

Rebonds en chaîne

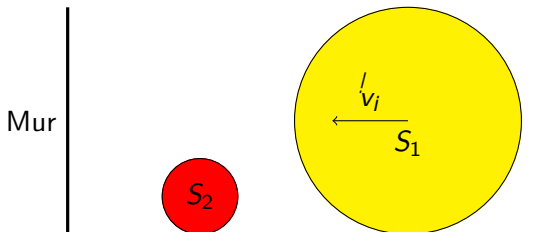
J. Arias Luna et G. Gielen

August 30, 2023

- 1 Présentation du sujet
- 2 Quelques rappels de physique
- 3 Etude phase par phase
- 4 Etude de la suite des vitesses
- 5 Solution

Schéma

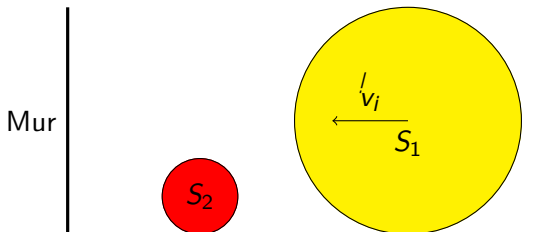
Une petite sphère, initialement au repos, est située entre un mur et une grande sphère en MRU en direction du mur.



Schéma

Une petite sphère, initialement au repos, est située entre un mur et une grande sphère en MRU en direction du mur.

Problématique : combien de chocs y aura-t-il en fonction de la répartition des masses ?



Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères S_1 et S_2

Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères S_1 et S_2

- se déplacent selon une droite horizontale.

Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères S_1 et S_2

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.

Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères S_1 et S_2

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.
- respectent les principes des chocs élastiques lorsqu'elles entrent en collision entre elles et avec le mur.

Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères S_1 et S_2

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.
- respectent les principes des chocs élastiques lorsqu'elles entrent en collision entre elles et avec le mur.
- ont des masses m_1 et m_2 respectivement avec $m_1 > m_2$.

Contexte

Nous considérons dans ce travail que les sphères S_1 et S_2

- se déplacent selon une droite horizontale.
- se déplacent sans frottement avec le sol.
- respectent les principes des chocs élastiques lorsqu'elles entrent en collision entre elles et avec le mur.
- ont des masses m_1 et m_2 respectivement avec $m_1 > m_2$.
- ont des vitesses positives en se déplaçant vers le mur et négatives dans le cas inverse.

L'énergie cinétique

L'*énergie cinétique* E_k d'un corps de masse m et se déplaçant à la vitesse v est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Quantité de mouvement

La *quantité de mouvement* p d'un corps est le produit de sa masse m par sa vitesse \vec{v} . On a :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Choc élastique

Dans un *choc élastique*, il y a conservation

- de la quantité de mouvement totale $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
- et de l'énergie cinétique totale $E_k = E_{k1} + E_{k2}$

du système à tout instant.

Choc élastique

Dans un *choc élastique*, il y a conservation

- de la quantité de mouvement totale $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
- et de l'énergie cinétique totale $E_k = E_{k1} + E_{k2}$

du système à tout instant.

$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \end{cases}$$

Choc élastique

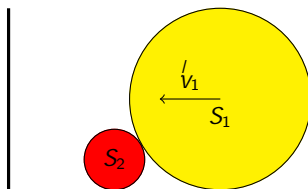
$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \end{cases}$$

Choc élastique

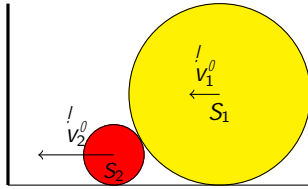
$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ E_{k1i} + E_{k2i} = E_{k1f} + E_{k2f} \end{cases}$$

En tenant compte du sens de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans le signe de v_1 et v_2 , on a

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^{02}}{2} + \frac{m_2 v_2^{02}}{2} \end{cases}$$



Avant le choc



Après le choc

Calcul des vitesses résultantes

Pour trouver les vitesses v_1^0 et v_2^0 des sphères après un choc élastique, il faut résoudre :

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^{02}}{2} + \frac{m_2 v_2^{02}}{2} \end{cases}$$

Calcul des vitesses résultantes

Pour trouver les vitesses v_1^0 et v_2^0 des sphères après un choc élastique, il faut résoudre :

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^{02}}{2} + \frac{m_2 v_2^{02}}{2} \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} v_1^0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_2^0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

Rapport des masses

Posons $k = \frac{m_1}{m_2}$, c'ad k est le *rapport des masses*.

Comme $m_1 > m_2$, $k > 1$.

Après introduction de k , les solutions

Rapport des masses

Posons $k = \frac{m_1}{m_2}$, c'à d k est le *rapport des masses*.

Comme $m_1 > m_2$, $k > 1$.

Après introduction de k , les solutions

$$\begin{cases} v_1^{\ell} = \frac{k m_2}{k m_2 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{k m_2 + m_2} v_2 \\ v_2^{\ell} = \frac{2k m_2}{k m_2 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{k m_2 + m_2} v_2 \end{cases}$$

Rapport des masses

Posons $k = \frac{m_1}{m_2}$, c'à d k est le *rapport des masses*.

Comme $m_1 > m_2$, $k > 1$.

Après introduction de k , les solutions

$$\begin{cases} v_1^o = \frac{k}{k} \frac{m_2}{m_2 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{k} \frac{m_2}{m_2 + m_2} v_2 \\ v_2^o = \frac{2k}{k} \frac{m_2}{m_2 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{k} \frac{m_2}{m_2 + m_2} v_2 \end{cases}$$

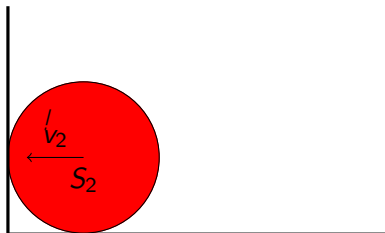
deviennent

$$\begin{cases} v_1^o = \frac{k}{k+1} v_1 + \frac{2}{k+1} v_2 \\ v_2^o = \frac{2k}{k+1} v_1 + \frac{1}{k+1} v_2 \end{cases} \quad (1)$$

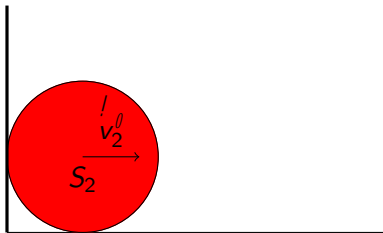
Choc élastique de S_2 avec le mur

Etudions uniquement le choc résultant de la collision entre S_2 et le mur et considérons que celui-ci est élastique.

$$) \quad v_2 = v_2^0$$



avant le choc



après le choc

Vitesses résultantes après le premier choc

Comme, au départ, $v_2 = 0$ et $v_1 = v_i$, on obtient

$$\begin{cases} v_1^0 = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2^0 = \frac{2k}{k+1} v_i \end{cases}$$

Décomposition du mouvement en phases

Définition des phases

Décomposition du mouvement en phases

Définition des phases

- Nommons la phase initiale P_0 , phase qui a lieu lors de la première collision entre S_1 et S_2 .

Décomposition du mouvement en phases

Définition des phases

- Nommons la phase initiale P_0 , phase qui a lieu lors de la première collision entre S_1 et S_2 .
- Le choc suivant entre les deux sphères entame la phase suivante P_1

Décomposition du mouvement en phases

Définition des phases

- Nommons la phase initiale P_0 , phase qui a lieu lors de la première collision entre S_1 et S_2 .
- Le choc suivant entre les deux sphères entame la phase suivante P_1
- La phase P_n caractérise donc l'état du mouvement entre le $n + 1^e$ choc et le suivant.

