 371 | 1458 |
| | 371 | | … | … | 702 | … | … | | | 371 | | | … | 702 |
| | … | | | | 351 | | | | | 371 | | | | 351 |
| | | | | | 153 | | | | | … | | | | 153 |
| | | | | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | … | | | | | | | | | … |

# Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

| | | $\Downarrow$ | | | $\Downarrow$ | | | $\Downarrow$ | | | $\Downarrow$ | | | $\Downarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| … | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | … | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | … | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | … | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | … | … | 371 | 1458 |
| | 371 | | … | … | 702 | … | … | | | 371 | | | … | 702 |
| | … | | | | 351 | | | | | 371 | | | | 351 |
| | | | | | 153 | | | | | … | | | | 153 |
| | | | | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | … | | | | | | | | | … |

Multiple de 3 $\longrightarrow$ multiple de 3 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 153

# Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

| | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| … | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | … | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | … | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | … | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | … | … | 371 | 1458 |
| | 371 | | … | … | 702 | … | … | | | 371 | | | … | 702 |
| | … | | | | 351 | | | | | 371 | | | | 351 |
| | | | | | 153 | | | | | … | | | | 153 |
| | | | | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | … | | | | | | | | | … |

# Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

| 1 | ⇓ 2 | ⇓ 3 | 4 | ⇓ 5 | ⇓ 6 | 7 | ⇓ 8 | ⇓ 9 | 10 | ⇓ 11 | ⇓ 12 | 13 | ⇓ 14 | ⇓ 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| … | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | … | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | … | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | … | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | … | … | 371 | 1458 |
| | 371 | | … | … | 702 | … | … | | | 371 | | | … | 702 |
| | … | | | | 351 | | | | | 371 | | | | 351 |
| | | | | | 153 | | | | | … | | | | 153 |
| | | | | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | … | | | | | | | | | … |

Multiple de 3 +2 ⟶ multiple de 3 +2 ⟶ ⋯ ⟶ 371

# Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

| ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| ... | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | ... | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | ... | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | ... | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | ... | 55 | 371 | 1458 |
| | 371 | | 55 | ... | 702 | ... | ... | | | 371 | | 250 | ... | 702 |
| | ... | | 250 | | 351 | | | | | 371 | | 133 | | 351 |
| | | | 133 | | 153 | | | | | ... | | ... | | 153 |
| | | | ... | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | ... | | | | | | | | | ... |

# Simulations et observations pour les nombres de 1 à 15

| ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ | ⇓ | | ⇓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 21 | 343 | 512 | 729 | 1 | 2 | 9 | 28 | 65 | 126 |
| 1 | 512 | 351 | 280 | 134 | 225 | 118 | 134 | 1080 | 1 | 8 | 729 | 520 | 341 | 225 |
| … | 134 | 153 | 520 | 92 | 141 | 514 | 92 | 513 | … | 512 | 1080 | 133 | 92 | 141 |
| | 92 | 153 | 133 | 737 | 66 | 190 | 737 | 153 | | 134 | 513 | 55 | 737 | 66 |
| | 737 | … | 55 | 713 | 432 | 730 | 713 | 153 | | 92 | 153 | 250 | 713 | 432 |
| | 713 | | 250 | 371 | 99 | 370 | 371 | … | | 737 | 153 | 133 | 371 | 99 |
| | 371 | | 133 | 371 | 1458 | 370 | 371 | | | 713 | … | 55 | 371 | 1458 |
| | 371 | | 55 | … | 702 | … | … | | | 371 | | 250 | … | 702 |
| | … | | 250 | | 351 | | | | | 371 | | 133 | | 351 |
| | | | 133 | | 153 | | | | | … | | … | | 153 |
| | | | … | | 153 | | | | | | | | | 153 |
| | | | | | … | | | | | | | | | … |

$$\text{Multiple de } 3 + 1 \longrightarrow \text{multiple de } 3 + 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} 1 \\ 370 \\ (133, 55, 250) \end{cases}$$

**Extension des simulations**

Multiple de 3 $\longrightarrow$ multiple de 3 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 153

Multiple de 3 + 2 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 2 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} 371 \\ 407 \end{cases}$

**Extension des simulations**

Multiple de 3 $\longrightarrow$ multiple de 3 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 153