Décomposition du mouvement en phases

Définition des phases

- Nommons la phase initiale P_0 , phase qui a lieu lors de la première collision entre S_1 et S_2 .
- Le choc suivant entre les deux sphères entame la phase suivante P_1
- La phase P_n caractérise donc l'état du mouvement entre le $n + 1^e$ choc et le suivant.
- Soient $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$ les vitesses respectives de S_1 et S_2 associées à la phase n .

Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{array} \right. \quad (2)$$

Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{array} \right. \quad (2)$$

Nous remarquons que:

Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

- les vitesses ne dépendent que du rapport des masses k pour une vitesse v_i donnée.

Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

- les vitesses ne dépendent que du rapport des masses k pour une vitesse v_i donnée.
- Les vitesses sont positives. Les deux solides se dirigent donc vers le mur.

Vitesses lors de la phase initiale

Avec ces notations, nous avons donc

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{cases} \quad (2)$$

Nous remarquons que:

- les vitesses ne dépendent que du rapport des masses k pour une vitesse v_i donnée.
- Les vitesses sont positives. Les deux solides se dirigent donc vers le mur.
- $v_2 > v_1$: S_2 va plus vite que S_1 . Le choc suivant aura lieu quand S_2 aura rebondi sur le mur.

Vitesses résultantes après le 2eme choc entre les sphères

Pour le deuxième choc (P_1), S_2 a une vitesse $v_2(P_0) < 0$. En tenant compte de ce changement on a :

Vitesses résultantes après le 2eme choc entre les sphères

Pour le deuxième choc (P_1), S_2 a une vitesse $v_2(P_0) < 0$. En tenant compte de ce changement on a :

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{k}{k+1} v_1(P_0) + \frac{2}{k+1} v_2(P_0) \\ v_2(P_1) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_0) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_0) \end{cases}$$

Vitesses résultantes après le 2eme choc entre les sphères

Pour le deuxième choc (P_1), S_2 a une vitesse $v_2(P_0) < 0$. En tenant compte de ce changement on a :

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{k}{k+1} v_1(P_0) + \frac{2}{k+1} v_2(P_0) \\ v_2(P_1) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_0) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_0) \end{cases}$$

$$, \begin{cases} v_1(P_1) = \frac{k^2 - 6k + 1}{(k+1)^2} v_i \\ v_2(P_1) = \frac{4k - (k-1)}{(k+1)^2} v_i > 0 \end{cases}$$

Etude du mouvement de S_1 après le 2eme choc

En factorisant $v_1(P_1)$, on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2^{\rho_-} / 2)) \overbrace{(k - (3 - 2^{\rho_-} / 2))}^{>0}}{(k + 1)^2} v_i$$

Etude du mouvement de S_1 après le 2eme choc

En factorisant $v_1(P_1)$, on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2^{\rho_2^-})) \overbrace{(k - (3 - 2^{\rho_2^-}))}^{>0}}{(k + 1)^2} v_i$$

Comme $k > 1$, il y a trois cas pour la phase P_2 :

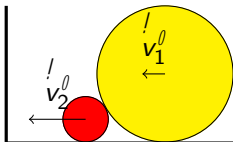
Etude du mouvement de S_1 après le 2eme choc

En factorisant $v_1(P_1)$, on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2^{\rho_2^-})) \overbrace{(k - (3 - 2^{\rho_2^-}))}^{>0}}{(k + 1)^2} v_i$$

Comme $k > 1$, il y a trois cas pour la phase P_2 :

- $k > 3 + 2^{\rho_2^-}$, $v_1(P_1) > 0$ et S_1 continue vers le mur.



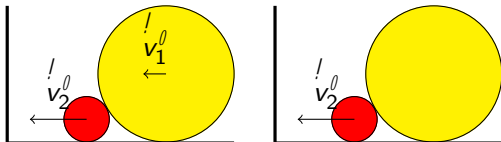
Etude du mouvement de S_1 après le 2eme choc

En factorisant $v_1(P_1)$, on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2})) \overbrace{(k - (3 - 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} v_i$$

Comme $k > 1$, il y a trois cas pour la phase P_2 :

- $k > 3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}$, $v_1(P_1) > 0$ et S_1 continue vers le mur.
- $k = 3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}$, S_1 s'immobilise.



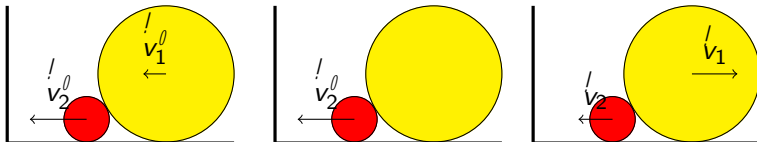
Etude du mouvement de S_1 après le 2eme choc

En factorisant $v_1(P_1)$, on a :

$$v_1(P_1) = \frac{(k - (3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2})) \overbrace{(k - (3 - 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}))}^{>0}}{(k + 1)^2} v_i$$

Comme $k > 1$, il y a trois cas pour la phase P_2 :

- $k > 3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}$, $v_1(P_1) > 0$ et S_1 continue vers le mur.
- $k = 3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}$, S_1 s'immobilise.
- $1 < k < 3 + 2^{\rho_-} \frac{\rho_-}{2}$, $v_1(P_1) < 0$ et S_1 s'éloigne du mur.



S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si $jv_2j > jv_1j$.

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si $jv_2j > jv_1j$.

$(jv_2(P_1)j > jv_1(P_1)j > 0)$ S_2 rejoint S_1 ,

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si $jv_2j > jv_1j$.

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j > 0$) S_2 rejoint S_1 ,

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j = 0$) S_2 et S_1 ont la même vitesse,

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si $jv_2j > jv_1j$.

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j > 0$) S_2 rejoint S_1 ,

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j = 0$) S_2 et S_1 ont la même vitesse,

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j < 0$) S_1 s'éloigne plus vite que S_2 . Il n'y aura plus de choc dans les deux derniers cas !

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si $jv_2j > jv_1j$.

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j > 0$) S_2 rejoint S_1 ,

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j = 0$) S_2 et S_1 ont la même vitesse,

$jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j < 0$) S_1 s'éloigne plus vite que S_2 . Il n'y aura plus de choc dans les deux derniers cas !

On doit donc établir le signe de la fonction

$$f(k) = jv_2(P_1)j \quad jv_1(P_1)j$$

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

Dans les deux premiers cas, il y aura encore un choc. Dans le dernier cas, il n'y aura encore un choc que si $|jv_2| > |jv_1|$.

$|jv_2(P_1)| > |jv_1(P_1)| > 0$) S_2 rejoint S_1 ,

$|jv_2(P_1)| = |jv_1(P_1)| = 0$) S_2 et S_1 ont la même vitesse,

$|jv_2(P_1)| < |jv_1(P_1)| < 0$) S_1 s'éloigne plus vite que S_2 . Il n'y aura plus de choc dans les deux derniers cas !

On doit donc établir le signe de la fonction

$$f(k) = |jv_2(P_1)| - |jv_1(P_1)|$$

càd

$$f(k) = \frac{4k(k-1) + k^2 - 6k + 1}{(k+1)^2} = \frac{(k - \frac{5+2\sqrt{5}}{5})(k - \frac{5+2\sqrt{5}}{5})}{(k+1)^2}$$

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_{\bar{5}}}}{5} \right)}^{>0}}{(k+1)^2} \left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_{\bar{5}}}}{5} \right)$$

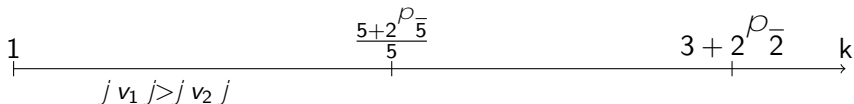
les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_5}}{5} \right)}^{>0}}{(k+1)^2} \left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_5}}{5} \right)$$

les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

$$1 < k < \frac{5 + 2^{\rho_5}}{5} \quad) \quad S_1 \text{ s'éloigne du mur plus vite que } S_2.$$



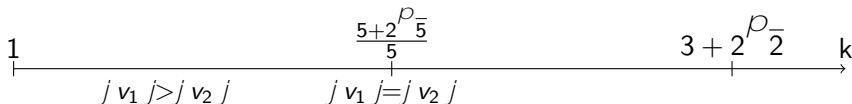
S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_5}}{5} \right)}^{>0}}{(k+1)^2} \left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_5}}{5} \right)$$

les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

$1 < k < \frac{5+2^{\rho_5}}{5}$) S_1 s'éloigne du mur plus vite que S_2 .

$k = \frac{5+2^{\rho_5}}{5}$) S_2 et S_1 ont des vitesses égales,



S_2 rejoint-il S_1 lorsque $v_1(P_1) < 0$?

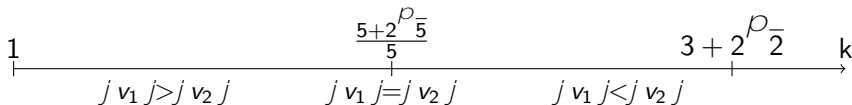
$$\text{Comme } f(k) = \frac{\overbrace{\left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_{\bar{5}}}}{5} \right)}^{>0}}{(k+1)^2} \left(k \quad \frac{5 + 2^{\rho_{\bar{5}}}}{5} \right)$$

les trois cas vus précédemment correspondent aux cas suivants :

$1 < k < \frac{5+2^{\rho_{\bar{5}}}}{5}$) S_1 s'éloigne du mur plus vite que S_2 .

$k = \frac{5+2^{\rho_{\bar{5}}}}{5}$) S_2 et S_1 ont des vitesses égales,

$\frac{5+2^{\rho_{\bar{5}}}}{5} < k < 3 + 2^{\rho_{\bar{2}}}$) S_2 rejoint S_1



Limite du procédé " pas à pas "

L'étude menée pour les deux premiers chocs pourrait être poursuivie pour savoir dans quelle(s) condition(s) il y aurait un 3e choc, puis un 4e etc.

Mais les calculs vont devenir de plus en plus lourds.

) On va donc changer de méthode.

Généralisation de la formule d'itération

Quelle que soit la phase, la formule de récurrence est inchangée :

$8n \geq N_0$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{k-1}{k+1} v_1(P_{n-1}) + \frac{2}{k+1} v_2(P_{n-1}) \\ v_2(P_n) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_{n-1}) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

Généralisation de la formule d'itération

Quelle que soit la phase, la formule de récurrence est inchangée :

$8n \geq N_0$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{k-1}{k+1} v_1(P_{n-1}) + \frac{2}{k+1} v_2(P_{n-1}) \\ v_2(P_n) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_{n-1}) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

Est-il possible de déterminer la formule qui donne le terme général $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$ en fonction de k et de v_i ?

Premiers termes de la suite en fonction de v_i et k

Regardons les expressions de v_1 et de v_2 aux phases
 P_1 , P_2 et P_3

Premiers termes de la suite en fonction de v_i et k

Regardons les expressions de v_1 et de v_2 aux phases P_1 , P_2 et P_3

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 + 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 + 4k) \end{cases}$$

Premiers termes de la suite en fonction de v_i et k

Regardons les expressions de v_1 et de v_2 aux phases P_1 , P_2 et P_3

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 + 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 + 4k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (k^3 + 15k^2 + 15k + 1) \\ v_2(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (6k^3 + 20k^2 + 6k) \end{cases}$$

Premiers termes de la suite en fonction de v_i et k

Regardons les expressions de v_1 et de v_2 aux phases P_1 , P_2 et P_3

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 - 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 - 4k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (k^3 - 15k^2 + 15k - 1) \\ v_2(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (6k^3 - 20k^2 + 6k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (k^4 - 28k^3 + 70k^2 - 28k + 1) \\ v_2(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (8k^4 - 56k^3 + 56k^2 - 8k) \end{cases}$$

Premiers termes de la suite en fonction de v_i et k

Regardons les expressions de v_1 et de v_2 aux phases P_1 , P_2 et P_3

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (k^2 - 6k + 1) \\ v_2(P_1) = \frac{v_i}{(k+1)^2} (4k^2 - 4k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (k^3 - 15k^2 + 15k - 1) \\ v_2(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} (6k^3 - 20k^2 + 6k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (k^4 - 28k^3 + 70k^2 - 28k + 1) \\ v_2(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} (8k^4 - 56k^3 + 56k^2 - 8k) \end{cases}$$

On remarque que des motifs se répètent (puissance, signe...), et que les coefficients sont ceux du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

	p								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Terme général de la suite des vitesses en fonction de v_i et k

On a, dans un premier temps, "pressenti" la formule donnant le terme général $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$ en fonction du rapport des masses :

Terme général de la suite des vitesses en fonction de v_i et k

On a, dans un premier temps, "pressenti" la formule donnant le terme général $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$ en fonction du rapport des masses : $8n \geq N$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ v_2(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \end{cases} \quad (4)$$

Ces expressions nous permettent de voir que les numérateurs de $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$ sont tous deux des polynômes de degré $n+1$ en k .

Démonstration par récurrence (cas de base)

Démontrons par récurrence la formule précédente. Le cas de base est $n = 0$.

Démonstration par récurrence (cas de base)

Démontrons par récurrence la formule précédente. Le cas de base est $n = 0$.

$$\text{Pour } v_1(P_0) : \frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^{0+1} C_{2^p}^{2^p} (1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} (k-1)$$

Démonstration par récurrence (cas de base)

Démontrons par récurrence la formule précédente. Le cas de base est $n = 0$.

$$\text{Pour } v_1(P_0) : \frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^{0+1} C_{2^p}^{2^p} (1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} (k-1)$$

$$\text{Pour } v_2(P_0) : \frac{v_i}{(k+1)^{0+1}} \sum_{p=0}^0 C_{2^p}^{2^p+1} (1)^p k^{0+1-p} = \frac{v_i}{k+1} 2k$$

Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

80 $p \leq n + 1, n \in \mathbb{N}$:

$$C_{2n+2}^{2p} + 2 C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}$$

Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

80 $p \leq n + 1, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_{2n+2}^{2p} + 2 C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ = (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \end{aligned}$$

Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

Soit $p \leq n+1, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_{2n+2}^{2p} + 2 C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \\ &= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1} \end{aligned}$$

Identité dans le triangle de Pascal

L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

Soit $p \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} C_{2n+2}^{2p} + 2 C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \\ &= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1} \\ &= C_{2n+4}^{2p} \end{aligned}$$

Identité dans le triangle de Pascal

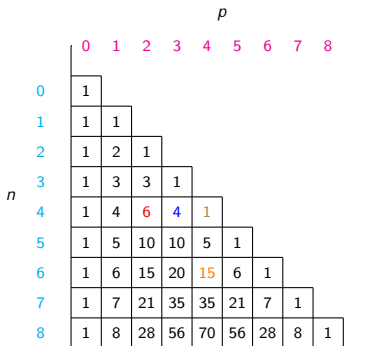
L'identité suivante sera nécessaire. Elle est démontrée grâce à la formule du triangle de Pascal.