Multiple de 3 + 2 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 2 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} 371 \\ 407 \end{cases}$

Multiple de 3 + 1 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 1 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} 1, 370 \\ (133, 55, 250) \\ (217, 352, 160) \\ (244, 136) \\ (1459, 919) \end{cases}$

| 98 | 4 | 16 | 136 | 49 |
|---|---|---|---|---|
| 1241 | 64 | 217 | 244 | 793 |
| 74 | 280 | 352 | 136 | 1099 |
| 407 | 520 | 160 | 244 | 1459 |
| ... | 133 | 217 | ... | 919 |
| | 55 | ... | | 1459 |
| | 250 | | | ... |
| | 133 | | | |

# Premières conclusions suite aux simulations

## Donc revenons-en à nos questions du début

- Est-ce un hasard ?

### Donc revenons-en à nos questions du début

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?

# Premières conclusions suite aux simulations

## Donc revenons-en à nos questions du début

- Est-ce un hasard ?
- Atteint-on toujours la valeur 153 en itérant ce processus?
- Sinon atteint-on toujours une valeur stable ? Laquelle ?

# Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

| Nombre | Somme des chiffres |
|---|---|

# Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

| Nombre | Somme des chiffres |
|---|---|
| $153 = 3 \cdot 51 + 0$ | $1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$ |

# Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

| Nombre | Somme des chiffres |
|---|---|
| $153 = 3 \cdot 51 + 0$ | $1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$ |
| $16 = 3 \cdot 5 + 1$ | $1 + 6 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$ |

# Critère de divisibilité

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

| Nombre | Somme des chiffres |
|---|---|
| $153 = 3 \cdot 51 + 0$ | $1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$ |
| $16 = 3 \cdot 5 + 1$ | $1 + 6 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$ |
| $23 = 3 \cdot 7 + 2$ | $2 + 3 = 5 = 3 \cdot 1 + 2$ |

# Critère de divisibilité

Un nombre est divisible par 3
si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples

| Nombre | Somme des chiffres |
|---|---|
| $153 = 3 \cdot 51 + 0$ | $1 + 5 + 3 = 9 = 3 \cdot 3 + 0$ |
| $16 = 3 \cdot 5 + 1$ | $1 + 6 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$ |
| $23 = 3 \cdot 7 + 2$ | $2 + 3 = 5 = 3 \cdot 1 + 2$ |

## Généralisation du critère de divisibilité par 3

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

# Notion de base

On note un nombre à 3 chiffres $\overline{cdu}$
où

- c = nombre des centaines
- d = nombre des dizaines
- u = nombre des unités

**Exemple**

$\overline{cdu} = 153$

- $c = 1$
- $d = 5$
- $u = 3$

# Conservation du reste

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c+d+u=3k+{\color{red}r}$ où ${\color{red}r} \in \{0,1,2\}, k \in \mathbb{N}$

# Conservation du reste

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c+d+u=3k+r$ où $r \in \{0,1,2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\overline{cdu} = 100c + 10d + u \quad = 99c + 9d + (c + d + u)$$

# Conservation du reste

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\overline{cdu} = 100c + 10d + u \quad = 99c + 9d + (c + d + u)$$
$$= 99c + 9d + 3k + r$$

# Conservation du reste

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0,1,2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\overline{cdu} = 100c + 10d + u \quad \begin{aligned} &= 99c + 9d + (c + d + u) \\ &= 99c + 9d + 3k + r \\ &= 3\,(33c + 3d + k) + r \end{aligned}$$

# Conservation du reste

Le reste de la division d'un nombre naturel par 3
est égal au reste de la division de la somme de ses chiffres par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 3 chiffres.

- Hypothèse : $c + d + u = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}, k \in \mathbb{N}$
- Thèse : il existe $n \in \mathbb{N} : \overline{cdu} = 3n + r$
- Démonstration :

$$\begin{aligned}\overline{cdu} = 100c + 10d + u \quad &= 99c + 9d + (c + d + u)\\ &= 99c + 9d + 3k + r\\ &= 3\,(33c + 3d + k) + r\\ &= 3n + r\end{aligned}$$

# Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

# Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Exemples :

$$\begin{array}{ccl} 21 & \longrightarrow & T(21) = 2^3 + 1^3 = 9 \\ 25 & \longrightarrow & T(25) = 2^3 + 5^3 = 133 \\ 14 & \longrightarrow & T(14) = 1^3 + 4^3 = 65 \end{array}$$

# Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Exemples :

$$\begin{array}{ccc} 21 & \longrightarrow & T(21) = 2^3 + 1^3 = 9 \\ 25 & \longrightarrow & T(25) = 2^3 + 5^3 = 133 \\ 14 & \longrightarrow & T(14) = 1^3 + 4^3 = 65 \end{array}$$

Observations :

- Multiple de 3 + 0 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 0
- Multiple de 3 + 1 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 1
- Multiple de 3 + 2 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 2

# Transformations d'un naturel

Pour un nombre à 2 chiffres : $\overline{du} \longrightarrow T(\overline{du}) = d^3 + u^3$

Exemples :

$$\begin{array}{lcl} 21 & \longrightarrow & T(21) = 2^3 + 1^3 = 9 \\ 25 & \longrightarrow & T(25) = 2^3 + 5^3 = 133 \\ 14 & \longrightarrow & T(14) = 1^3 + 4^3 = 65 \end{array}$$

Observations :

- Multiple de 3 + 0 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 0
- Multiple de 3 + 1 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 1
- Multiple de 3 + 2 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 2

Question :

Si $\overline{du}$ est multiple de $3 + r$, $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est-il multiple de 3 $+ r$ ?

# Étude de la transformée d'un naturel

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

# Étude de la transformée d'un naturel

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 2 chiffres.

# Étude de la transformée d'un naturel

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 2 chiffres.

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

Effectuons la démonstration pour un nombre à 2 chiffres.

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de 3 $+ r$.

# Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de 3 $+ r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d+u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

# Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de 3 $+r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d+u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$d^3 + u^3 \quad = (d+u)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right)$$

# Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de 3 $+r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$\begin{aligned} d^3 + u^3 &= (d + u)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right) \\ &= (3k' + r)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right) \end{aligned}$$

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de 3 $+r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d+u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$\begin{aligned} d^3 + u^3 &= (d+u)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right) \\ &= (3k' + r)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right) \\ &= 3 \cdot 9k'^3 + r^3 + 3 \cdot 9k'^2 r + 3 \cdot 3k' r^2 - 3\left(d^2u + du^2\right) \end{aligned}$$

# Étude de la transformée d'un naturel

Hypothèse : $\overline{du} = 3k + r$ avec $k$ entier et $r \in \{0, 1, 2\}$

Thèse : $T(\overline{du}) = d^3 + u^3$ est un multiple de 3 $+r$.

Démonstration : On sait que $d + u = 3k' + r$ et

$$(d+u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Donc

$$\begin{aligned} d^3 + u^3 &= (d+u)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right) \\ &= (3k' + r)^3 - 3\left(d^2u + du^2\right) \\ &= 3 \cdot 9k'^3 + r^3 + 3 \cdot 9k'^2 r + 3 \cdot 3k' r^2 - 3\left(d^2u + du^2\right) \\ &= 3\left(9k'^3 + 9k'^2 r + 3k' r^2 - d^2u - du^2\right) + r^3 \end{aligned}$$

D'où $d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec $n$ entier.

# Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec $n$ entier.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 0, on a $r = 0$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.

# Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec $n$ entier.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 0, on a $r = 0$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 1, on a $r = 1$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de 3 + 1

# Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec $n$ entier.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 0, on a $r = 0$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 1, on a $r = 1$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de 3 + 1

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 2, on a $r = 2$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 2^3 = 3(n+2) + 2$ est un multiple de 3 + 2.

# Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec $n$ entier.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 0, on a $r = 0$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 1, on a $r = 1$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de 3 + 1

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 2, on a $r = 2$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 2^3 = 3(n+2) + 2$ est un multiple de 3 + 2.

Dans les 3 cas, on vérifie que $d^3 + u^3$ est multiple de 3 $+r$.

# Étude de la transformée d'un naturel

$d^3 + u^3$ s'écrit sous la forme $3n + r^3$ avec $n$ entier.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 0, on a $r = 0$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 0^3$ est un multiple de 3.

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 1, on a $r = 1$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 1^3$ est un multiple de 3 + 1

- Si le reste de la division de $\overline{du}$ par 3 vaut 2, on a $r = 2$ :
  $d^3 + u^3 = 3n + 2^3 = 3(n+2) + 2$ est un multiple de 3 + 2.