Soit $p, n+1, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_{2n+2}^{2p} + 2 C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2} \\ &= (C_{2n+2}^{2p} + C_{2n+2}^{2p-1}) + (C_{2n+2}^{2p-1} + C_{2n+2}^{2p-2}) \\ &= C_{2n+3}^{2p} + C_{2n+3}^{2p-1} \\ &= C_{2n+4}^{2p} \end{aligned}$$

Exemple : $C_4^4 + 2 C_4^3 + C_4^2 = C_6^4$

Triangle de Pascal



Etape d'induction

En supposant l'égalité vraie pour $n = N$, démontrons-la pour $n = N + 1$.

Pour v_1 :

Etape d'induction

En supposant l'égalité vraie pour $n = N$, démontrons-la pour $n = N + 1$.

Pour v_1 :

$$v_1(P_{N+1}) = \frac{k-1}{k+1} v_1(P_N) - \frac{2}{k+1} v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

Etape d'induction

En supposant l'égalité vraie pour $n = N$, démontrons-la pour $n = N + 1$.

Pour v_1 :

$$v_1(P_{N+1}) = \frac{k-1}{k+1} v_1(P_N) + \frac{2}{k+1} v_2(P_N) \quad (\text{par hypothèse})$$

$$= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

Etape d'induction

$$= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

Etape d'induction

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \\
 &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left((k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)
 \end{aligned}$$

Etape d'induction

$$= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left((k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - \frac{2}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p}$$

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left((k-1) \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} - 2 \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Séparation du premier terme de la première somme, et du dernier terme de la dernière somme :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Renumérotation des indices de la deuxième et troisième somme :

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2 C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p-2} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Renumérotation des indices de la deuxième et troisième somme :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2 C_{2N+2}^{2p-1} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p-2} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Jonction des sommes :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} (C_{2N+2}^{2p} + 2 C_{2N+2}^{2p-1} + C_{2N+2}^{2p-2}) (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N 2 C_{2N+2}^{2p+1} (1)^{p+1} k^{N+1-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p} (1)^{p+1} k^{N+1-p} + (1)^{N+2} \right)$$

Renumérotation des indices de la deuxième et troisième somme :

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^{N+1} 2 C_{2N+2}^{2p-1} (1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+2}^{2p-2} (1)^p k^{N+2-p} + (1)^{N+2} \right)$$

Jonction des sommes :

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} (C_{2N+2}^{2p} + 2 C_{2N+2}^{2p-1} + C_{2N+2}^{2p-2}) (1)^p k^{N+2-p} + (1)^{N+2} \right) \\ = \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} + (1)^{N+2} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right)$$

Etape d'induction

$$\begin{aligned} &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(k^{N+2} + \sum_{p=1}^{N+1} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + (-1)^{N+2} \right) \\ &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \sum_{p=0}^{N+2} C_{2N+4}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \end{aligned}$$

Ceci complète la récurrence pour $v_1(P_n)$.

Etape d'induction

Pour v_2 :

Etape d'induction

Pour v_2 :

$$v_2(P_{N+1}) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

Etape d'induction

Pour v_2 :

$$v_2(P_{N+1}) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

$$= \frac{2k}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+1-p} + \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+1-p}$$

Etape d'induction

Pour v_2 :

$$v_2(P_{N+1}) = \frac{2k}{k+1} v_1(P_N) + \frac{k-1}{k+1} v_2(P_N) \text{ (par hypothèse)}$$

$$= \frac{2k}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+1-p} + \frac{k-1}{k+1} \frac{v_i}{(k+1)^{N+1}} \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+1-p}$$

Mise en évidence :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2 C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2 C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Etape d'induction

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(2k \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+1-p} + (k-1) \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+1-p} \right)$$

Distribution des facteurs :

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(\sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^{N+1} 2 C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} \right)$$

Séparation du premier terme de la première somme, des premier et dernier termes de la deuxième somme, et du dernier terme de la dernière somme :

$$= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+2}^1 k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^p k^{N+2-p} + 2k^{N+2} + \sum_{p=1}^N 2 C_{2N+2}^{2p} (-1)^p k^{N+2-p} \right. \\ \left. + (-1)^{N+1} 2k + \sum_{p=0}^{N-1} C_{2N+2}^{2p+1} (-1)^{p+1} k^{N+1-p} + (-1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} k \right)$$

Étape d'induction

Les premiers termes de la première et deuxième somme, et les derniers termes de la deuxième et troisième somme s'unissent deux à deux de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &= (C_{2N+2}^1 k^{N+2} + 2k^{N+2}) + ((-1)^{N+1} 2k + (-1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} k) \\ &= ((2N+2)k^{N+2} + 2k^{N+2}) + ((-1)^{N+1} 2k + (-1)^{N+1} (2N+2) k) \\ &= (2N+4)k^{N+2} + (-1)^{N+1} (2N+4)k \\ &= C_{2N+4}^1 k^{N+2} + (-1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} k \end{aligned}$$

Etape d'induction

Renumérotation des indices de la troisième somme :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+2}^1 k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+2-p} + 2k^{N+2} + \sum_{p=1}^N 2 C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} \right. \\
 &+ \left. (1)^{N+1} 2k + \sum_{p=0}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^{p+1} k^{N+1-p} + (1)^{N+1} C_{2N+2}^{2N+1} k \right) \\
 &= \frac{v_i}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+4}^1 k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p+1} (1)^p k^{N+2-p} + \sum_{p=1}^N 2 C_{2N+2}^{2p} (1)^p k^{N+2-p} \right. \\
 &+ \left. \sum_{p=1}^N C_{2N+2}^{2p} (1)^{p+1} k^{N+2-p} + (1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} k \right)
 \end{aligned}$$

Etape d'induction

Jonction des sommes :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+4}^1 k^{N+2} + \sum_{p=1}^N \left[C_{2N+2}^{2p+1} + 2 C_{2N+2}^{2p} + C_{2N+2}^{2p-1} \right] (1)^p k^{N+2-p} + (1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} k \right) \\
 &= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \left(C_{2N+4}^1 k^{N+2} + \sum_{p=1}^N C_{2N+4}^{2p+1} (1)^p k^{N+2-p} + (1)^{N+1} C_{2N+4}^{2N+3} k \right) \\
 &= \frac{v_j}{(k+1)^{N+2}} \sum_{p=0}^{N+1} C_{2N+4}^{2p+1} (1)^p k^{N+2-p}
 \end{aligned}$$

Ceci complète la récurrence pour $v_2(P_n)$.

Etape d'induction

Nous avons démontré que

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} v_1(P_n) = \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} \\ v_2(P_n) = \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1-p} \end{cases} \quad (5)$$

Autre expression de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$

Grâce aux formules démontrées par récurrence, nous remarquons que l'on pourrait joindre $v_1(P_n)$ et $v_2(P_n)$ sous forme d'une unique somme à l'aide des nombres complexes.

$$v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{k} = \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (-1)^p k^{n+1-p} + i \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (-1)^p k^{n+1/2-p} \right)$$

Autre expression de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$

$$\begin{aligned} &= \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} i^{2p} \rho \bar{k}^{-2n+2} {}^{2p} + \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} i^{2p+1} \rho \bar{k}^{-2n+2} {}^{(2p+1)} \right) \\ &= \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{2n+2} C_{2n+2}^p \rho \bar{k}^{-2n+2} {}^p i^p \\ &= \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} (\rho \bar{k} + i)^{2n+2} \quad (\text{Binôme de Newton}) \\ &= \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \left(\sqrt{k+1} \exp \left(i \arctan \left(\frac{1}{\rho \bar{k}} \right) \right) \right)^{2n+2} \\ &= \frac{v_j}{(k+1)^{n+1}} \left(\sqrt{k+1} \exp \left(i \operatorname{arccotan} \left(\rho \bar{k} \right) \right) \right)^{2n+2} \end{aligned}$$

Autre expression de $v_1(P_n)$ et de $v_2(P_n)$

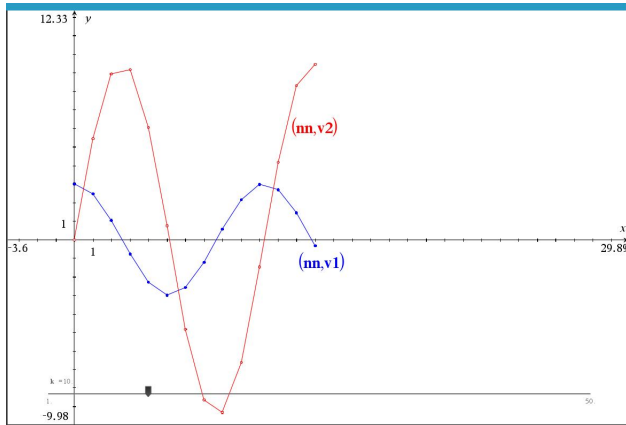
Comme $k > 1$, $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{k}\right)$.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{k} &= v_i \exp\left(i(2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= v_i \left(\cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{k}\right)\right) + i \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \right)\end{aligned}$$

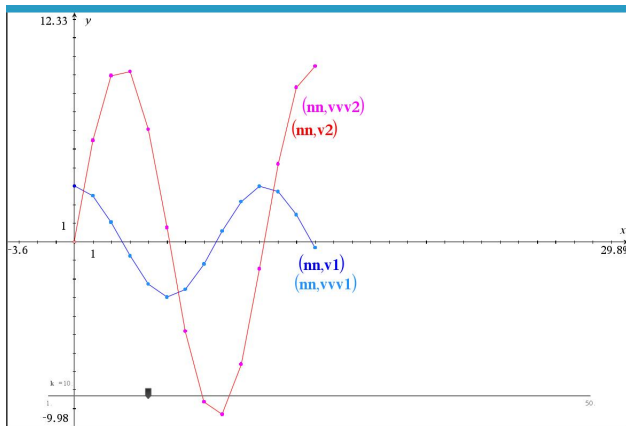
En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{cases} v_1(P_n) = v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ v_2(P_n) = v_i \frac{1}{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \end{cases}$$

Vérification graphique



Vérification graphique



Recherche des zéros de $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

Recherche des zéros de $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace S_1 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_1(P_n)$

Recherche des zéros de $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace S_1 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_1(P_n)$
- la direction dans laquelle se déplace S_2 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_2(P_n)$

Recherche des zéros de $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace S_1 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_1(P_n)$
- la direction dans laquelle se déplace S_2 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_2(P_n)$
- si S_2 rattrape S_1 lorsque $v_1(P_n) < 0$.
! Ce qui est déterminé par le signe et les racines de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

Recherche des zéros de $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et de leur somme

Afin de déterminer le nombre total de chocs et donc le comportement du mouvement des sphères, il faut connaître après chaque choc :

- la direction dans laquelle se déplace S_1 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_1(P_n)$
- la direction dans laquelle se déplace S_2 .
! Déterminée par le signe et les racines de $v_2(P_n)$
- si S_2 rattrape S_1 lorsque $v_1(P_n) < 0$.
! Ce qui est déterminé par le signe et les racines de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

Ces valeurs formeront des intervalles.

Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Réolvons l'équation $v_1(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 s'immobilise à la n^e phase.

$$v_1(P_n) = 0, \quad v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) = 0, \quad \text{où } k > 1.$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation $v_1(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 s'immobilise à la n^e phase.

$$v_1(P_n) = 0, \quad v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) = 0, \quad \text{où } k > 1.$$
$$, \quad \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) = 0$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Réolvons l'équation $v_1(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 s'immobilise à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0, \quad v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0, \text{ où } k > 1. \\ , \quad \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0 \\ , \quad (2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right) &= \frac{(2\ell+1)\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation $v_1(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 s'immobilise à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0, \quad v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0, \text{ où } k > 1. \\ , \quad \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0 \\ , \quad (2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right) &= \frac{(2\ell+1)\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z} \\ , \quad \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right) &= \frac{2\ell+1}{4n+4} \pi\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

Résolvons l'équation $v_1(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 s'immobilise à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) = 0, \quad v_i \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0, \text{ où } k > 1. \\ , \quad \cos\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0 \\ , \quad (2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right) &= \frac{(2\ell+1)\pi}{2}, \ell \in \mathbb{Z} \\ , \quad \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right) &= \frac{2\ell+1}{4n+4} \pi\end{aligned}$$

Vu l'ensemble des valeurs $]0, \pi[$ de la fonction $\operatorname{arccotan}$, on doit avoir $0 < \frac{2\ell+1}{4n+4} \pi < \pi$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) = 0$

$$0 < \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \pi < \pi, \quad 0 \leq \ell \leq 2n + 1$$

$$\operatorname{arccotan} \left(\frac{\rho_-}{k} \right) = \frac{2\ell + 1}{4n + 4} \pi$$

$$\rho_- / k = \cot \left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \pi \right), \text{ avec } \cot \left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \pi \right) > 0, \quad 0 \leq \ell \leq n.$$

$$k = \cot^2 \left(\frac{2\ell + 1}{4n + 4} \pi \right) \quad \ell \in [0, 1, 2, \dots, n]$$

Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation $v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_2 s'immobilise à la n^e phase.

$$v_2(P_n) = 0, \quad v_i^{P_-} k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{P_-}{k}}\right)\right) = 0, \quad \text{où } k > 1.$$

Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation $v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_2 s'immobilise à la n^e phase.

$$v_2(P_n) = 0, \quad v_i \frac{\rho_-}{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) = 0, \quad \text{où } k > 1.$$
$$, \quad \frac{\rho_-}{k} \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) = 0$$

Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation $v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_2 s'immobilise à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0, \quad v_i^{\rho_-} k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0, \quad \text{où } k > 1. \\ , \quad \rho_- k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0 \\ , \quad \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_-}{k}\right)\right) &= 0\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation $v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_2 s'immobilise à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0, \quad v_i^{\rho_{-}} k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right)\right) &= 0, \text{ où } k > 1. \\ , \quad \rho_{-} k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right)\right) &= 0 \\ , \quad \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right)\right) &= 0 \\ , \quad (2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right) &= \ell \pi, \ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

Résolvons maintenant l'équation $v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_2 s'immobilise à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_2(P_n) = 0, & \quad v_i^{\rho_{-}} k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right)\right) = 0, \text{ où } k > 1. \\ & \quad , \quad \rho_{-} k \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right)\right) = 0 \\ & \quad , \quad \sin\left((2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right)\right) = 0 \\ & \quad , \quad (2n+2) \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right) = \ell \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\ & \quad , \quad \operatorname{arccotan}\left(\frac{\rho_{-}}{k}\right) = \frac{\ell \pi}{2n+2}\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_2(P_n) = 0$