Dans les 3 cas, on vérifie que $d^3 + u^3$ est multiple de 3 $+r$.

Le reste de la division d'un naturel par 3 est égal au reste de la division de sa transformée par 3.

# Conclusion

Donc

- Multiple de 3 + 0 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 0
- Multiple de 3 + 1 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 1
- Multiple de 3 + 2 $\longrightarrow$ multiple de 3 + 2

**Donc**

on ne peut obtenir 153 que si le nombre initial est un multiple de 3.

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153
- Toujours un cycle

  5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407

  2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459,919)

  2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153
- Toujours un cycle

  5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407

  2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459,919)

  2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153
- Toujours un cycle

  5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407

  2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459,919)

  2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153
- Toujours un cycle

  5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407

  2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459,919)

  2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?
- A-t-on d'autres cycles ?

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153
- Toujours un cycle
  5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
  2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459,919)
  2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?
- A-t-on d'autres cycles ?
- Si oui, quelle est sa longueur maximale ?

# Bilan intermédiaire

Observations pour les nombres de 1 à 99 999 :

- Multiple de 3 $\longrightarrow$ 153
- Toujours un cycle
  5 cycles de longueur 1 = 1, 153, 370, 371 et 407
  2 cycles de longueur 2 = (136, 244) et (1459,919)
  2 cycles de longueur 3 = (133, 55, 250) et (217, 352, 160)

Pour les nombres au-delà de 99 999 :

- A-t-on toujours un cycle ?
- A-t-on d'autres cycles ?
- Si oui, quelle est sa longueur maximale ?
- Quel est le nombre maximum d'itérations avant de débuter le cycle ?

# Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

Comment évolue le nombre de chiffres au fil des transformations ?

| Nb de chiffres du nb initial | Transformée maximale | Nb max de chiffres de la transformée |
|---|---|---|
| 1 | $9 \longrightarrow 9^3 = 729$ | 3 |
| 2 | $99 \longrightarrow 2 \cdot 9^3 = 1458$ | 4 |
| 3 | $999 \longrightarrow 3 \cdot 9^3 = 2187$ | 4 |
| 4 | $9999 \longrightarrow 4 \cdot 9^3 = 2916$ | 4 |
| 13 | $9 \cdots 9 \longrightarrow 13 \cdot 9^3 = 9477$ | 4 |
| 14 | $9 \cdots 9 \longrightarrow 14 \cdot 9^3 = 10206$ | 5 |

# Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

## Conjectures

- Tout nombre à 5 chiffres ou plus se transforme en un nombre plus petit.

# Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

## Conjectures

- Tout nombre à 5 chiffres ou plus se transforme en un nombre plus petit.
- Tout nombre va se transformer en un nombre de $[1, 9\,999]$ au bout d'un certain nombre d'itérations.

# Évolution du nombre de chiffres au cours des transformations

## Conjectures

- Tout nombre à 5 chiffres ou plus se transforme en un nombre plus petit.
- Tout nombre va se transformer en un nombre de $[1, 9\,999]$ au bout d'un certain nombre d'itérations.
- Il n'y a pas d'autres valeurs, ni cycles que ceux trouvés lors des simulations.

# Prolongements

Quand commence un cycle ?

Observations à partir de simulations :

$$9477 \longrightarrow 1479 \longrightarrow 1137 \longrightarrow 372 \longrightarrow 378 \longrightarrow 882 \longrightarrow 1032 \longrightarrow 36 \longrightarrow 243$$

$$\longrightarrow 99 \longrightarrow 1458 \longrightarrow 702 \longrightarrow 351 \longrightarrow 153$$

| Nombre initial | Cycle après |
|---|---|
| $n < 10^4$ | 13 transformations au maximum |
| $10^4 \leq n < 10^{13}$ | 14 transformations au maximum |
| $10^{14} \leq n < 10^{137}$ | 15 transformations au maximum |
| $\dots$ | |

Nombre de transformations avant un cycle : croissance très lente

# Prolongements

Et si on calculait la somme des carrés des chiffres d'un nombre ?

# Fin et remerciements

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

MERCI
à Julien Leroy de l'Université de Liège,
à l'équipe Math en Jeans.