De par l'ensemble des valeurs de l'arccotangente, on doit avoir :

$$0 < \frac{\ell \pi}{2n+2} < \pi$$

$$, \quad 0 < \ell < 2n+2, \quad 1 \leq \ell \leq 2n+1$$

Dès lors,

$$\operatorname{arccotan} \left(\frac{\rho_-}{k} \right) = \frac{\ell \pi}{2n+2}$$

$$, \quad \frac{\rho_-}{k} = \cot \left(\frac{\ell \pi}{2n+2} \right), \text{ avec } \cot \left(\frac{\ell \pi}{2n+2} \right) > 0, \quad 1 \leq \ell \leq n+1.$$

$$, \quad k = \cot^2 \left(\frac{\ell \pi}{2n+2} \right) \quad \ell \in [1, 2, \dots, n+1]$$

Forme polynomiale de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) &= \frac{V_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (1)^p k^{n+1-p} \\ &+ \frac{V_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (1)^p k^{n+1-p} \\ &= \frac{V_i}{(k+1)^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2p} (1)^p k^{n+1-p} + \sum_{p=0}^n C_{2n+2}^{2p+1} (1)^p k^{n+1-p} \right) \\ &= \frac{V_i}{(k+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} C_{2n+3}^{2p+1} (1)^p k^{n+1-p}\end{aligned}$$

Forme trigonométrique de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

Grâce à un artifice de calcul :

$$\begin{aligned} & \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} (\rho_{\bar{k}} + i)^{2n+2} (\rho_{\bar{k}} + i) \\ &= (v_1(P_n) + i \frac{v_2(P_n)}{\rho_{\bar{k}}}) (\rho_{\bar{k}} + i) \\ &= \rho_{\bar{k}} v_1(P_n) + \frac{v_2(P_n)}{\rho_{\bar{k}}} + i(v_1(P_n) + v_2(P_n)) \end{aligned}$$

Forme trigonométrique de $v_1(P_n) + v_2(P_n)$

On remarque que

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) &= \left(\frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \left(\rho_{\overline{k}} + i \right)^{2n+3} \right) \\ &= v_i \rho_{\overline{k}} \sin \left((2n+3) \operatorname{arccotan} \left(\rho_{\overline{k}} \right) \right)\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

Résolvons enfin l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales à la n^e phase.

$$v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0, \quad \sin\left((2n+3) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{P}{k}}\right)\right) = 0, \quad \text{où } k > 1.$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

Résolvons enfin l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales à la n^e phase.

$$v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0, \quad \sin\left((2n+3) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{P}{k}}\right)\right) = 0, \quad \text{où } k > 1.$$
$$, \quad (2n+3) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{P}{k}}\right) = \ell \pi, \ell \in \mathbb{Z}$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

Résolvons enfin l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$. La solution indiquera la valeur de k pour laquelle S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales à la n^e phase.

$$\begin{aligned}v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0, \quad \sin\left((2n+3) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{p}{k}}\right)\right) &= 0, \quad \text{où } k > 1. \\ , \quad (2n+3) \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{p}{k}}\right) &= \ell \pi, \ell \in \mathbb{Z} \\ , \quad \operatorname{arccotan}\left(\sqrt{\frac{p}{k}}\right) &= \frac{\ell \pi}{2n+3}\end{aligned}$$

Résolution de l'équation $v_1(P_n) + v_2(P_n) = 0$

De par l'ensemble des valeurs de l'arccotangente, on doit avoir :

$$0 < \frac{\ell \pi}{2n+3} < \pi$$

$$, \quad 0 < \ell < 2n+3, \quad 1 \leq \ell \leq 2n+2$$

Dès lors,

$$\operatorname{arccotan} \left(\frac{\rho_-}{k} \right) = \frac{\ell \pi}{2n+3}$$

$$, \quad \frac{\rho_-}{k} = \cot \left(\frac{\ell \pi}{2n+3} \right), \text{ avec } \cot \left(\frac{\ell \pi}{2n+3} \right) \in]0, 1[\quad \ell \in [1, n+1].$$

$$, \quad k = \cot^2 \left(\frac{\ell \pi}{2n+3} \right) \quad \ell \in [1, 2, \dots, n+1]$$

Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré $n + 1$ en k ;

Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré $n + 1$ en k ;
- le dénominateur est $(k + 1)^{n+1}$, strictement positif si $k > 1$;

Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Nous avons déterminé que $v_1(P_n)$, $v_2(P_n)$ et leur somme sont des fonctions rationnelles dont :

- le numérateur est un polynôme de degré $n + 1$ en k ;
- le dénominateur est $(k + 1)^{n+1}$, strictement positif si $k > 1$;
- $n + 1$ zéros différents du pôle ont été trouvés.

Factorisation de $v_1(P_n)$, de $v_2(P_n)$ et de leur somme

Par conséquent, pour tout n naturel, nous pouvons écrire en vertu du théorème fondamental de l'algèbre :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_n) = \frac{v_i}{(k+1)^{n+1}} \prod_{\ell=0}^n \left(k \cot^2 \left(\frac{2\ell+1}{4n+4} \pi \right) \right) \\ v_2(P_n) = \frac{(2n+2)v_i}{(k+1)^{n+1}} \prod_{\ell=1}^{n+1} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{2n+2} \pi \right) \right) \\ v_1(P_n) + v_2(P_n) = \frac{(2n+3)v_i}{(k+1)^{n+1}} \prod_{\ell=1}^{n+1} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{2n+3} \pi \right) \right) \end{array} \right.$$

Valeurs-pivot de l'étude phase par phase

Pour faciliter l'étude des phases en fonction des valeurs-pivot que nous avons calculées, soient :

Valeurs-pivot de l'étude phase par phase

Pour faciliter l'étude des phases en fonction des valeurs-pivot que nous avons calculées, soient :

- c_n la plus grande valeur annulant $v_1(P_n)$, c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right)$$

- r_n la plus grande valeur annulant $v_2(P_n)$, c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)$$

- s_n la plus grande valeur annulant $v_1(P_n) + v_2(P_n)$, c'est-à-dire :

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2n+3}\right)$$

Retour à l'étude phase par phase ; phase P_0

Avec tous ces apports théoriques, résumons l'étude des chocs phase par phase.

Comme déjà vu :

$$\begin{cases} v_1(P_0) = \frac{k-1}{k+1} v_i \\ v_2(P_0) = \frac{2k}{k+1} v_i \end{cases} \quad (6)$$

Donc à la phase P_0 , S_1 et S_2 se dirigent vers le mur : $v_1(P_0)$ et $v_2(P_0)$ sont positifs.

Phase P_1 (formule)

Pour la phase P_1 , on a :

$$\begin{cases} v_1(P_1) = \frac{v_j}{(k+1)^2} \left(k \cot^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) \left(k \cot^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right) \\ v_2(P_1) = \frac{4v_j}{(k+1)^2} \left(k \cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left(k \cot^2\left(\frac{2\pi}{4}\right) \right) \\ v_1(P_1) + v_2(P_1) = \frac{5v_j}{(k+1)^2} \left(k \cot^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) \left(k \cot^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right) \end{cases}$$

Dans ce cas, $c_1 = \cot^2(\pi/8)$, $s_1 = \cot^2(\pi/5)$; et
 $r_1 = \cot^2(\pi/4) = 1$ (à rejeter car on ne considère que $k > 1$).

Phase P_1 (étude de signe)

L'étude du signe de chacune des expressions donne le tableau suivant.

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

Notons que les autres zéros sont inférieurs à 1.

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \in]r_1, s_1[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \geq]r_1, s_1[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_1$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \in]r_1, s_1[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_1$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_1, c_1[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \in]r_1, s_1[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_1$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_1, c_1[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = c_1$, alors S_1 s'immobilise ;

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \geq r_1, s_1[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_1$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \geq s_1, c_1[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = c_1$, alors S_1 s'immobilise ;
- si $k > c_1$, alors S_1 continue sa trajectoire vers le mur.

Phase P_1 (conclusion)

Grâce au tableau de signes,

k		r_1		s_1		c_1	
$v_1(P_1)$	/					0	+
$v_2(P_1)$	/	0	+	+	+	+	+
$v_1(P_1) + v_2(P_1)$	/			0	+	+	+

on peut tirer les conclusions suivantes :

- Si $k \geq r_1, s_1$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_1$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \geq s_1, c_1$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = c_1$, alors S_1 s'immobilise ;
- si $k > c_1$, alors S_1 continue sa trajectoire vers le mur.

Dans les trois derniers cas, il y a encore un choc !

Phase P_2 (formule)

Etudions uniquement l'intervalle $]s_1, c_1[$. Pour la phase P_2 , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_2) = \frac{v_i}{(k+1)^3} \prod_{\ell=0}^2 \left(k \cot^2 \left(\frac{2\ell+1}{12} \pi \right) \right) \\ v_2(P_2) = \frac{6v_i}{(k+1)^3} \prod_{\ell=1}^3 \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{6} \pi \right) \right) \\ v_1(P_2) + v_2(P_2) = \frac{7v_i}{(k+1)^3} \prod_{\ell=1}^3 \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{7} \pi \right) \right) \end{array} \right.$$

Dans ce cas, $c_2 = \cot^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)$, $s_2 = \cot^2 \left(\frac{\pi}{7} \right)$ et $r_2 = \cot^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)$.

Phase P_2 (étude de signe)

L'étude du signe de chacune des expressions donne le tableau suivant.

k	s_1	r_2	s_2	c_1
$v_1(P_2)$	/			/
$v_2(P_2)$	/	0	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/		0	/

Notons que les autres zéros sont inférieurs à 1.

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/								/
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/								/
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/								/
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_2$, alors S_2 s'immobilise et S_1 repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/								/
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_2$, alors S_2 s'immobilise et S_1 repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si $k \in]r_2, s_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/							/	
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_2$, alors S_2 s'immobilise et S_1 repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si $k \in]r_2, s_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_2$, alors S_1 et S_2 repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/								/
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_2$, alors S_2 s'immobilise et S_1 repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si $k \in]r_2, s_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_2$, alors S_1 et S_2 repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_2, c_1[$, alors S_1 repart en direction opposée au mur plus lentement que S_2 .

Phase P_2 (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

k		s_1		r_2		s_2		c_1	
$v_1(P_2)$	/								/
$v_2(P_2)$	/			0	+	+	+	+	/
$v_1(P_2) + v_2(P_2)$	/					0	+	+	/

- Si $k \in]s_1, r_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_2$, alors S_2 s'immobilise et S_1 repart en direction opposée au mur avec la même vitesse initiale ;
- si $k \in]r_2, s_2[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_2$, alors S_1 et S_2 repartent en direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_2, c_1[$, alors S_1 repart en direction opposée au mur plus lentement que S_2 .

Dans le dernier cas, il y a encore un choc !

Phase P_3 (formule)

Etudions uniquement l'intervalle $]s_2, c_1[$. Pour la phase P_3 , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_3) = \frac{v_i}{(k+1)^4} \prod_{\ell=0}^3 \left(k \cot^2 \left(\frac{2\ell+1}{16} \pi \right) \right) \\ v_2(P_3) = \frac{8v_i}{(k+1)^4} \prod_{\ell=1}^4 \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{8} \pi \right) \right) \\ v_1(P_3) + v_2(P_3) = \frac{9v_i}{(k+1)^4} \prod_{\ell=1}^4 \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{9} \pi \right) \right) \end{array} \right.$$

Phase P_3 (étude de signe)

Remarquons que dans l'intervalle $]s_2, c_1[$, il n'y a plus de valeurs-pivot propres à la phase P_3 .

En effet, on a :

k		s_2		c_1		r_3	
$v_1(P_3)$	/					/	/
$v_2(P_3)$	/					0	/
$v_1(P_3) + v_2(P_3)$	/					/	/

Phase P_3 (conclusion)

On conclut que si $k \geq]s_2, c_1[$, alors il y a un dernier choc entre S_1 et S_2 .

L'étude de l'intervalle $]1, c_1]$ est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



Phase P_3 (conclusion)

On conclut que si $k \geq]s_2, c_1[$, alors il y a un dernier choc entre S_1 et S_2 .

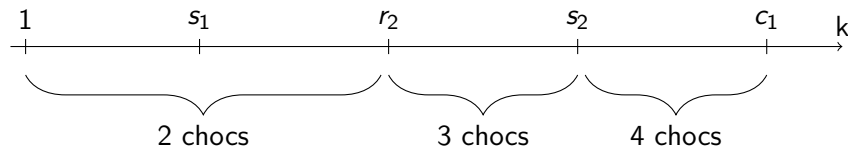
L'étude de l'intervalle $]1, c_1]$ est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



Phase P_3 (conclusion)

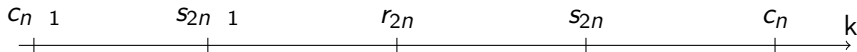
On conclut que si $k \in]s_2, c_1[$, alors il y a un dernier choc entre S_1 et S_2 .

L'étude de l'intervalle $]1, c_1[$ est finie, et les valeurs-pivot se répartissent de la manière suivante :



Généralisation par induction

Démontrons par récurrence que tout intervalle $]c_{n-1}; c_n]$, où n est un naturel non nul, se décompose somme suit.



Ces valeurs-pivot sont associées aux phases P_{2n-2} , P_{2n-1} , P_{2n} , P_{2n+1} . Le cas de base vient d'être considéré.

En supposant l'assertion vraie pour $n = N$, démontrons-la pour $n = N + 1$. Cela veut dire que l'on étudiera l'intervalle $]c_N; c_{N+1}]$.

Phase P_{2N+1} (formule)

Pour la phase P_{2N+1} , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+1}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+2}} \prod_{\ell=0}^{2N+1} \left(k \cot^2 \left(\frac{2\ell+1}{8N+8} \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+1}) = \frac{(4N+4)v_i}{(k+1)^{2N+2}} \prod_{\ell=1}^{2N+2} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{4N+4} \pi \right) \right) \\ v_1(P_{2N+1}) + v_2(P_{2N+1}) = \frac{(4N+5)v_i}{(k+1)^{2N+2}} \prod_{\ell=1}^{2N+2} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{4N+5} \pi \right) \right) \end{array} \right.$$

Notons que $c_N = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4N+4} \right) = \cot^2 \left(\frac{\pi}{2(2N+1)+2} \right) = r_{2N+1}$

Phase P_{2N+1} (étude de signe)

k		$r_{2N+1} = c_N$		s_{2N+1}		c_{N+1}	
$v_1(P_{2N+1})$	/	/					/
$v_2(P_{2N+1})$	/	/	+	+	+	+	/
$v_1(P_{2N+1}) + v_2(P_{2N+1})$	/	/		0	+	+	/

Phase P_{2N+1} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

Phase P_{2N+1} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si $k \in]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_{2N+1} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si $k \in]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+1}$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;

Phase P_{2N+1} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si $k \in]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+1}$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_{2N+1}, c_{N+1}[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur.

Phase P_{2N+1} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on peut tirer les conclusions suivantes.

- Si $k \in]r_{2N+1}, s_{2N+1}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+1}$, alors S_1 et S_2 repartent dans la direction opposée au mur avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_{2N+1}, c_{N+1}[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 dans la direction opposée au mur.

Dans le dernier cas, il y a encore un choc !

Phase P_{2N+2} (formule)

Pour la phase P_{2N+2} , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+2}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+3}} \prod_{\ell=0}^{2N+2} \left(k \cot^2 \left(\frac{2\ell+1}{8N+12} \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+2}) = \frac{(4N+6)v_i}{(k+1)^{2N+3}} \prod_{\ell=1}^{2N+3} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{4N+6} \pi \right) \right) \\ v_1(P_{2N+2}) + v_2(P_{2N+2}) = \frac{(4N+7)v_i}{(k+1)^{2N+3}} \prod_{\ell=1}^{2N+3} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{4N+7} \pi \right) \right) \end{array} \right.$$

Phase P_{2N+2} (étude de signe)

k	s_{2N+1}	r_{2N+2}	s_{2N+2}	c_{N+1}		
$v_1(P_{2N+2})$					/	
$v_2(P_{2N+2})$		0	+	+	+	/
$v_1(P_{2N+2}) + v_2(P_{2N+2})$			0	+	+	/

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_{2N+2}$, alors S_2 s'immobilise ;

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_{2N+2}$, alors S_2 s'immobilise ;
- si $k \in]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_{2N+2}$, alors S_2 s'immobilise ;
- si $k \in]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+2}$, alors S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales ;

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_{2N+2}$, alors S_2 s'immobilise ;
- si $k \in]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+2}$, alors S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_{2N+2}, c_{N+1}[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 .

Phase P_{2N+2} (conclusion)

Grâce au tableau de signes, on déduit :

- Si $k \in]s_{2N+1}, r_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = r_{2N+2}$, alors S_2 s'immobilise ;
- si $k \in]r_{2N+2}, s_{2N+2}[$, alors S_1 repart plus vite que S_2 dans la direction opposée au mur ;
- si $k = s_{2N+2}$, alors S_1 et S_2 repartent avec des vitesses égales ;
- si $k \in]s_{2N+2}, c_{N+1}[$, alors S_1 repart plus lentement que S_2 .

Dans le dernier cas, il y a un nouveau choc !

Phase P_{2N+3} (formule)

Pour la phase P_{2N+3} , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(P_{2N+3}) = \frac{v_i}{(k+1)^{2N+4}} \prod_{\ell=0}^{2N+3} \left(k \cot^2 \left(\frac{2\ell+1}{8N+16} \pi \right) \right) \\ v_2(P_{2N+3}) = \frac{(4N+8)v_i}{(k+1)^{2N+4}} \prod_{\ell=1}^{2N+4} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{4N+8} \pi \right) \right) \\ v_1(P_{2N+3}) + v_2(P_{2N+3}) = \frac{(4N+9)v_i}{(k+1)^{2N+4}} \prod_{\ell=1}^{2N+4} \left(k \cot^2 \left(\frac{\ell}{4N+9} \pi \right) \right) \end{array} \right.$$

Phase P_{2N+3} (étude de signe)

Remarquons que dans l'intervalle $]s_{2N+2}, c_{N+1}[$, il n'y a plus de valeurs-pivot propres à la phase P_{2N+3} .

En effet, on a :

k		s_{2N+2}		c_{N+1}		r_{2N+3}	
$v_1(P_{2N+3})$	/						/
$v_2(P_{2N+3})$	/					0	/
$v_1(P_{2N+3}) + v_2(P_{2N+3})$	/						/

Ceci conclut la récurrence.

Résumé

Les différentes valeurs de c_n , r_n et s_n sont des valeurs-pivot formant des intervalles. Aussi, il est important de noter que

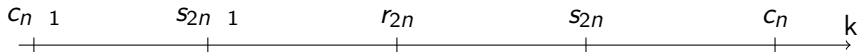
$$c_n = \cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)+2}\right) = r_{2n+1}$$

Résumé

Les différentes valeurs de c_n , r_n et s_n sont des valeurs-pivot formant des intervalles. Aussi, il est important de noter que

$$c_n = \cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)+2}\right) = r_{2n+1}$$

On peut généraliser chaque intervalle $]c_{n-1}; c_n]$ auquel k peut appartenir de la manière suivante :

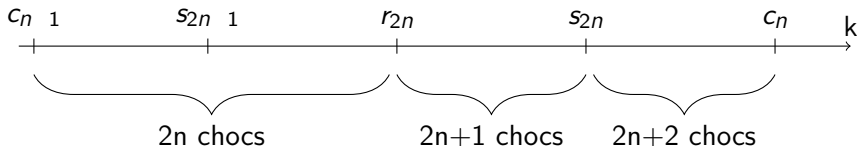


Résumé

Les différentes valeurs de c_n , r_n et s_n sont des valeurs-pivot formant des intervalles. Aussi, il est important de noter que

$$c_n = \cot^2\left(\frac{\pi}{4n+4}\right) = \cot^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)+2}\right) = r_{2n+1}$$

On peut généraliser chaque intervalle $]c_{n-1}; c_n]$ auquel k peut appartenir de la manière suivante :



Généralisation finale des résultats selon k

valeur de k	v_1	v_2
c_{2n-1}	$v_1(P_{2n-1}) = v_i$	$v_2(P_{2n-1}) = 0$
$c_{2n-1} < k < s_{2n-1}$	$j v_1(P_{2n-1}) j > j v_2(P_{2n-1}) j$	$v_2(P_{2n-1}) > 0$
s_{2n-1}	$j v_1(P_{2n-1}) j = j v_2(P_{2n-1}) j$	$v_2(P_{2n-1}) > 0$
$s_{2n-1} < k < r_{2n}$	$j v_1(P_{2n-1}) j > j v_2(P_{2n-1}) j$	$v_2(P_{2n-1}) < 0$
r_{2n}	$v_1(P_{2n}) = v_i$	$v_2(P_{2n}) = 0$
$r_{2n} < k < s_{2n}$	$j v_1(P_{2n}) j > j v_2(P_{2n}) j$	$v_2(P_{2n}) > 0$
s_{2n}	$j v_1(P_{2n}) j = j v_2(P_{2n}) j$	$v_2(P_{2n}) > 0$
$s_{2n} < k < c_{2n}$	$j v_1(P_{2n+1}) j > j v_2(P_{2n+1}) j$	$v_2(P_{2n+1}) < 0$
c_{2n}	$v_1(P_{2n+1}) = v_i$	$v_2(P_{2n+1}) = 0$

Remerciements

Merci pour votre écoute.

Nous remercions notre professeur de mathématiques M.Haine ainsi que Mme Sutera, Mme Moitroux et Mme Germain pour nous avoir assistés tout au long de notre recherche et le chercheur de l'ULiège M.Leroy pour ses suggestions.